Павлова Ю.Н.
Санкт-Петербургский государственный университет

Обзор. Теоретико-игровой подход к моделированию механизмов Киотского протокола

Киотский протокол требует введения новых экономических методов и математических моделей, которые могли бы имитировать процесс принятия решений и оказываемое ними влияние на снижение выбросов. Нелинейная дискретная по времени модель "Технология-Выбросы-Средства"(ТВС) была построена профессором Стефаном Пиклом и описывает взаимодействие между игроками. Целью страны i является минимизировать выбросы E_i, которые вызваны применением технологий T_i в промышленности, с помощью финансовых средств M_i. Накладывая дополнительные ограничения, можно сформулировать общую задачу управления и применить теоретико-игровой подход к её решению.

1 Модель

Игроки связаны технологической кооперацией и рынком, который выражен в нелинейной дискретно по времени динамической модели. Связь между финансовыми средствами и сниженными единицами выбросов выражена в следующих уравнениях модели ТВС в следующих уравнениях модели ТВС

$$E_i(t+1) = E_i(t) + \sum_{j=1}^{n} em_{ij}(t)M_j(t), \tag{1}$$

$$M_i(t+1) = M_i(t) - \lambda_i M_i(t)[M_i^* - M_i(t)]\{E_i(t) + \varphi_i \Delta E_i(t)\} \tag{2}$$

Здесь E_i – сниженные единицы выбросов игрока i в процентах; M_i – финансовые затраты игрока i;

λ_i – параметр "памяти", описывает влияние предшествующих инвестиций;

φ_i – параметр "роста"(возможная инфляция); он несет ответственность за дальнейшие инвестиции: если величина ΔE_i была очень большой, т.е. на предыдущем шаге мы добились успеха, то для увеличения дальнейших инвестиций M_i, мы должны увеличить и параметр φ_i, и, наоборот, для уменьшения M_i, мы должны уменьшить φ_i. этот параметр может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

M_i^* – бюджет игрока i, верхняя граница вкладываемых финансовых средств.

$\{em_{ij}\}$ – матрица параметров, описывающих влияние на выбросы игрока i, если игрок j делает инвестиции в промышленность игрока i. Иными словами, она показывает, на сколько эффективна технологическая кооперация. Элементы матрицы определяются опытным путем.

Параметры φ_i и λ_i гарантируют реалистичность экономики. В первом уравнении уровень сниженных выбросов на этапе t равен предыдущему значению плюс рыночный эффект, который может быть как отрицательным, так и положительным.

В случае $E_i > 0$ - означает, что игрок ещё не достиг требуемого Киотским протоколом уровня $E_i = 0$ (нормализованная величина); $Ei < 0$ - означает, что выбросы меньше, чем требуется.

Уравнение (2) описывает взаимосвязь между снижением выбросов и вложенными финансовыми средствами. Оно содержит функциональную зависимость и параметр "памяти"φ_i. Динамика не гарантирует, что параметр M_i окажется в бюджетном интервале игрока i

$$0 \le M_i(t) \le M_i^*, \qquad i = 1, \dots, n, \quad t = 0, \dots, N. \tag{3}$$

По этой причине накладываются ограничения. Легко показать, что

$$-\lambda_i M_i(t)[M_i^* - M_i(t)] \le 0, \qquad i = 1, \dots, n, \quad t = 0, \dots, N.$$

Также можно утверждать, что $M_i(t+1)$ увеличивается, если $E_i(t) + \varphi_i \Delta E_i(t) \le 0$, и уменьшается, если $E_i(t) + \varphi_i \Delta E_i(t) \ge 0$.

2 Численные примеры

Если рассматривать ТВС модель как процедуру, то можно сравнить результаты процесса для различных исходных данных.

Пример 1.

Рассмотрим поведение 3х игроков, которые в начальный момент ещё не достигли граничного уровня выбросов (см. табл. 1) Матрица $\{em_{ij}\}$ имеет отрицательные (это приводит к уменьшению параметра E_i) и положительные (это приводит к увеличению параметра E_i) элементы, что означает, что мы имеем дело с "соревновательным"и кооперативным поведением игроков. То есть, элементы матрицы $\{em_{ij}\}$ показывают инвестиции от каких игроков в экономику каких игроков будет эффективной. Меняя элементы матрицы, мы можем рассматривать различные сценарии игры.

При значениях параметра роста $\varphi = \{0.1, 0.1, 0.1\}$ мы можем наблюдать, что значения выбросов и затрат игроков сильно колеблются (рис. 1 и 2).

Таблица 1

игрок i	$E_i(0)$	$M_i(0)$	M_i^*	λ	$1/60 * em$-матрица		
1	-0.1	30	60	1/60	1	-0.525	-0.475
2	-0.1	20	60	1/60	-0.475	1	0.525
3	-0.1	10	60	1/60	-0.1	-0.1	0.2

Пример 2.

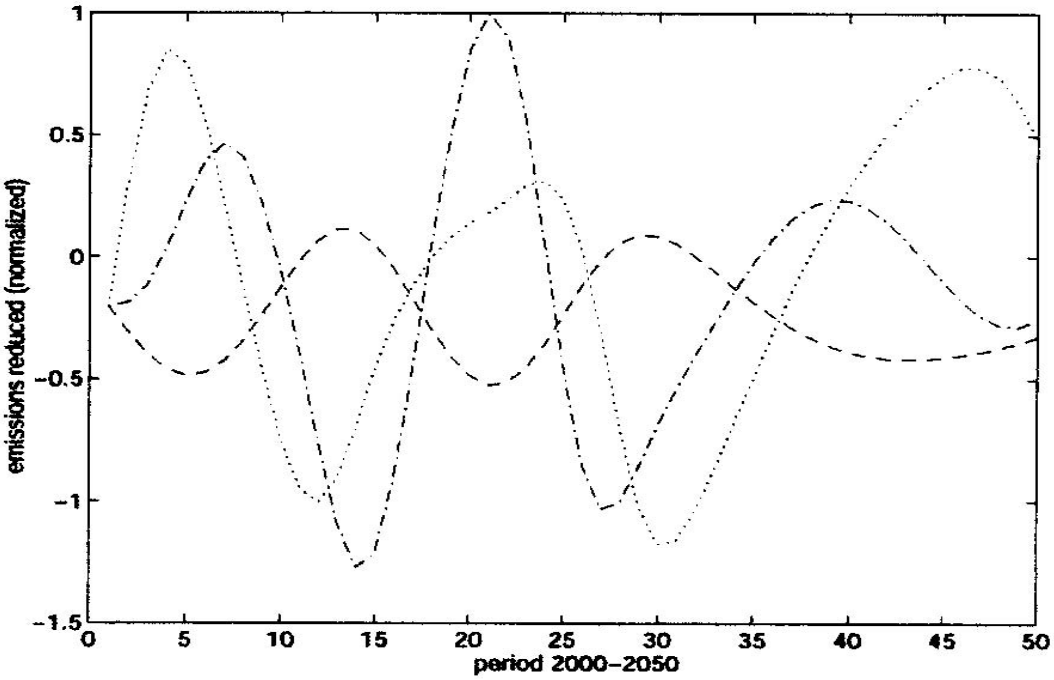
Рассмотрим исключительный случай, когда $\varphi = \{30, 30, 30\}$ Каждый игрок достигает требуемого уровня.

Но из-за нелинейной структуры динамики мы не можем гарантировать, что такие значения параметра φ существуют. Даже, несмотря на то, что эти примеры не относятся к реальности, они демонстрируют необходимость введения параметров управления.

Таблица 2

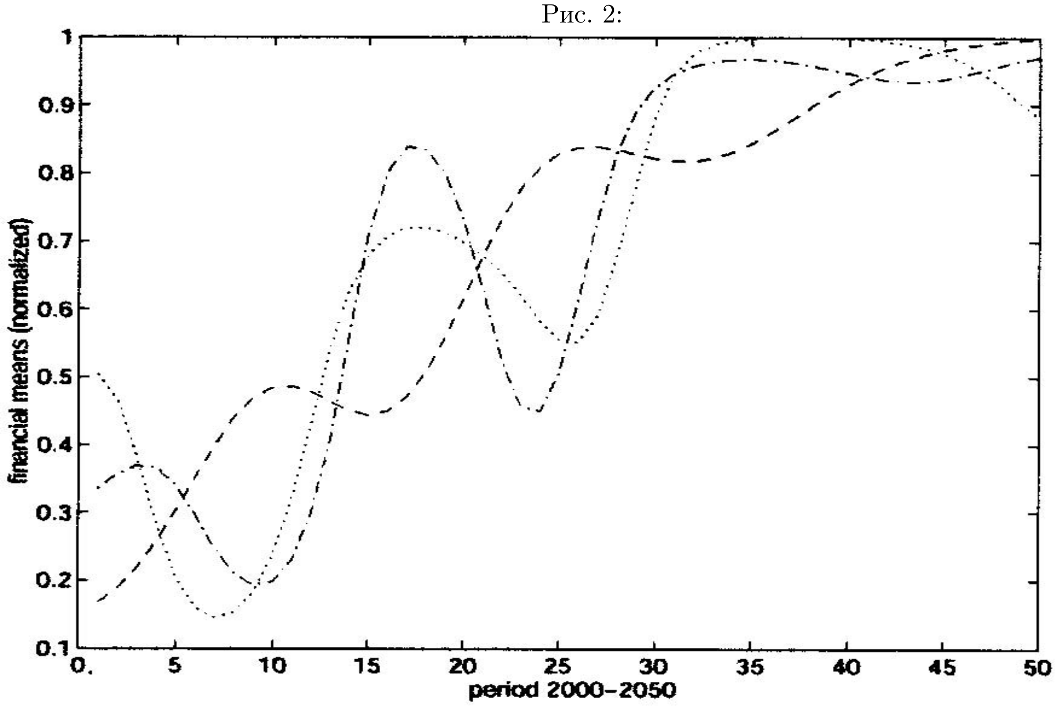
игрок i	$E_i(0)$	$M_i(0)$	M_i^*	φ	λ	em-матрица		
1	0	0.3	1	30	0.01	1	-0.5	-0.5
2	0	0.5	1	30	0.01	-0.5	1	-0.5
3	0	0.2	1	30	0.01	-0.5	-0.5	1

Рис. 1:



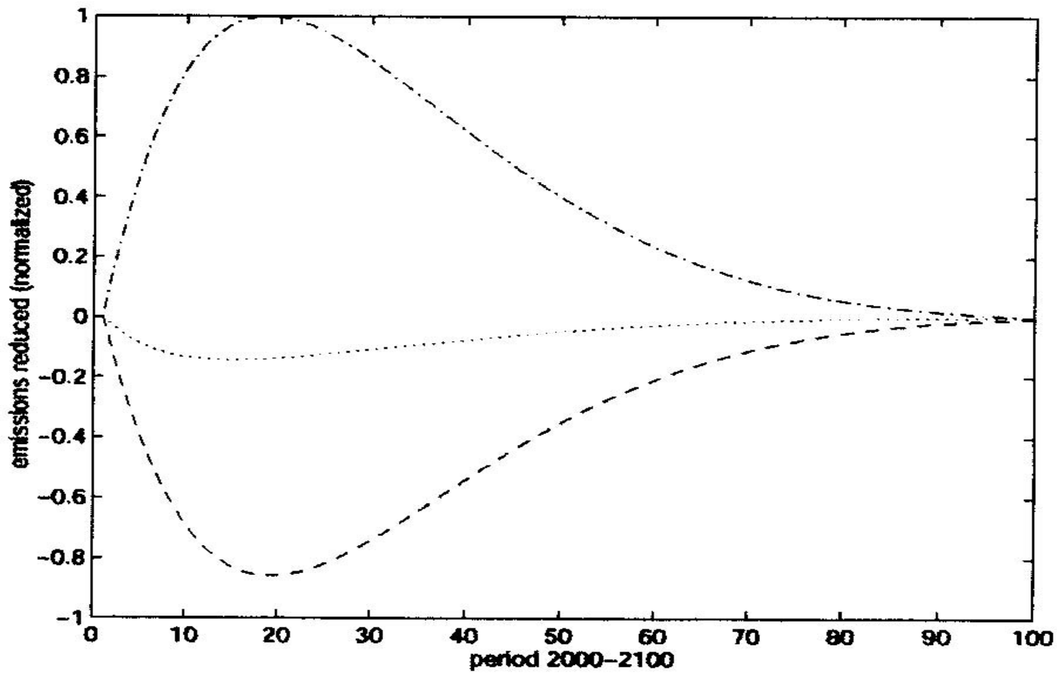
emissions reduced (normalized)
period 2000-2050

Рис. 2:



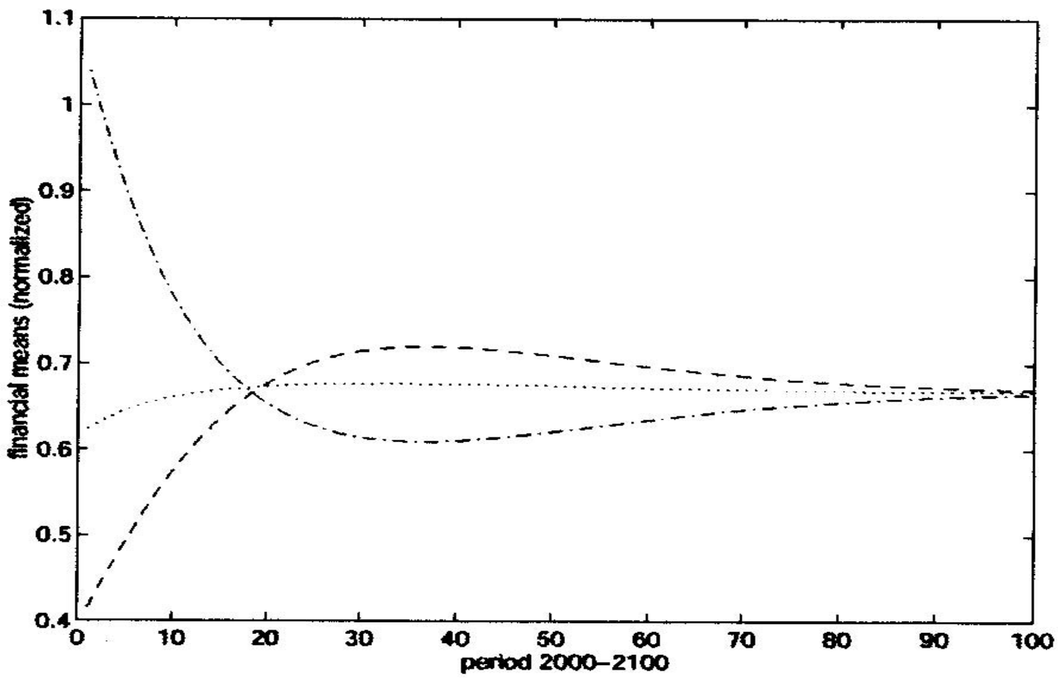
financial means (normalized)
period 2000-2050

Рис. 3:



1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
emissions reduced (normalized)
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
period 2000-2100

Рис. 4:



1.1
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
financial means (normalized)
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
period 2000-2100

3 Управляемость

Представим ТВС модель в следующей форме:

$$
\begin{aligned}
&\Delta E_i(t) = \textstyle\sum_{j=1}^{n} em_{ij}(t) M_j(t),\\
&\Delta M_i(t) = -\lambda_i M_i(t)[M_i^* - M_i(t)]\{E_i(t) + \varphi_i \Delta E_i(t)\}.
\end{aligned}
$$

Найдем точки покоя системы. Решим систему упрощающих уравнений:

$$
\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{j=1}^{n} em_{ij}(t) M_j(t) = 0,\\
&M_i(t)[M_i^* - M_i(t)] = 0, \quad \text{при} \quad i = 1, \ldots, n.
\end{aligned}
$$

Точки покоя $(\hat{E}, \hat{M})$ определяют стабильное состояние и не зависят от времени.

Рассмотрим матрицу Якоби правой части модели для случая фиксированной матрицы $em_{ij}(t) = em^*_{ij}$ (получена путем оценки). Считаем, что экономическая взаимосвязь не меняется в течение долгого периода времени:

$$
\begin{array}{cccccccc}
1 & 0 & \ldots & 0 & em_{11} & em_{12} & \ldots & em_{1n}\\
0 & 1 & & \vdots & em_{21} & em_{22} & \ldots & \ldots\\
\vdots & & \ddots & & \vdots & & & \ldots\\
0 & 0 & 0 & 1 & em_{n1} & em_{n2} & \ldots & em_{nn}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda_1 M_1^* \hat{E}_1 & 0 & \ldots & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda_2 M_2^* \hat{E}_2 & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & \ldots & \ldots & & 0 & \ldots & & 1-\lambda_n M_n^* \hat{E}_n
\end{array}
$$

Собственные числа матрицы Якоби:

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1^* = 1, \ldots, \lambda_n^* = 1;\\
&\lambda_{n+j}^* = 1 - \lambda_i^* M_j^* \hat{E}_j(t), \quad j = 1, \ldots, n.
\end{aligned}
$$

Чтобы система была устойчивой, радиус спектра должен быть меньше 1. Отсюда следует, что точки покоя системы, полученные при упрощающих условиях, не являются предпочтительными.

4 Задача управляения

Рассмотрим систему разностных уравнений:

$$
x_i(t+1) = x_i(t) + f_i(x(t), u(t)), \qquad i = 1, \ldots, n, \quad t \in N_0 = \mathbf{N} + \{0\} \tag{4}
$$

$$
\begin{aligned}
&x_i : N_0 \to R^{l_i}, \qquad u_i : N_0 \to R^{m_i}, \qquad i = 1, \ldots, n.\\
&x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)), \quad t \in N_0, \quad \text{-вектор состояний}\\
&u(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t)), \quad t \in N_0, \quad \text{-вектор управляющих параметров}
\end{aligned}
$$

Функция f — векторная функция:

$$f_i : \prod_{j=1}^{n} R^{l_j} \times \prod_{j=1}^{n} R^{m_j} \to R^{l_j}, \quad x_i : N_0 \to R^{l_i}, \qquad u_i : N_0 \to R^{m_i}, \qquad i = 1, \ldots, n..$$

Введем ограничения на векторы состояний и управляющих параметров:

$$x_i(t) \in X_i, \quad \text{для любого} \quad i = 1, \ldots, n \tag{5}$$

$$u_i(t) \in U_i, \quad \text{для любого} \quad i = 1, \ldots, n \tag{6}$$

Начальные условия:

$$x_i(0) = x_{0i}, \quad x_{0i} \in X_i \tag{7}$$

Предположения:

1. Для любого i нулевой вектор является допустимым управлением:
   $\Theta_{m_i} \in U_i, \qquad i = 1, \ldots, n;$

2. Нелинейная система

$$f_i(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n, \Theta_{m_1}, \ldots, \Theta_{m_n}) = \Theta_{l_i} \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n \tag{8}$$

   имеет хотя бы одно решение:

$$\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n) \in \prod_{j=n}^{n} X_j.$$

Сформулируем **задачу управления**:
Пусть $\hat{x}$ — решение системы (8).
Найти такие управления $u_i : N_0 \to R^{m_i}, \quad i = 1, \ldots n$ и такое подмножество $N \in N_0$, что при выполнении условий (4), (5), (6), (7) выполнялось:
для любого $i = 1, \ldots, n$ и любого $t \geq N$

$$u_i(t) = \Theta_{m_i}, \quad x_i(t) = \hat{x}_i.$$

Тогда неустойчивая система станет устойчивой:

$$\tilde{x}_i(t+1) = \tilde{x}_i(t) + \tilde{f}_i(\tilde{x}(t), \Theta), \qquad i = 1, \ldots, n, \quad t \in N_0 = \mathbf{N} + \{0\}, \quad \Theta = (\Theta_{m_1}, \ldots, \Theta_{m_n}). \tag{9}$$

5 Итеративное решение

Предположим, что для некоторого $t \in N_0$ задан вектор состояний $x_i(t) \in X_i, \quad i = 1, \ldots, n$. Пусть заданы начальные условия (7):

$$x_i(0) = x_{0i}, \quad x_{0i} \in X_i.$$

Для любого

$$u \in \prod_{j=1}^{n} R^{m_j}$$

определим систему уравнений:

$$x_i(u)(t+1) := x_i(t) + f_i(x(t), u), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{10}$$

$$x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)).$$

Введем **функцию выигрыша** $i-$ игрока:

$$a_i^t(u) := \| x_i(u)(t+1) - \hat{x}_i \|_2^2 + \| u_i \|_2^2, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{11}$$

Для любого $i = 1, \ldots n$

$$a_i^t(u) \in \prod_{j=1}^{n} R^{m_j} \to R_+ \tag{12}$$

Игроки связаны множеством

$$Z_t := \{u \in \prod_{j=1}^{n} U_j | x_i(u)(t+1) \in X_i, \quad \forall i = 1, \ldots, n\}. \tag{13}$$

Введем функцию сжатия:

$$\varphi_t(u) := \sum_{i=1}^{n} a_i^t(u), \quad u \in Z_t. \tag{14}$$

Задача: найти управление $u^t \in Z_t$, минимизирующее функцию φ_t:

$$\varphi_t(u^t) \leq \varphi_t(u), \quad \forall u \in Z_t. \tag{15}$$

Тогда управляемая система будет иметь следующий вид:

$$E_i(t+1) = E_i(t) + \sum_{j=1}^{n} em_{ij}(t)(M_j(t) + u_i(t)) \tag{16}$$

$$M_i(t+1) = M_i(t) + u_i(t) - \lambda_i(M_i(t) + u_i(t))[M_i^* - M_i(t) - u_i(t)]E_i(t),$$

для любого $i = 1, \ldots, n$ и $t \in N_0$.

Итак, пусть каждый игрок имеет управление:

$$u_i : N_0 \to R, \quad u_i \in U_i, \quad (i = 1, \ldots, n, \quad t \in N_0) \tag{17}$$

где U_i некоторое подмножество из R и при этом $0 \in U_i$.
Пусть $l_i = 2, \quad m_i = 1, \quad x_i = (E_i, M_i)$ для $i = 1, \ldots, n$.
Будем рассматривать функцию $f_i : R^{2n} \to R^2$ как правую часть системы (16), тогда (16) имеет форму (4), а (17) — (6).
Пусть $X_i = \{(E_i, M_i) \in R^2 | 0 \leq M_i \leq M_i^*\}$ и $x_{0i} = (E_{0i}, M_{0i})$ $i = 1, \ldots, n$.
Условия 1 и 2 раздела 4 выполнены.
Переформулируем задачу управления:
пусть дано $(\hat{E}, \Theta_n) \in R^{2n}$.
Найти:

1. такое управление $u^t : N_0 \to R, \quad \forall i = 1, \ldots, n,$
2. такое $N \in N_0$,

что для любого $i = 1, \ldots, n$ и любого $t \geq N$ выполнены условия:
(11), (12), (14), (15) и
$u_i^t(t) = 0, \quad (E_i(t), M_i(t)) = (\hat{E}_i, 0).$

6 Пошаговое кооперативное теоретико-игровое решение

Пусть для некоторого $t \in N_0$ задан $x_i(t) \in X_i, \quad i = 1, \dots, n$ и начальные условия $x_i(0) = x_{0i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad x_{0i} \in X_i$.
Для любого вектора управлений $u \in \prod_{j=1}^{n} R^{m_j}$ определим систему уравнений:

$$x_i(u)(t+1) := x_i(t) + f_i(x(t), u), \qquad i = 1, \dots, n, \tag{18}$$
$$x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)).$$

Определим **функцию выигрыша** (математическое ожидание выигрыша) каждого $i-$ игрока (игроки могут пытаться контролировать игру с помощью управлений из множеств U_i):

$$a_i^t(u) := \| x_i(u)(t+1) - \hat{x}_i \|_2^2 + \| u_i \|_2^2, \quad i = 1, \dots, n, \tag{19}$$

$$a_i^t(u) \in \prod_{j=1}^{n} R^{m_j} \to R_+$$

Игроки связаны множеством

$$Z_t := \{u \in \prod_{j=1}^{n} U_j | x_i(u)(t+1) \in X_i, \quad \forall i = 1, \dots, n\}. \tag{20}$$

Общая функция выигрыша:

$$\varphi_t(u) := \sum_{i=1}^{n} a_i^t(u), \quad u \in Z_t. \tag{21}$$

Задача: найти управление $u^t \in Z_t$, минимизирующее функцию φ_t:

$$\varphi_t(u^t) \le \varphi_t(u), \quad \forall u \in Z_t. \tag{22}$$

Пусть u^t — решение задачи.
Рассмотрим возможные случаи:

(a) $\varphi_t(u^t) = 0$
Тогда $u_i^t = \Theta_{m_i}$ и $x_i(u^t)(t+1) = \hat{x}_i$ для $i = 1, \dots, n$.
Если положить $N = t+1$ и задать вектор-функции управлений и вектор-функции состояний следующим образом:

$$u_i : N_0 \to R^{m_i}, \qquad i = 1, \dots, n,$$
$$u_i(s) = \begin{cases} u_i^s, & \text{для } s = 0, \dots, N-1, \\ \Theta_{m_i}, & \text{для } s \ge N; \end{cases}$$
$$x_i : N_0 \to R^{l_i}, \qquad i = 1, \dots, n,$$
$$x_i(0) = x_{0i},$$
$$u_i(s) = \begin{cases} x_i(u^{s-1})(s), & \text{для } s = 0, \dots, N-1, \\ \hat{x}_i, & \text{для } s \ge N. \end{cases}$$

то мы получим решение задачи управления.

(b) $\varphi_t(u^t) \geq 0$

Тогда положим

$$x_i(t+1) = x_i(u^t)(t+1) \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n$$

и будем решать задачу управления (22) для $t+1$ вместо t.

Взаимодействие игроков выражено следующей теоремой:
ТЕОРЕМА: Любое решение $u^t \in Z_t$ задачи (22) является **оптимальным по Парето**, т.е.: для любого $u \in Z_t$, такого, что

$$a_i^t(u) \leq a_i^t(u^t) \quad \text{для всех} \quad i = 1, \ldots, n \tag{23}$$

следует, что

$$a_i^t(u) = a_i^t(u^t), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{24}$$

Доказательство: Из условия (23) следует $\varphi_t(u) \leq \varphi_t(u^t)$, где φ_t — общая функция выигрыша (23). Отсюда в свою очередь следует, что $\varphi_t(u) = \varphi_t(u^t)$, т.к. u^t доставляет минимум функции φ_t. А это возможно лишь в том случае, если верно (24).

Данная теорема имеет *следствие*:
не существует таких $u \in Z_t$, удовлетворяющих (23) и $a_{i0}^t(u) < a_{i0}^t(u^t)$ хотя бы для одного $i0$.

Предположим, что функции f_i в системе разностных уравнений имеют вид:

$$f_i(x, u) = f_{0i}(x) + \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(x) u_j, \text{где} \tag{25}$$

$$f_{ij} \quad \text{— матричная функция} \quad l_i \times m_j \quad \text{и} \tag{26}$$

$$x \in \prod_{j=1}^{n} R^{l_j}, \quad u \in \prod_{j=1}^{n} R^{m_j} \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Пусть

$$U_i \quad \text{— выпуклое и компактное множество,}$$
$$X_i \quad \text{— выпуклое и замкнутое множество.}$$

Тогда для любого $t \geq N_0$ множество Z_t — допустимых управлений (20) будет выпуклым и компактным, если оно не пусто.

Общая функция выигрыша имеет вид:

$$\varphi_t(u) = \sum_{i=1}^{n} (\| \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(x(t)) u_j + f_{0i}(x(t)) + x_i(t) - \hat{x}_i \|_2^2 + \| u_i \|_2^2) \qquad \text{для любого} \quad u \in \prod_{j=1}^{n} R^{m_j}.$$

Она выпуклая и, следовательно, непрерывная.
Тогда для любого $t \in N_0$ существует единственное управление $u^t \in Z_t$ — удовлетворяющее (22), если Z_t не пусто.
Для любых $t \in N_0$ и $u^t \in Z_t$ определим:

$$\nabla_s \varphi_t(u) = (\frac{\partial \varphi_t}{\partial u_{s1}}(u), \ldots, \frac{\partial \varphi_t}{\partial u_{sm_s}}(u))$$

$$\frac{\partial \varphi_t}{\partial u_{sr}}(u) = 2\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{l_i}[\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_j}(f_{ij}(x(t))_{lk}u_{jk} + f_{0il}(x(t)) + x_{il}(t) - \hat{x}_{il})](f_{ij}(x(t))_{sr} + u_{sr})\}$$

для $r = 1, \ldots, m_s$ и $s = 1, \ldots, n$.

Тогда (22) можно переписать в эквивалентном виде:

$$\langle \nabla \varphi_t(u^t), u - u^t \rangle \geq 0 \qquad \forall u \in Z_t, \tag{27}$$

где $\langle , \rangle$ — скалярное произведение в $\prod_{j=1}^{n} R^{m_j}$.

в частности, если заданы множества

$$U_j = \{u_j \in R^{m_j} | \parallel u_j \parallel_2 \leq M_j\} \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$M_j > 0,$$

$$Z_t = \prod_{j=1}^{n} U_j,$$

то условие (27) будет эквивалентно

$$-\sum_{s=1}^{n}\langle \nabla_s \varphi_t(u^t), u_s^t \rangle \geq -\sum_{s=1}^{n} M_s \parallel \nabla_s \varphi_t(u^t) \parallel_2 .$$

Что в свою очередь означает:

$$u_s^t(s) = \begin{cases} \frac{M_s}{\|\nabla_s \varphi_t(u^t)\|_2} \nabla_s \varphi_t(u^t), & \text{для } \nabla_s \varphi_t(u^t) \neq \Theta_{m_s}, \\ \Theta_{m_i}, & \text{для } \nabla_s \varphi_t(u^t) = \Theta_{m_s}, \end{cases} \tag{28}$$

$s = 1, \ldots, n$.

Данное представление позволяет определить u^t с помощью итеративной процедуры.

Литература

1. *Pickl S.*(2000) Convex games and feasible sets in control theory.

2. *Pickl S., Weber G.-W.* (2001) Optimization of a time-discrete nonlinear dynamical system from a problem of ecology. An analitical and numerical approach.

3. *Krabs W., Pickl S.* (2003) Controllability of a time-discrete dynamical with the aid of the solution of an approximation problem.

4. *Krabs W., Pickl S.* (2003) Analisis, controllability and optimization of time discrete dynamical systems and games.

5. *Scheffran J., Pickl S.* (2000) Control and game-theoretical assesmant of climate change: options for Joint-Implementation.