

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет прикладной математики – процессов управления

С. А. КУТУЗОВ, М. А. МАРДАНОВА,
Л. П. ОСИПКОВ

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
МОДЕЛИРОВАНИЯ ГАЛАКТИК**

Санкт-Петербург
2012

УДК 524.7
М34

Рецензенты: д-р физ.-мат.наук, *В.В. Бобылев* (Пулково, ГАО РАН),
д-р физ.-мат.наук, проф. *В.В. Орлов* (С.-Петерб. гос.
ун-т)

*Печатается по постановлению Редакционно-издательского совета
факультета прикладной математики – процессов управления
Санкт-Петербургского государственного университета*

М34 **Математические методы моделирования галактик**/ Кутузов С.А., Марданова М.А., Осипков Л.П. — СПб.: «СОЛО», 2012. — 114 с.

ISBN 978-5-98340-266-9

В настоящем издании рассматриваются математические методы построения моделей звездных систем; обсуждаются гидродинамические модели Галактики, методы фотометрического моделирования галактик и некоторые принципиальные вопросы динамики галактик.

Книга предназначена для студентов и аспирантов, применяющих в своей работе методы прикладной математики, а также в задачах моделирования космических систем.

Библиогр. 192 назв. Ил. 7.

Ответственный редактор Марданова М.А.

© С.А. Кутузов, М.А. Марданова,
Л.П. Осипков, 2012

ISBN 978-5-98340-266-9

ПРЕДИСЛОВИЕ

Основным источником астрономических знаний являются наблюдения. В физике их в значительной степени заменили специально поставленные эксперименты. На основании наблюдений и экспериментов строится физическая модель изучаемого явления. Затем наступает очередь математического моделирования, позволяющего глубже и на количественном уровне установить связь между различными сторонами явления. В результате разработки математической модели делаются предсказания, которые проверяются новыми наблюдениями или экспериментами. В случае хорошего согласия можно заключить об адекватности модели. Напротив, расхождения заставляют пересмотреть исходную физическую модель и установить новые физические закономерности. В качестве примера можно напомнить длительное обсуждение проблемы «темного вещества» в скоплениях галактик. Не за горами его прямое обнаружение в результате микролинзирования.

Возможен и иной, дедуктивный путь развития физических теорий, частным случаем которого является применение метода математической гипотезы. Так, теория гравитации Эйнштейна (общая теория относительности) была разработана не для объяснения смещения перигелия Меркурия, как и альтернативные теории гравитации, большинство из которых оказалось несовместимыми с данными наблюдений. Космологическая постоянная была введена Эйнштейном в теорию без какого-либо «внешнего оправдания», и только сейчас ее необходимость получила серьезные наблюдательные подтверждения («темная энергия»).

Таким образом, математическое моделирование (аналитическое и численное) является необходимым этапом исследования любых естественных и искусственных объектов и процессов. Построение пространственно-кинематических моделей нашей Галактики и других звездных систем позволяет лучше понять их структуру и, в идеале, наметить сценарии их происхождения и эволюции. При этом выявляется связь с

такими фундаментальными проблемами современной физики, как «темная материя» и «темная энергия», унификация физических взаимодействий и т.п.

В Санкт-Петербургском (Ленинградском) государственном университете математическое моделирование галактик было начато в 1940–1950-ые гг. в работах К. Ф. Огородникова (1900–1985), основоположника отечественной школы динамики звездных систем, а затем его учеников Т. А. Агеяна (1913–2006) и В. А. Антонова (1933–2010). В настоящее время такие работы продолжаются на факультете прикладной математики–процессов управления на кафедре космических технологий и прикладной астродинамики, созданной в 2000 г. по инициативе В. И. Зубова (1930–2000). Заметим, что сам В. И. Зубов интересовался динамикой галактик и опубликовал статьи по некоторым вопросам динамической астрономии.

В данной книге рассматриваются различные стороны моделирования галактик. В написанной С. А. Кутузовым главе 1 «Гидродинамическое моделирование галактик» обсуждается построение гидродинамической модели Галактики, наиболее удобной для сравнения с данными наблюдений. Подробно рассматриваются те упрощающие предположения, которые приходится делать, чтобы получить замкнутую систему уравнений и приведены результаты решения этих уравнений. Подобные модели можно построить и для других галактик.

Одним из основных источников наблюдательных данных о галактиках являются результаты поверхностной фотометрии. В главе 2 «Моделирование галактик методами фотометрии», написанной М. А. Мардановой, излагаются основы фотометрии галактик – ряд понятий, методики, анализ результатов измерений (также в связи с проблемой их точности). Приводятся примеры стандартных моделей галактик, в том числе учитывающие эффекты поглощения света.

Некоторые принципиальные вопросы динамики звездных систем, с которыми приходится сталкиваться при моделировании галактик и звездных систем, обсуждаются в главе 3 «Принципиальные вопросы динамики галактик», написанной Л. П. Осипковым. В частности, рассматривается, как определять регулярные и иррегулярные силы в звездных системах, каково

логически последовательное выражение для классического времени релаксации. Обсуждается основная в звездной динамике теорема Джинса для случая, когда часть звездных орбит являются хаотическими. Анализируются принципиальные особенности статистической механики галактик.

Книга может использоваться как пособие к специальным курсам, читаемым на кафедре космических технологий и прикладной астродинамики. Она также может быть полезна студентам, аспирантам и научным работникам, интересующимся звездной астрономией.

Авторы благодарны рецензентам за ценные замечания.

ГЛАВА 1. ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГАЛАКТИКИ

1.1. Введение

В гидродинамике звездных систем абстрагируются от их дискретности. Системы считают сплошными телами с достаточно гладкой плотностью масс. Элементы среды движутся и обладают макроскопическими характеристиками, такими, например, как дисперсия скоростей (аналог температуры). В соответствующей математической модели среда описывается различными математическими функциями, которые принято называть функциями описания. Функции описания связаны математическими уравнениями.

Здесь рассматриваются гидродинамические дифференциальные уравнения в частных производных применительно к галактикам. Функции описания галактики считаются достаточно гладкими функциями, что применимо в тех областях, где существует элементарный макроскопический объем [7]. Покомпонентный вывод гидродинамических уравнений приводится в известной монографии Бинни и Тремейна [10]. Мы обрываем цепочку уравнений на моментах распределения скоростей третьего порядка. Распределение масс принимается стационарным и обладающим ротационной и зеркальной симметрией. В системе существуют два интеграла движения — энергии и площадей.

Для замыкания системы уравнений задаются правдоподобные свойства симметрии распределения остаточных скоростей. Дополнительно принимается гравитационный потенциал модели Кузмина [2], который допускает существование третьего интеграла движения. Для частного специального случая найдено численное решение системы уравнений, обладающее свойствами, наблюдаемыми у нашей Галактики.

1.2. Гидродинамические уравнения

Функции описания

Перечислим используемые функции описания и их обозначения.

Цилиндрические координаты и время: R, θ, z, t .
Потенциал и плотность массы: $\Phi(R, z), \varrho(R, z)$.
Галактоцентрические скорость звезды и скорость центроида,
остаточная скорость: $\mathbf{V}, \bar{\mathbf{V}}, \mathbf{v}$.
Тензоры смещения, дисперсии и асимметрии распределения
скоростей: $\mathbf{A}, \mathbf{S}, \mathbf{W}$.
Определение пространственно-кинематических характеристик:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} - \bar{\mathbf{V}}, \quad \mathbf{S} = \overline{\mathbf{v}\mathbf{v}}, \quad \mathbf{W} = \overline{\mathbf{v}\mathbf{v}\mathbf{v}}, \quad \mathbf{A} = (\nabla\bar{\mathbf{V}})^T.$$

Черта сверху означает осреднение в пространстве скоростей при фиксированных физических координатах, индекс Т — транспонирование. Скорость центроида представляет собой центральный момент, а тензоры дисперсии и асимметрии — начальные моменты плотности распределения скоростей.

Пользуясь оператором набла ∇ с эйлеровыми координатами и вводя субстанциональную производную

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla,$$

выпишем в тензорном виде

первые три гидродинамических уравнения

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\varrho}{dt} + \varrho \nabla \cdot \bar{\mathbf{V}} = 0, \\ \frac{d\bar{\mathbf{V}}}{dt} + \frac{1}{\varrho} \nabla \cdot (\varrho \mathbf{S}) = \nabla \Phi + \frac{\delta \bar{\mathbf{V}}}{\delta t}, \\ \frac{d\mathbf{S}}{dt} + 2(\mathbf{A}\mathbf{S})_s + \frac{1}{\varrho} \nabla \cdot (\varrho \mathbf{W}) = \frac{\delta \mathbf{S}}{\delta t}. \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Индекс s означает симметричную часть тензора, оператор $\delta/\delta t$ дает скорость изменения непосредственно за счет действия иррегулярных сил. Последние возникают, например, при сближениях звезд. Точка означает суммирование по двум индексам — индексу оператора набла и первому индексу тензора (обобщение скалярного произведения).

Вывод уравнений сразу в тензорном виде дается в работе [4]. Как и в [10], применяется умножение уравнения Больцмана (см.

[7]) на соответствующий тензор и интегрирование по пространству скоростей. Затем выполняется переход от центральных к начальным моментам плотности распределения скоростей.

Первое уравнение отражает сохранение массы (уравнение непрерывности), второе описывает движение центроида, третье — изменение тензора дисперсий скоростей. Тензору соответствует **эллипсоид скоростей**, который определяется уравнением с обратным тензором:

$$\mathbf{v}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{v} = 1. \quad (1.2)$$

Уравнения (1.1) могут относиться как к системе в целом, так и к взаимопроникающим подсистемам. Соответственно ρ будет глобальной либо парциальной плотностью. Однако потенциал Φ всегда является глобальным, то есть обусловленным притяжением всех подсистем.

1.3. Замыкание системы уравнений. I.

Предположения:

- A)** Отсутствуют иррегулярные силы.
- B)** Система стационарна.
- C)** Имеются ротационная (относительно оси z) и зеркальная (относительно плоскости $z = 0$) симметрии.

Благодаря **A)** во втором и третьем уравнениях (1.1) исчезают члены с оператором $\delta/\delta t$. По **B)** уравнение непрерывности обращается в тождество $0 = 0$. Согласно **C)** перейдем к цилиндрическим координатам. Все производные по θ , а также меридиональные компоненты скорости центроида \bar{V}_R , \bar{V}_z равны нулю. В компонентах получается 9 уравнений с 19 функциями: Φ , ρ , \bar{V}_θ , а также компоненты тензоров \mathbf{S} и \mathbf{W} :

$s_{RR} = \sigma_R^2$, $s_{R\theta}$, s_{Rz} , $s_{\theta\theta} = \sigma_\theta^2$, $s_{\theta z}$, $s_{zz} = \sigma_z^2$,
 w_{RRR} , $w_{RR\theta}$, w_{RRz} , $w_{R\theta\theta}$, $w_{R\theta z}$, w_{Rzz} , $w_{\theta\theta\theta}$, $w_{\theta\theta z}$, $w_{\theta zz}$, w_{zzz} .
 Диагональные элементы тензора \mathbf{S} представляют собой дисперсии соответствующих компонентов остаточных скоростей. В такой модели галактика может вращаться, но не сжимается и не расширяется. Эллипсоид скоростей (1.2) трехосный и имеет угол наклона χ к плоскости $v_z = 0$:

$$s_{Rz} = \tau(\sigma_R^2 - \sigma_z^2), \quad \tau = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\chi. \quad (1.3)$$

Рассмотрим суперпозицию конечного числа N гидродинамических моделей, каждая из которых описывает соответствующую подсистему галактики [7]. Номер парциального компонента обозначим n . Правила суперпозиции предложены в работе [4]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varrho = \sum_{n=1}^N \varrho_n, \quad \bar{\mathbf{V}} = \sum_{n=1}^N \nu_n \bar{\mathbf{V}}_n, \quad \nu_n = \frac{\varrho_n}{\varrho}, \\ \mathbf{S} = \sum_{n=1}^N \nu_n \mathbf{S}_n + \sum_{n=1}^N \nu_n (\Delta \bar{\mathbf{V}}_n \Delta \bar{\mathbf{V}}_n), \\ \mathbf{W} = \sum_{n=1}^N \nu_n \mathbf{W}_n + 3 \sum_{n=1}^N \nu_n (\Delta \bar{\mathbf{V}}_n \Delta \mathbf{S}_n)_s + \\ \quad + \sum_{n=1}^N \nu_n (\Delta \bar{\mathbf{V}}_n \Delta \bar{\mathbf{V}}_n \Delta \bar{\mathbf{V}}_n), \\ \Delta \bar{\mathbf{V}}_n = \bar{\mathbf{V}}_n - \bar{\mathbf{V}}, \quad \Delta \mathbf{S}_n = \mathbf{S}_n - \mathbf{S}. \end{array} \right.$$

Здесь индекс s означает симметричную часть тензора третьего ранга, то есть среднее арифметическое из шести тензоров, получаемых путем всевозможных перестановок индексов у компонентов.

Естественно предположить, что во всех подсистемах галактики, вращающихся с различными скоростями, распределение скоростей в любой точке пространства симметрично относительно трех взаимно перпендикулярных плоскостей. Это значит, что **D)** парциальные тензоры асимметрии равны нулю:

$$\mathbf{W}_n = \mathbf{0}.$$

Несмотря на это, тотальный тензор асимметрии отличен от нуля за счет разных скоростей вращения и тензоров дисперсий скоростей у подсистем. Дополнительно предположим, что

E) у парциальных эллипсоидов скоростей отсутствуют отклонение вертекса и крен. В силу предположений **D)** и **E)**

$$s_{R\theta} = s_{\theta z} = w_{RRR} = w_{RRz} = w_{Rzz} = w_{zzz} = w_{R\theta\theta} = w_{\theta\theta z} = 0.$$

Введем еще две динамических характеристики — P_0 и V_q :

$$\frac{\partial P_0}{\partial z} = R \varrho \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad V_q^2 = -R \frac{\partial \Phi}{\partial R}. \quad (1.4)$$

Обе определяются гравитационным полем, точнее — соответствующими компонентами градиента потенциала. Первую можно представить в виде

$$P_0 = R \varrho \sigma_0^2, \quad (1.5)$$

где σ_0^2 , имеющую размерность квадрата скорости, можно назвать *гравитационной дисперсией скоростей* (далее увидим, что в частном случае она совпадает с реальной дисперсией). Величину V_q назовем *квазикруговой скоростью*, так как в галактической плоскости $z = 0$ она совпадает с круговой скоростью V_c .

Для отличных от нуля девяти гидродинамических функций введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} U &= \bar{V}_\theta, & P_R &= R \varrho s_{RR}, & P_\theta &= R \varrho s_{\theta\theta}, & P_z &= R \varrho s_{zz}, \\ P &= R \varrho s_{Rz}, & Q_R &= R \varrho w_{RR\theta}, & Q_\theta &= R \varrho w_{\theta\theta\theta}, \\ Q_z &= R \varrho w_{\theta zz}, & Q &= R \varrho w_{R\theta z}. \end{aligned}$$

Из упомянутых выше (невывисанных) 9 уравнений с 19 функциями остается 4 уравнения с 11 функциями, так как вследствие упрощений 5 уравнений обращаются в тождества вида $0 = 0$:

$$\left\{ \begin{aligned} \varrho(V_q^2 - U^2) - \frac{P_\theta}{R} + \frac{\partial P_R}{\partial R} + \frac{\partial P}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial(P_z - P_0)}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial R} &= 0, \\ \left(\frac{U}{R} + \frac{\partial U}{\partial R} \right) P_R - 2 \frac{U}{R} P_\theta + P \frac{\partial U}{\partial z} + \\ &+ \frac{1}{R} \frac{\partial R Q_R}{\partial R} - \frac{Q_\theta}{R} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \\ \left(\frac{U}{R} + \frac{\partial U}{\partial R} \right) P + P_z \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial Q_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial R Q}{\partial R} &= 0. \end{aligned} \right. \quad (1.6)$$

При задании потенциала в этой нелинейной системе 4 уравнений остается 9 неизвестных функций:

$$U, P_R, P_\theta, P_z, P, Q_R, Q_\theta, Q_z, Q$$

Выпишем систему (1.6) еще раз для частного случая двусосного асимметричного распределения скоростей, которое соответствует существованию только двух интегралов движения — энергии и площадей. При этом $P_R = P_z = P_0$, $P = Q = 0$, $Q_R = Q_z = Q_0$, а система уравнений приобретает более простой вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varrho(V_q^2 - U^2) - \frac{P_\theta}{R} + \frac{\partial P_0}{\partial R} = 0, \\ \frac{\partial P_0}{\partial z} = R\varrho \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \\ \left(\frac{U}{R} + \frac{\partial U}{\partial R} \right) P_0 - 2\frac{U}{R}P_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial RQ_0}{\partial R} - \frac{Q_\theta}{R} = 0, \\ P_0 \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial Q_0}{\partial z} = 0. \end{array} \right. \quad (1.7)$$

В системе остается 5 функций: $U, P_0, P_\theta, Q_0, Q_\theta$.

Вместо второго уравнения, которое обратилось в тождество $0 = 0$, здесь переписано первое уравнение (1.4). Оно имеет решение

$$P_0(R, z) = R \int_z^\infty \varrho(R, z') \frac{\partial \Phi(R, z')}{\partial z'} dz'. \quad (1.8)$$

Возможная аддитивная функция от R в силу условия $\sigma_0 = 0$ при $|z| = \infty$, которое должно выполняться для любого R , тождественно равняется нулю.

1.4. Скорость вращения

Функции $U(R, z)$ и

$$\omega(R, z) = \frac{U(R, z)}{R}$$

представляют собой линейную и угловую скорости вращения. В случае симметричного двусосного распределения остаточных скоростей в галактической плоскости третьему уравнению (1.6) можно придать двоякий вид:

$$\frac{dU(R, 0)}{dR} = (2k - 1) \frac{U(R, 0)}{R}, \quad R \frac{d\omega(R, 0)}{dR} = 2(k - 1)\omega(R, 0), \quad (1.9)$$

где k есть отношение трансверсальной дисперсии к радиальной

$$k = \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_R^2} = \frac{P_\theta}{P_R}. \quad (1.10)$$

Отсюда видно, что твердотельное вращение возможно при круговом распределении скоростей с $k = 1$, что естественно в ядре галактики. При $k \approx 1/2$ получается почти плоская кривая вращения. Но для плоских подсистем Галактики это значение как раз и реализуется в окрестности Солнца [9]! Таким образом, вовсе не обязательно объяснять плоские кривые вращения притяжением темной материи, находящейся в коронах галактик. Кстати сказать, эти объяснения обычно связаны с тем, что скорость вращения U путают с круговой скоростью V_c . Как следует из первого уравнения (1.6), это совершенно разные функции. Впрочем, они совпадают в галактической плоскости, если отсутствуют дисперсии скоростей, либо сумма второго и третьего членов равна нулю, что при постоянном k дает зависимость

$$P_R(R, 0) = C_1 R^k, \quad C_1 = \text{const} > 0.$$

При постоянном k и первое уравнение (1.9) имеет простое решение:

$$U(R, 0) = C_2 R^{2k-1}, \quad C_2 = \text{const} > 0.$$

Более общее уравнение для скорости вращения в галактической плоскости получим, исключив из первого и третьего уравнений (1.6) функцию P_θ :

$$P_R \frac{dU}{dR} + 2\varrho U^3 + \left[\frac{P_R}{R} - 2 \frac{dP_R}{dR} - 2 \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)_{z=0} - 2\varrho V_c^2 \right] U + \left[\frac{1}{R} \frac{dRQ_R}{dR} - \frac{Q_\theta}{R} + \left(\frac{\partial Q}{\partial z} \right)_{z=0} \right] = 0.$$

Это нелинейное дифференциальное уравнение Абеля первого порядка, которым он занимался в связи с исследованиями по теории эллиптических функций. Чтобы решать его относительно U , необходимо задать потенциал, два элемента тензора дисперсии скоростей и три элемента тензора асимметрии. Ниже будет показано, как задавалась функция $U(R, z)$ для численного решения системы уравнений.

1.5. Замыкание системы уравнений. II.

Шаги по замыканию системы уравнений в п. 1.2 выполнялись путем уменьшения количества неизвестных функций. Здесь же мы попытаемся задать дополнительные, не зависящие от гидродинамических уравнений, связи между функциями, увеличивая тем самым количество уравнений.

Для описания формы эллипсоида скоростей наряду с k (1.10) используют также отношение l и его выражение через k

$$l = \frac{\sigma_R^2}{\sigma_z^2} = \frac{P_R}{P_z}, \quad l = 1 + \frac{1}{k}. \quad (1.11)$$

Последнее Кузмин [3] вывел в теории иррегулярных сил. Оно хорошо удовлетворяет наблюдательным данным в окрестности Солнца.

Предположим еще, что

F) усредненный по остаточной скорости v_θ эллипс скоростей в меридиональной плоскости подобен меридианальному сечению эллипсоида скоростей. Это дает два дополнительных соотношения:

$$\frac{Q_z}{Q_R} = \frac{P_z}{P_R}, \quad \frac{Q}{Q_R} = \frac{P}{P_R}. \quad (1.12)$$

Выразим приближенно смешанный момент P через P_θ , пользуясь третьим и четвертым уравнениями (1.6) для симметричного случая. Принимая обозначение параметра Оорта B [7], и используя связь (1.3), получаем

$$\begin{aligned} P &= \lambda \tau P_\theta, & \lambda &= \frac{2\omega L}{-2BL + \tau(4B^2 - L^2)}, \\ B &= -\frac{1}{2} \left(\frac{U}{R} + \frac{\partial U}{\partial R} \right), & L &= -\frac{\partial U}{\partial z}, & \omega &= \frac{U}{R}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

При заданных U , τ это дополнительное уравнение может использоваться для вычисления первого приближения.

Таким образом, в рамках своих предположений могут использоваться уравнения (1.3) — при заданном τ , (1.12), (1.10) — при заданном k , (1.11) — при заданном l , (1.13) — при заданных U , τ . Разумеется, задания должны быть независимы друг от друга. В алгоритме решения возможны варианты.

1.6. Модель гравитационного поля

Принимаем модель Кузмина с параметром $n = 3$ [2], допускающую трехосное распределение скоростей с наклоном эллипсоида скоростей χ к галактической плоскости. Потенциал имеет вид

$$\Phi(\check{R}, \check{z}) = \Phi_0 \varphi(\check{R}, \check{z}), \quad \varphi(\check{R}, \check{z}) = \left[\check{R}^2 + (1+q)^2 \right]^{-1/2},$$

$$q = \left[\varepsilon^2 + (1 - \varepsilon^2)^{-1} (\varepsilon^2 \check{R}^2 + \check{z}^2) \right]^{1/2},$$

где φ — безразмерный потенциал, дужками сверху отмечены безразмерные координаты, $\varepsilon \in [0, 1]$ — безразмерный структурный параметр (в оригинале ζ_0). Для перехода к размерным величинам следует пользоваться единицами длины, потенциала и плотности

$$\left\{ \begin{array}{l} r_0 = (1 - \varepsilon^2)^{-1} z_0, \\ \Phi_0 = \frac{GM}{z_0} (1 - \varepsilon^2)^{1/2}, \\ \varrho_0 = \frac{M}{4\pi z_0^3} \varepsilon^2 (1 - \varepsilon^2)^{3/2}, \end{array} \right.$$

где z_0 — параметр с размерностью длины, G — гравитационная постоянная и M — масса модели. Безразмерная плотность масс изящно выражается через \check{R} и φ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \check{\varrho}(\check{R}, \varphi) = \varphi^4 (y^{-4} + \varphi y^{-2} + y^{-1}), \\ y = \left(1 - \check{R}^2 \varphi^2 \right)^{1/2} - \varphi = q\varphi. \end{array} \right. \quad (1.14)$$

Несложно и выражение для квазикруговой скорости

$$V_q = \Phi_0^{1/2} v, \quad v^2 = \frac{\check{R}^2 \varphi^3}{1 - \varepsilon^2} \frac{p}{q}, \quad p = \varepsilon^2 + q. \quad (1.15)$$

Для параметров модели Галактики мы приняли следующие значения:

$$\varepsilon = 0.056, \quad z_0 = 4.4 \text{ кпк}, \quad M = 1.3 \cdot 10^{11} M_\odot.$$

Этому соответствуют следующие расстояние Солнца от центра Галактики и околосолнечная круговая скорость

$$R_\odot = 8.8 \text{ кпк}, \quad V_\odot = 208 \text{ км/с}.$$

Заметим, что современные оценки глобальных параметров Галактики имеют значительный разброс. Значение массы сильно зависит от модели, в частности от учета гипотетической темной материи. В книгах [9], [10], [8] соответственно приводятся оценки

$$M = [7, 4.6, 5.6] \cdot 10^{11} M_\odot.$$

Несмотря на многочисленные попытки оценить расстояние Солнца от центра Галактики, оно известно с незначительной точностью. Вышеперечисленные авторы придерживаются значений

$$R_\odot = [8, 8.5, 7.7] \text{ кпк}.$$

Для околосолнечной круговой скорости у тех же авторов можно найти оценки

$$V_\odot = [218, 220, 237] \text{ км/с}.$$

В свете сказанного можно считать, что наша модель Галактики годится как иллюстративный пример, дающий правдоподобный ход вычисленных функций описания.

В связи с тем, что выражения для плотности (1.14) и для квазикруговой скорости (1.15) получены как функции расстояния от оси симметрии и потенциала, целесообразно перейти от переменных R, z к R, Φ . Операторы дифференцирования связаны

следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial R} = \left(\frac{\partial}{\partial R} \right)_{\Phi} + \frac{\partial \Phi}{\partial R} \left(\frac{\partial}{\partial \Phi} \right)_R, \\ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial \Phi} \right)_R \end{cases}$$

В новых переменных второе уравнение системы (1.7) (оно же первое в (1.4)) при использовании выражения (1.5) переходит в уравнение

$$\left[\frac{\partial(\varrho \sigma_0^2)}{\partial \Phi} \right]_R = \varrho. \quad (1.16)$$

Первое же уравнение системы (1.7) принимает вид

$$\overline{V_\theta^2} = \frac{1}{\varrho} \left[\frac{\partial P_0}{\partial R} \right]_{\Phi}, \quad (1.17)$$

где, по определению, среднее квадрата трансверсальной скорости есть сумма квадрата скорости вращения и трансверсальной дисперсии:

$$\overline{V_\theta^2} = U^2 + \sigma_\theta^2.$$

Согласно уравнению (1.16), вместо интеграла (1.8) для нахождения σ_0 воспользуемся более простым интегралом

$$\check{\varrho}(\check{R}, \varphi) \sigma_0^2 = \Phi_0 \int_0^\varphi \check{\varrho}(\check{R}, \varphi') d\varphi'.$$

Переходя к переменной интегрирования

$$q = \sqrt{\varphi^{-2} - \check{R}^2} - 1,$$

будем иметь интеграл от рациональной функции. Воспользовавшись методом Остроградского выделения рациональной части интеграла и возвратившись к переменной φ' , найдем конечное

аналитическое выражение в элементарных функциях [5]:

$$\begin{aligned} \check{\rho}\sigma_0^2 = & \frac{\Phi_0}{8\check{R}^2x^4} \left[\left(2(1 + 12\check{R}^2 - \check{R}^4)\varphi - 2\check{R}^2x^2\varphi^3 - \right. \right. \\ & - \left. \left[1 + 16\check{R}^2 - 9\check{R}^4 + (1 + 3\check{R}^2)x^2\varphi^2 - 2\check{R}^2x^3\varphi^4 \right] (\varphi + y) \right) \frac{x\varphi}{y^2} + \\ & \left. + (1 + \check{R}^2 + 39\check{R}^4 - 9\check{R}^6) \frac{\arcsin(\check{R}\varphi)}{\check{R}} - 16\check{R}^2(1 - 2\check{R}^2) \ln y \right], \\ x = 1 + \check{R}^2, \quad y = & \left(1 - \check{R}^2\varphi^2 \right)^{1/2} - \varphi = q\varphi. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Чтобы найти правую часть (1.17), умножим (1.18) на $R\varrho_0$ и продифференцируем по \check{R} при фиксированном φ :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial P_0}{\partial R} \right)_{\Phi} = & \frac{\varrho_0\Phi_0}{4\check{R}^2x^5} \left[\left(1 - 4\check{R}^2 + 73\check{R}^4 - 18\check{R}^6 + \right. \right. \\ & + (3 - 4\check{R}^2 + 103\check{R}^4 - 58\check{R}^6 + 24\check{R}^8)\varphi^2 + \check{R}^2(1 - 2\check{R}^2)x^3\varphi^4 - \\ & - \left. \left[(3 - 8\check{R}^2 + 167\check{R}^4 - 14\check{R}^6)\varphi + \right. \right. \\ & \left. \left. + (1 - 2\check{R}^2)x^3\varphi^3 + 2\check{R}^2x^4\varphi^5 \right] (\varphi + y) \right) \frac{x\varphi}{y^3} + \\ & + (1 + 5\check{R}^2 - 35\check{R}^4 + 135\check{R}^6 - 18\check{R}^8) \frac{\arcsin(\check{R}\varphi)}{\check{R}} - \\ & \left. - 8\check{R}^2(1 - 13\check{R}^2 + 10\check{R}^4) \ln y \right]. \end{aligned}$$

1.7. Алгоритм решения системы уравнений

Первый этап

Принимается частный случай двусосного асимметричного распределения скоростей, в котором $P_R = P_z = P_0$, $P = Q = 0$, $Q_R = Q_z = Q_0$, а система уравнений имеет вид (1.7).

Задаем скорость вращения простейшим способом —

$$U(R, z) = cV_q(R, z), \quad c = \text{const} \in (0, 1)$$

и из первого уравнения (1.7) находим \hat{P}_θ :

$$\hat{P}_\theta = R_\varrho (H_0^2 - U^2), \quad H_0^2 = V_q^2 + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial P_0}{\partial R}. \quad (1.19)$$

Далее, интегрируя последнее уравнение (1.7), получаем

$$Q_0 = - \int_z^\infty L P_0 dz' = -U P_0 + R \int_0^\Phi U_\varrho d\Phi', \quad L = - \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Аддитивная функция от R есть тождественный нуль. Во втором звене произведено интегрирование по частям, затем использовано второе уравнение (1.7) и сделана замена переменной z' на Φ' . Наконец, из третьего уравнения (1.7) получается \hat{Q}_θ :

$$\hat{Q}_\theta = -2RB - 2U\hat{P}_\theta + \frac{\partial(RQ_0)}{\partial R}.$$

Найдены U , P_0 , \hat{P}_θ , \hat{Q}_θ . Вычисления проводились для двух примеров с $c = 0$ и $c = 1/2$. В случае невращающейся системы асимметрия, естественно, отсутствует, а равновесие обеспечивается за счет большего "давления" — значительно возрастают дисперсии скоростей.

Второй этап

Задав U (способ задания опишем позже), мы должны найти 8 функций P_R , P_θ , P_z , P , Q_R , Q_θ , Q_z , Q . Находим следующие приближения на основе начальных, которые дал первый этап. Вначале определим функции, основанные на элементах тензора дисперсии скоростей. Используем приближенное уравнение (1.13), где остался неопределенным параметр τ . В моделях, допускающих третий квадратичный интеграл движения, Кузминым [1] получено выражение

$$\tau = \frac{Rz}{R^2 - z^2 + z_0^2},$$

в котором z_0 — масштабный параметр потенциала, имеющий размерность длины. Теперь

$$P = \lambda\tau\hat{P}_\theta. \quad (1.20)$$

Интегрируя второе уравнение (1.6), получаем

$$P_z = P_0 + \int_z^\infty \frac{\partial P}{\partial R} dz'.$$

Согласно уравнениям (1.3) и (1.20), имеем

$$P_R = \frac{1}{\tau} P + P_z = \lambda \hat{P}_\theta + P_z.$$

На основе разности первых уравнений (1.6) и (1.7) находим

$$P_\theta = \hat{P}_\theta + R \frac{\partial(P_R - P_0)}{\partial R} + R \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Далее определим функции, основанные на элементах тензора асимметрии скоростей на основе найденных на первом этапе функций \hat{Q}_θ , $\hat{Q}_z = Q_0$, $\hat{Q} = 0$. Сначала интегрируем разность последних уравнений (1.6) и (1.7):

$$\tilde{Q}_z = \hat{Q}_z - \int_z^\infty [L(P_z - P_0) + 2BP] dz'.$$

Это позволяет с помощью (1.12) найти новые приближения \tilde{Q}_R и \tilde{Q} . Подставив выражение для \tilde{Q} в проинтегрированное последнее уравнение (1.6)

$$Q_z = \tilde{Q}_z + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \int_z^\infty \tilde{Q} dz' \right),$$

получим следующее приближение функции Q_z . Эти шаги можно повторять. Найденное таким образом Q_z даст с помощью (1.12) окончательные значения для Q_R и Q .

Новое приближение для Q_θ получается с помощью разности третьего уравнения (1.6) с $Q = 0$ и третьего уравнения (1.7):

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_\theta &= \hat{Q}_\theta - 2RB(P_R - P_0) - 2U(P_\theta - \hat{P}_\theta) - \\ &- RLP + \frac{\partial}{\partial R} \left[R(\tilde{Q}_R - \hat{Q}_z) \right]. \end{aligned}$$

Наконец, следующее приближение, которое учитывает окончательное значение Q , найдем с помощью полного третьего уравнения (1.6):

$$Q_\theta = \tilde{Q}_\theta + \frac{\partial}{\partial R} \left[R(Q_R - \tilde{Q}_R) \right] + R \frac{\partial Q}{\partial z}.$$

Итак, на втором этапе найдены $P_R, P_\theta, P_z, P, Q_R, Q_\theta, Q_z, Q$. Новые приближения можно находить методом итерации.

Рассмотрим задание скорости вращения U . С полдюжины вариантов привели к некорректным результатам — диагональные элементы тензора дисперсии скоростей оказались в отдельных областях отрицательными. Приведем наиболее удачный вариант. Скорость вращения задается с помощью первого уравнения (1.6), которое записывается в виде:

$$U^2 + \sigma_\theta^2 = H^2, \quad H^2 = V_q^2 + \frac{1}{\varrho} \left(\frac{\partial P_R}{\partial R} + \frac{\partial P}{\partial z} \right). \quad (1.21)$$

В случае двусосного распределения

$$H = H_0, \quad H_0^2 = \frac{1}{\varrho} \left(\frac{\partial P_0}{\partial R} \right)_\Phi.$$

Это то же самое выражение, что и в уравнении (1.19), так как здесь производная по R берется при постоянном Φ . Для скорости вращения принимается выражение

$$\begin{aligned} U(R, z) &= \eta \min [V_q(R, z), H(R, z)], \\ \eta &= a + (b - a)\xi^2(3 - 2\xi), \\ \xi &= \frac{R}{r_0 + R} \in [0, 1), \quad a \leq b \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Здесь r_0 — масштабный параметр с размерностью длины. После минимизации выполняется сглаживание — каждое значение функции заменяется средне-взвешенным соседних по координатам значений. Выбор (1.21) и (1.22) обеспечивает неотрицательность вычисляемых значений P_θ .

1.8. Результаты

На рис. 1.1 изображена зависимость полученной описанным способом скорости вращения $U(R, z)$, обозначенной U_0, U_1, U_2 , и квазициркулярной скорости V_q (V_0, V_1, V_2) от R для трех фиксированных значений $z = 0, 0.84, 7.85$ кпк. Характерно плато в интервале R от 10 до 30 кпк. Плато и максимум квазициркулярной скорости приходятся на внешнюю область системы, где пространственная плотность незначительна. Представлен также ход экваториальной плотности в единицах центральной плотности. В основном теле системы до 3 кпк вращение

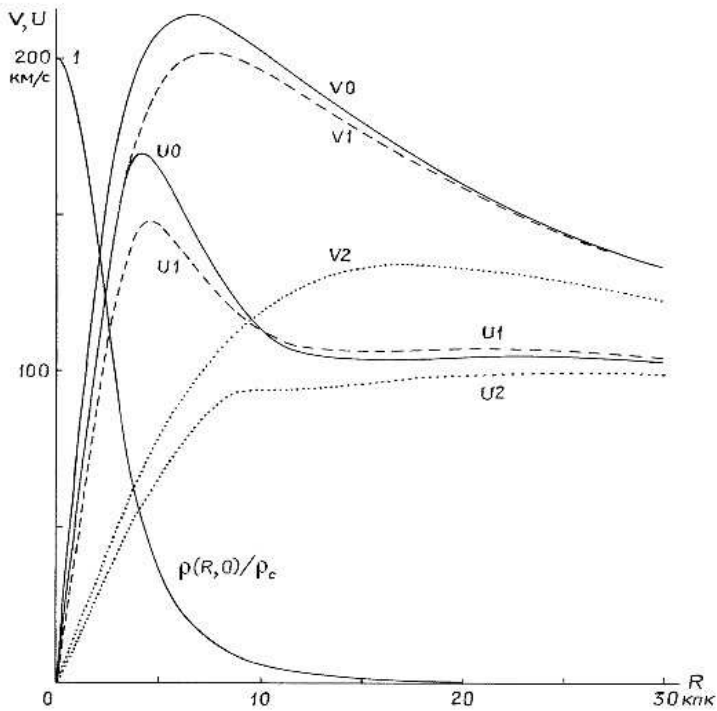


Рис. 1.1. Квазициркулярная скорость, скорость вращения и плотность. практически твердотельно. Максимум скорости вращения вблизи

галактической плоскости расположен вдвое ближе к центру, чем максимум квазикруговой скорости. Подчеркнем, что скорость вращения относится к системе в целом, а не к какой-либо ее подсистеме. С данной скоростью вращения был рассчитан трехосный случай с асимметрией. При этом значения смешанного

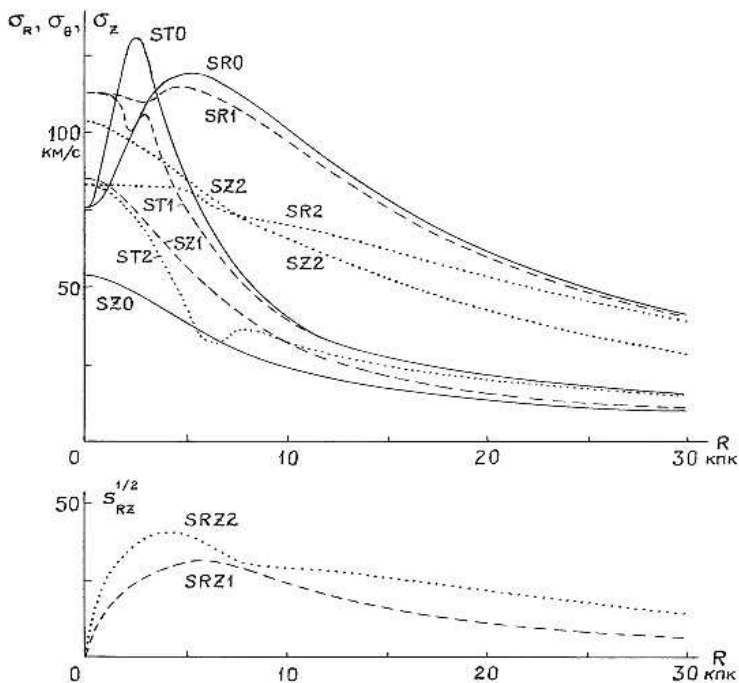


Рис. 1.2. Квадратные корни элементов тензора дисперсии

момента P вычислялись один раз по формуле (1.20) для избегания итераций, которые не всегда сходятся. Итерации же по вычлениению элементов тензора асимметрии сходятся хорошо.

На рис. 1.2 изображены графики квадратных корней элементов тензора дисперсий скоростей, а именно σ_R — (SR0, SR1, SR2), σ_θ — (ST0, ST1, ST2), σ_z — (SZ0, SZ1, SZ2), $\sqrt{\sigma_{Rz}}$ — (SRZ0, SRZ1, SRZ2).

Все они относятся к тем же значениям $z = 0, 0.84, 7.85$ кпк.

Эллипсоид скоростей достигает наибольших размеров

на значительном удалении (около 1 кпк) от галактической плоскости. В R -направлении основное тело системы практически изотермично. Только трансверсальная дисперсия в галактической плоскости вначале (до 2.5 кпк) возрастает, а затем довольно быстро спадает. В интервале R от 1.5 до 3.5 кпк $\sigma_R < \sigma_\theta$, что естественно для тотальных дисперсий в системе, которая состоит из подсистем, вращающихся с различными скоростями.

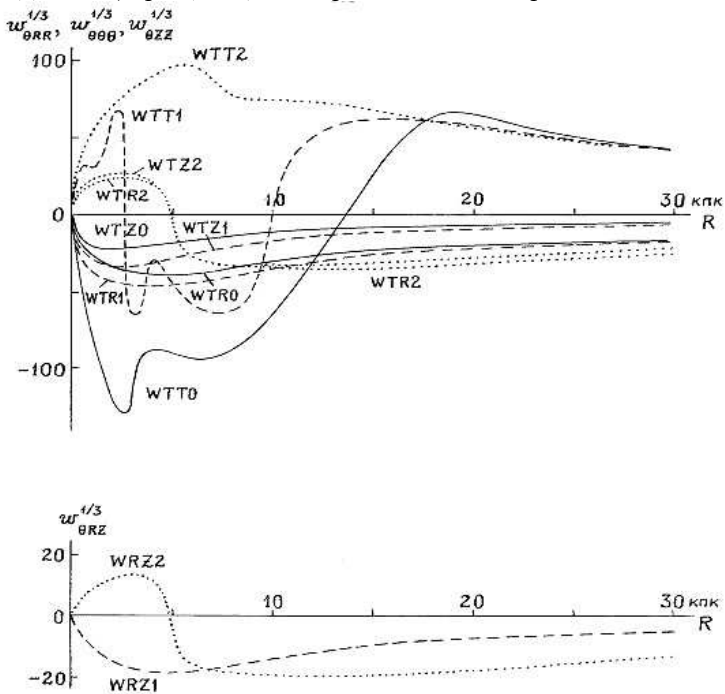


Рис. 1.3. Кубические корни элементов тензора асимметрии скоростей

Рис. 1.3 дает ход с R кубических корней компонентов тензора асимметрии:

- $ww_{\theta RR}^{1/3} - (WTR0, WTR1, WTR2),$
- $ww_{\theta\theta\theta}^{1/3} - (WTT0, WTT1, WTT2),$
- $ww_{\theta zz}^{1/3} - (WTZ0, WTZ1, WTZ2),$
- $ww_{\theta Rz}^{1/3} - (WRZ0, WRZ1, WRZ2)$

при тех же значениях $z = 0, 0.84, 7.85$ кпк.

Элементы тензора асимметрии очень чувствительны к изменению скорости вращения и имеют весьма причудливую зависимость. Однако в окрестности Солнца отрицательный знак Q_θ все же совпадает с наблюдаемым [9]. Это соответствует известной асимметрии Стремберга. Любопытно, что решение предсказывает возможность изменения знака Q_θ — вблизи галактической плоскости на периферии быстрее вращаются подсистемы с большей дисперсией скоростей. Однако следует иметь в виду, что демонстрируемое решение не ставило целью получить количественную аппроксимацию. Его надо рассматривать как качественную иллюстрацию.

1.9. Заключение

Неизбежный обрыв системы гидродинамических уравнений здесь выполнен на уравнениях с моментами третьего порядка. Расширение системы не имеет смысла, так как достоверных выборок для моментов четвертого и более высокого порядка практически не существует и невозможно сравнение с наблюдательными данными.

Известная проблема замыкания системы решается ценой отбрасывания ряда функций описания и введения дополнительных более или менее правдоподобных связей между функциями. Многообразие такого подхода велико.

Способы численного решения системы уравнений также многочисленны. Тем не менее удастся получить интересные свойства модели и новые следствия из уравнений. Особый интерес представляет скорость вращения галактики.

В дальнейшем представляется целесообразным построить составную гидродинамическую модель Галактики, учитывая известные по наблюдениям свойства ее подсистем.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 1

1. *Кузмин Г. Г.* Третий интеграл движения звезд и динамика стационарной Галактики // Публ. Тартуск. астрон. обсерв. 1953. Т. 32, С. 332 – 368.
2. *Кузмин Г. Г.* Модель стационарной Галактики, допускающая трехосное распределение скоростей // Астрон. журн. 1956. Т. 33. С. 27 – 45.
3. *Кузмин Г. Г.* Об изменении дисперсии скоростей звезд // Публ. Тартуск. астрофиз. обсерв. 1961. Т. 33, С. 351 – 370.
4. *Кутузов С. А.* Уравнения для определения системы околосолнечных галактических параметров // Тарту сообщ. 1964. № 9. С. 1 – 24.
5. *Кутузов С. А.* Стационарная фазовая модель галактики, состоящая из диска и гало // Динамика гравитир. систем и методы аналитич. небесной механики. Алма-Ата: Наука, 1987. С. 31 – 33.
6. *Кутузов С. А.* Стационарная гидродинамическая модель Галактики с заданным гравитационным полем // Устойчивость и процессы управления. Всероссийская конференция, посвященная 80-летию со дня рождения В.И.Зубова. Санкт-Петербург, 1 – 2 июля 2010 г. — СПб: ВВМ, 2010. С. 73 – 74.
7. *Огородников К. Ф.* Динамика звездных систем. М.: Физматгиз. 1958. 628 с.
8. Allen's Astrophysical Quantities *Cox A. N.*, editor. 4th ed. New York: Springer, 2000. 719 pp.
9. *Binney J. and Merrifield M.* Galactic Astronomy. Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1998. XII, 797 pp.
10. *Binney J., Tremaine S.* Galactic Dynamics. Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1987. XV, 733 pp.

ГЛАВА 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ГАЛАКТИК МЕТОДАМИ ФОТОМЕТРИИ

2.1. Введение

Фотометрия – это раздел физической оптики, в котором рассматриваются энергетические характеристики оптического излучения в процессах его испускания, распространения и взаимодействия с веществом. Основным энергетическим понятием фотометрии является поток излучения, имеющий физический смысл мощности, переносимой электромагнитным излучением. Измерение светового потока дает основную информацию о звездах, галактиках, туманностях и других астрономических объектах. Первая в истории астрономии фотометрическая работа – разделение видимых невооруженным глазом звезд на 6 классов (6 звездных величин) – была выполнена Гиппархом во II в. до н.э. Так сложилось, что человеческий глаз был первым и единственным светоприемником до середины XIX века, когда была создана фотопластинка. Но основоположником экспериментальной фотометрии следует считать французского физика П. Бугера, предложившего в 1729 визуальный метод количественного сравнения источников света – установления (путём изменения расстояний до источников) равенства освещённостей соседних поверхностей с использованием в качестве прибора глаза. В зависимости от используемых методов измерения фотометрических величин фотометрию условно делят на визуальную, фотографическую, фотоэлектрическую и т.д.

2.2. Основные физические величины фотометрии

Прежде всего нужно дать определение тем величинам, которые применяют в измерительной практике. Если изучается распределение яркости без связи с какими-либо абсолютными стандартами, тогда речь идет об относительной фотометрии. Для яркости дадим два определения, первое используется в физике, второе в астрономии.

Первое: *яркость* – это поверхностная плотность силы излу-

чения в заданном направлении, равная отношению интенсивности света к площади проекции светящейся поверхности на поверхность, перпендикулярную к этому направлению. В международной системе единиц яркость измеряется в нитах и стильбах. 1 нит – яркость поверхности, 1 м^2 которой излучает в перпендикулярном к ней направлении в пределах телесного угла 1 стерадиан поток, равный 1 люмену. Стильб (сокращенно сб) определяется аналогично, но для площади излучающей поверхности 1 см^2 .

Яркость излучающей поверхности в астрономии определяется так же, как и в физике. Это понятие применимо только для протяженных (неточечных) источников, поскольку в ней присутствует площадь излучающей поверхности.

Второе определение: *яркость* объекта в данном направлении определяется как энергия, излучаемая в единицу времени внутри единичного телесного угла элементом поверхности, проекция которого на перпендикулярную выбранному направлению плоскость имеет единичную площадь. Для протяженных объектов (галактик, туманностей и т.п.) определяемую таким образом яркость часто называют *поверхностной яркостью*.

Во внегалактической астрономии поверхностная яркость обычно измеряется видимой звездной величиной поверхности площадью в 1 кв. сек. дуги. Яркость, выраженная в таких единицах обозначается как μ . Согласно определению шкалы звездных величин, связь μ и B дается как

$$\mu = -2.5 \lg B + \text{const.}$$

Поверхностную яркость в астрономии также измеряют в светимостях Солнца с площади в 1 квадратный парсек (пк^2). Такая яркость связана с μ следующим образом:

$$B = (206265)^2 \cdot 10^{0.4(M_{\odot} - \mu - 5)} = 4.255 \cdot 10^8 \cdot 10^{0.4(M_{\odot} - \mu)},$$

где M_{\odot} – абсолютная звездная величина Солнца в соответствующей цветовой полосе. Яркость ночного неба составляет $m_V \approx 21.6c^2$, т.е. $2 \cdot 10^{-4}$ нит. Поверхностную фотометрию можно назвать одним из самых старых методов исследования в современной астрономии. Одна из первых успешных работ в области изучения распределения поверхностной

яркости принадлежит Рейнольдсу. Это было исследование туманности Андромеды М31, проведенное в 10-ых годах прошлого столетия. Ее спиральная структура была обнаружена еще в 1888 году Робертсом; Рейнольдс вывел закон распределения яркости для ее центральной области, в пределах $6'$ от ядра:

$$B(r) = \text{const}/(r + 1)^2.$$

Впоследствии эта формула была использована Хабблом для ряда эллиптических галактик; он рассчитал, что их фотометрические профили, измеренные вдоль большой и малой осей, могут быть представлены некоторой общей формулой вида:

$$B(r) = \frac{B_0}{(r + a)^2}$$

или, ее еще можно записать так:

$$\lg \frac{B}{B_0} = -2 \lg \left(\frac{r}{a} + 1 \right), \quad (2.1)$$

где B_0 – центральная поверхностная яркость, a – некоторый масштабный параметр. Таким образом, для описания наблюдаемого распределения яркости здесь два независимых параметра. В выборке Хаббла для 15 эллиптических галактик значения параметра a были заключены в пределах от 2 до $10''$. Среднее распределение поверхностной яркости для этих 15 объектов очень точно представляется формулой (2.1) до $r/a \approx 15$ и с удовлетворительной точностью до $r/a \approx 30$. Формула не удовлетворяется при $r/a < 0.3$ и неприменима при $r = 0$.

Кроме Рейнольдса и Хаббла также можно упомянуть Редмана и Ширли, которые в 40-ых годах XX века выявили и проанализировали некоторые из основных источников систематических и случайных ошибок в фотометрических исследованиях [4].

Морфологические исследования галактик (т.е. различение их по внешним формам) производились несколькими исследователями, но наиболее известны классификации галактик по типам, сделанные Хабблом и Вокулером, которого считают по праву основателем поверхностной фотометрии в ее современном виде.

Итак, основным источником информации для исследований в астрономии являются космические излучения. Видимый нами свет является частным видом электромагнитного излучения, которое испускается не непрерывно, а отдельными порциями («квантами»), характеризующимися своей энергией. Совокупность всех видов излучения называется спектром электромагнитного излучения. За единицу измерения энергии квантов обычно принимается электрон-вольт [эВ].

Электрон-вольт – это энергия, которую приобретает свободный электрон (т.е. электрический заряд ($1.602 \cdot 10^{-19} \text{К} = 4.803 \cdot 10^{-10}$ единиц СГСЭ), ускоренный энергетическим полем с разностью потенциалов в 1 вольт [В] = $1/300$ СГСЭ). Поэтому $1 \text{эВ} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{Дж} = 1.602 \cdot 10^{-12} \text{эрг}$.

Кванты видимого света (фотоны) обладают энергией 2-3эВ и занимают лишь небольшую область исследуемого в астрофизике электромагнитного спектра. Этот спектр простирается от значений энергии порядка МэВ (мега-, т.е. миллион) для гамма-излучений до одной миллионной эВ (10^{-6} эВ) для метровых радиоволн. Между этими крайними видами электромагнитного излучения последовательно располагаются рентгеновское, ультрафиолетовое, визуальное и инфракрасное. Электромагнитное излучение обладает волновыми свойствами, проявляющимися в таких явлениях, как интерференция и дифракция.

Интерференция волн (наложение) – явление, наблюдающееся при одновременном распространении в пространстве нескольких волн и состоящее в стационарном (или медленно изменяющемся) пространственном распределении амплитуды и фазы результирующей волны. Интерференция возможна, если разность фаз волн постоянна во времени.

Дифракция – огибание волнами различных препятствий. Дифракция свойственна всякому волновому движению; она имеет место, когда размеры препятствия порядка длины волны или больше. Например, дифракция волн наблюдается при распространении света вблизи краев непрозрачных тел, сквозь узкие отверстия, щели и т.д. Дифракционная картина, т.е. чередование световых максимумов и минимумов – это результат интерференции световых волн.

Итак, поскольку электромагнитное излучение обладает

волновыми свойствами, то электромагнитные колебания можно охарактеризовать длиной волны λ и частотой ν , произведение которых равно скорости распространения колебаний:

$$c = \lambda \nu.$$

У всех электромагнитных волн скорость распространения в вакууме одинакова и составляет примерно 300 тыс. км/с. Энергия квантов \mathcal{E} пропорциональна частоте ν электромагнитных колебаний (т.е. обратно пропорциональна длине волны λ). Коэффициентом пропорциональности является постоянная Планка: $h = 6.626 \cdot 10^{-34}$ Дж \cdot с, так что

$$\mathcal{E} = h \cdot \nu = \frac{h \cdot c}{\lambda}.$$

Кванту с энергией в 1 эв соответствует длина волны $\lambda_1 = 12399 \text{ \AA}$ (ангстрем) $\approx 1.24 \text{ мкм} = 1.240 \text{ нм}$ (нано-) и частота $\nu_1 = 2.18 \cdot 10^{14}$ Гц.

Области видимого излучения соответствует интервал длин волн примерно от 390 нм (фиолетовая граница видимого спектра) до 760 нм (красного). Между ними располагаются все цвета видимого спектра: фиолетовый, синий, голубой, зеленый, желтый, оранжевый и красный. Источники света даже одинаковой мощности могут сильно различаться по спектральному составу своего излучения. Например, Солнце больше всего излучает в желто-зеленой области спектра, тогда как некоторые другие звезды излучают преимущественно в голубой и синей области спектра. С другой стороны, есть объекты (радиогалактики), которые в диапазоне радиоволн излучают в несколько раз сильнее, чем во всех остальных областях спектра. Таким образом, сравнивать излучение двух объектов имеет смысл только в одной и той же спектральной области.

Есть два способа измерения количества световой энергии: либо непосредственное определение количества световой энергии, дошедшей до нас, либо сравнение излучения исследуемого объекта с излучением какого-либо другого, излучательная способность которого нам известна. Для характеристики действия электромагнитного излучения на приемник излучения вводится ряд специальных величин.

Поток излучения – это количество электромагнитной энергии в единичном интервале частот F_ν , протекающей через единичную площадку за единицу времени. Единицы измерения: эрг/(см² с Гц), Вт/(см² Гц).

Поток излучения (а также освещенность) могут характеризовать излучение во всем спектре (полный или интегральный поток) или в каком-то определенном его участке. Если этот участок узок, то излучение, а вместе с ним и поток, называют монохроматическим. В этом случае мощность излучения должна быть отнесена к единичному интервалу частот (1 Гц) или длин волн (1 м, 1 см, 1 мкм, 1 нм, 1 ангстрем).

Спектральная мощность силы излучения немонохроматического источника – величина $d\Phi/d\lambda$, где $d\Phi$ – полный поток излучения источника, приходящийся на интервал длин волн от λ до $\lambda+d\lambda$. Выражение для интегрального потока (по всем частотам) записывается как

$$F = \int F_\nu d\nu,$$

а F_ν еще называют *спектральной плотностью* потока излучения. Единица измерения интегрального потока – эрг/(с·см²) или Вт/м².

Освещенность – интегральный поток излучения, падающий на одну сторону площадки единичной площади. Она также измеряется в эрг/(с·см²) или Вт/см², еще ее можно выразить в люксах. Освещенность E_n в единичном интервале частот определяется спектральной плотностью потока излучения и выражается (как и F_ν) в эрг/(с·см²·Гц) или Вт/(см²·Гц). Освещенность, создаваемая точечным источником с интенсивностью излучения I , зависит от расстояния r до источника и угла i между нормалью к освещаемой поверхности и направлением на источник:

$$E = I \cos i / r^2.$$

Для неточечных источников освещенность определяется аналогично – как суммарная (непосредственно измеряемая) освещенность от всех его частей. Так, освещенность горизонтальной поверхности, создаваемая на Земле Солнцем, находящимся в зените, равна

примерно 105 люкс, полной Луной – около 0.25 лк, всем ночным небом – порядка $3 \cdot 10^{-4}$ лк. Если поток излучения равномерно освещает поверхность S , то освещенность равна отношению падающего на поверхность потока излучения к площади этой поверхности:

$$E = \Phi/S.$$

Равномерную освещенность создает, например, точечный источник (удаленный от экрана), если его лучи перпендикулярны экрану, т.е. такой источник, размеры которого бесконечно малы по сравнению с расстоянием до него. Примером точечных источников могут быть звезды.

Количество освещения (экспозиция) – это произведение освещенности поверхности на продолжительность t ее освещения (время экспонирования):

$$H = E \cdot t.$$

Суммарный поток излучения от стационарного источника через охватывающую его замкнутую поверхность не зависит от ее формы и характеризует *мощность излучения источника* – это полная энергия, излучаемая в единицу времени. Мощность излучения космических источников называется *светимостью* и измеряется в эрг/с или Вт. Светимость источника, находящегося на расстоянии r от Земли, можно вычислить, умножив освещенность, создаваемую этим источником на Земле, на площадь сферы радиусом r :

$$L = 4\pi r^2 E,$$

где E в последнем случае выражено в энергии в ед. времени на см^2 . Светимость Солнца составляет $3.86 \cdot 10^{33}$ эрг/с и часто также применяется как единица светимости. Иногда говорят не о полной светимости, а о светимости в некотором диапазоне длин волн. Например, в зависимости от приемников излучения различают светимости звезд визуальную, фотографическую (относящуюся к излучению звезды в соответствующей области спектра) и болометрическую (относящуюся к излучению звезды на всех частотах ее спектра, т.е. полную светимость). Введем понятие интенсивности излучения [3].

Рассмотрим для этого следующую картину: пусть есть непрозрачный экран, на нем выберем точку C , в точку A за его пределами поместим наблюдателя и выясним, какой будет величина интенсивности излучения света из точки C в точку A . Ограничимся рассмотрением элементарной площадки $d\sigma$ на этом экране, совпадающей с точкой C ; её считаем точечным источником излучения (см. рис. 2.1).

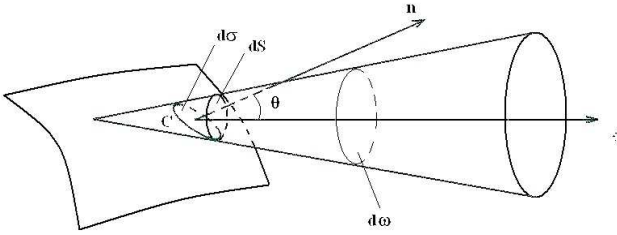


Рис. 2.1. К определению интенсивности излучения.

Далее обозначим бесконечно малый телесный угол как $d\omega$, а поток излучения, идущий через $d\sigma$ и характеризующий мощность световой энергии как $d\Phi$ (в пределах угла $d\omega$). Тогда интенсивность излучения I_ν запишется в виде:

$$I_\nu = \frac{d\Phi}{d\sigma d\omega}.$$

Вместо площадки $d\sigma$ можно взять другую, произвольную, проектирующуюся на нее:

$$dS = d\sigma / \cos \theta, \quad (2.2)$$

интенсивность в этом случае будет определяться как

$$dI_\nu = \frac{d\Phi}{d\omega dS \cos \theta}. \quad (2.3)$$

Предполагая, что поток света излучается из точки на площадке в точку, где находится наблюдатель, получаем, что угол θ – это угол между направлением на наблюдателя и нормалью \vec{n} к $d\sigma$. Таким образом, интенсивность излучения I_ν определяется как количество энергии, падающее в единичный интервал частот ν

за одну секунду внутри телесного угла на единичную площадку, расположенную перпендикулярно направлению излучения. Если площадка dS является элементом излучающей поверхности, то величина dI_ν в (2.3) с учетом (2.2), называется яркостью B этой поверхности в данной точке и в заданном направлении.

2.3. Приемники излучения

Основная задача приемника излучения состоит в преобразовании электромагнитной энергии света в иные формы, измеряя которые обычными физическими методами можно оценивать поток, приходящий от источника. При взаимодействии света со светочувствительным элементом приемника излучения энергия фотонов переходит в кинетическую энергию свободных электронов или в колебания ионов в узлах кристаллической решетки, которые впоследствии регистрируются различными способами. Примерами светочувствительных приемников являются фотоэмульсия, фотоумножитель и полупроводниковые матрицы.

Можно назвать такие основные характеристики приемников излучения: рабочий спектральный диапазон, чувствительность, степень линейности (соотношение между входным и выходным сигналами), интервал входного сигнала, в пределах которого сохраняется линейность и уровень собственных шумов, т.е. случайных сигналов на выходе, не связанных с принимаемым излучением [1].

Фотографический метод, возникший в середине XIX столетия, был сразу использован астрономами для фотометрии. Было выяснено, что фотографическую реакцию на падающее излучение можно характеризовать двумя физическими величинами. Во-первых, с увеличением количества света растет диаметр изображения звезды, а во-вторых, увеличивается почернение участка фотопластинки, на который воздействовал свет звезды. После того, как произведено экспонирование участка звездного неба, фотопластинка проявлена, отфиксирована и высушена, можно либо измерять диаметры, либо определять почернения изображений звезд. В течение десятилетий мелкозернистая астрономическая фотоэмульсия была основным приемником излучения в видимом диапазоне спектра. Она специально

разрабатывалась для использования при длинных экспозициях. Для нее входным сигналом является поглощенная энергия света, упавшего на единицу площади фотопластинки, а выходным – плотность почернения соответствующих мест проявленного изображения, определяемая как логарифм ослабления светового потока, прошедшего через данное место негатива. Основные достоинства фотоэмульсии – это сравнительная дешевизна и очень большая информативная емкость. А основными недостатками фотоэмульсии являются довольно низкая чувствительность, сильная нелинейность и при малых, и при больших значениях световой энергии, упавшей на единицу площади, затем необходимость сложной химической обработки, а также сложность перевода плотности почернения в цифровую форму, удобную для компьютерной интерпретации результатов наблюдений.

Наиболее широко используемые в настоящее время приемники изображения – это приборы с зарядовой связью (ПЗС-матрицы). В идеале детектор ПЗС можно рассматривать как мозаику, состоящую из пикселей, каждый из которых регистрирует маленькую часть изображения. Свет, собранный телескопом, направляется на плоский фокус, в котором расположен ПЗС, и, воздействуя на поверхностный кремниевый слой отдельных пикселей, высвобождает поток электронов вследствие фотоэлектрического эффекта. Этот электрический заряд измеряется и преобразуется в цифровую последовательность, накапливающуюся затем в компьютерной памяти и в нужный момент трансформирующуюся в визуальный формат. Именно кодификации изображения в цифровую последовательность делают технически более простым анализ с помощью соответствующего программного обеспечения, одновременно облегчая работу с данными.

2.4. Обработка данных

Теперь перечислим последовательность действий, совершаемых исследователями в процессе получения и обработки данных фотометрии. К основным этапам этого процесса относят следующие [4]:

1) Запись фотографических пластинок на микроденситометре. В

итоге получают записанный на носитель информации (магнитную ленту, диск и т.д.) двумерный числовой массив плотностей. Каждый его элемент – это значение плотности почернения в данной точке. Одновременно записывается калибровка.

2) Построение для каждой пластинки характеристической кривой и преобразование массива плотностей в массив относительных интенсивностей.

3) Нахождение распределения яркости фона неба на изображении, после этого вычитают яркость фона из яркости изображения для получения реальной картины.

4) Далее суммируются изображения, полученные в одной цветовой полосе. Для этого как можно более точно стараются учесть возможный сдвиг и разворот полученных отдельных кадров по отношению друг к другу. Кроме того, эти кадры должны быть приведены к одному «качеству изображения». Т.е. размеры изображений звезд должны быть сделаны в одном масштабе.

5) Определение нуля-пункта шкалы относительных яркостей. Наиболее распространенные способы стандартизации: привязка к стандартным звездам и к фотоэлектрическим маркам объекта.

6) Результаты поверхностной фотометрии представляют в удобном для интерпретации виде и определяют систему стандартных фотометрических параметров.

7) Построение моделей распределения яркости и детальная интерпретация результатов фотометрии.

О детальной интерпретации результатов фотометрических измерений см., например, [4]. Здесь рассмотрим графический способ, в частности, построение изофот.

При построении *изофот* (линий уровня поверхностной яркости) можно получить порой больше информации об объектах, чем в процессе обычной интерпретации их изображений на снимках. Чаще всего изофоты строятся до какого-то фиксированного слабого уровня поверхностной яркости, шаг берется постоянным. Результатом цифровой поверхностной фотометрии объекта (например, галактики) является матрица, каждый ее элемент – значение поверхностной яркости в данной точке. Это значение выражено в звездных величинах на квадратную секунду дуги. И когда строят карты изофот яркости, из всех этих точек выбирают такие, чтобы выполнялось

равенство: $B(\xi, \eta) = \text{const}$. Здесь (ξ, η) – координаты в плоскости проекции (плоскости, на которую проектируется пространственное распределение светимости). Константы берутся так, как позволяет условие задачи и исходные данные, с шагом 0.5 или 0.1, 0.2, 0.3..

Кроме построения изофот галактики, часто строят профили поверхностной яркости, т.е. вместо двумерной зависимости получают одномерную: $B(\xi)$ или $B(\eta)$, где ξ – большая полуось изофоты, а η – малая. Такая зависимость на графике называется одномерным профилем. При моделировании галактик изофоты часто строят в виде концентрических эллипсов.

Дальше строят зависимости эллиптичностей $\varepsilon = (a - b)/a$ (или просто сплюснутостей b/a) и позиционных углов от большой полуоси a . Профили эллиптичности и ориентации изофот используются, например, при исследовании внешнего вида галактик ранних типов. В реальности изофоты галактик отличаются от эллипсов. Они могут быть разного вида, например, прямоугольники с закругленными углами или быть заостренными на концах большой оси, т.е. быть похожими на линзу или диск. В первом случае форма изофот «ящикоподобна», во втором – «дископодобна». При этом форма внешних изофот может отличаться от формы внутренних. Дископодобность указывает на наличие у галактики дисковой составляющей, т.е. в этом случае рассматривается спиральная галактика, у которой спиральные ветви проецируются на некоторую картинную плоскость как сильно сплюснутый эллипс, или диск.

Для количественной характеристики формы изофот обычно используют параметр a_4 . Пусть изофота галактики аппроксимируется эллипсом $R_{el}(\varphi)$ и для каждого угла φ можно найти разность $\delta(\varphi) = R(\varphi) - R_{el}(\varphi)$ между реальной изофотой и эллипсом.

Функцию разности $\delta(\varphi)$ можно разложить в ряд Фурье:

$$\delta(\varphi) = \delta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)$$

Если изофота более или менее симметрична, то каждая ее четверть будет подобна остальным, и ее форма будет хорошо аппроксимироваться эллипсом. Тогда значения δ , a_1 , a_2 , a_3 и b_n

должны быть небольшими.

Величина и знак a_4 будут зависеть от формы изофоты: если изофота имеет дископодобную форму, то $a_4 > 0$, а для ящикоподобной изофоты $a_4 < 0$. Значение a_4 отражает степень отклонения формы изофоты от эллипса. Для описания формы изофот часто используют не сам коэффициент a_4 , а безразмерный параметр a_4/a , где a – большая полуось данной изофоты. Отношение a_4/a называют *параметром изофот*.

2.5. Точность фотометрических измерений

В фотометрических исследованиях часто ставится вопрос о точности проделанных наблюдений. Ошибки измерений могут быть обусловлены многими причинами, не только технического характера. Например, при попытке определить более точную величину интегральной светимости галактик фотографическими измерениями возникла следующая проблема. Интегральная фотометрия галактик вообще встречает затруднение в том, что большинство галактик, по всей видимости, не имеет четкой границы и сходит на нет постепенно. Поэтому, если мы начнем измерять интегральную светимость этими методами, то заметим, что в наших измерениях она будет расти до тех пор, пока мы не достигнем яркостей, при которых фон неба делает количественные фотометрические измерения ненадежными (все галактики наблюдаются на фоне ночного неба). Разрабатывались различные способы, чтобы избежать эти проблемы. Так, Холмберг усовершенствовал метод, ранее применявшийся еще Редманом. Он строил по снимкам галактик их изофоты, и далее суммировал поверхностные яркости до изофот $26.^m5$ и $26.^m0$ на квадр.сек. дуги для фотографических и фотовизуальных величин соответственно. Холмберг измерял галактики ярче 12^m и некоторые более слабые. Всего было исследовано 98 объектов, и оказалось, что измеренные этим способом звездные величины практически соответствуют полным или асимптотическим.

Фотоэлектрические измерения в поверхностной фотометрии считаются более точными по сравнению с фотографическими, потому что способны интегрировать свет внутри диафрагмы. Если проводить измерения звездных величин галактик этими методами

с разными диафрагмами, то можно получить представление об изменении яркости и цвета с изменением примененной диафрагмы. В этом случае уже не возникают проблемы аналогичные тем, что имели место при фотографических измерениях объектов.

Рассмотрим основные источники искажений результатов наблюдений. Первым является атмосфера. Во-первых, она поглощает излучение, во-вторых, ухудшает качество изображения и создает фон (свечение ночного неба), ограничивающий возможность регистрации слабых объектов.

В связи с этим вводится понятие экстинкции. *Экстинкция в атмосфере* – это ослабление электромагнитного излучения в земной (планетной) атмосфере. Экстинкция обусловлена суммарным действием поглощения и рассеяния излучения. Ослабление излучения с начальной интенсивностью $I_0(\lambda)$ определяется соотношением:

$$I(\lambda) = I_0(\lambda) \cdot e^{-\tau_e(\lambda)}$$

где $\tau_e(\lambda)$ - оптическая толщина атмосферы для экстинкции. Оптическая толщина $\tau_e(\lambda)$ зависит также от зенитного расстояния светила z . Величина

$$M(z) = \tau_e(\lambda, z)/\tau_e(\lambda, 0)$$

называется *воздушной или атмосферной массой* ($\tau_e(\lambda, 0)$ – оптическая толщина при $z=0$). Для $z < 70^\circ$ эта масса $M(z) \approx \sec z$ и практически не зависит от λ .

Степень ослабления света земной атмосферой часто характеризуют коэффициентом прозрачности атмосферы $p(\lambda)$, который определяется для светила в зените: $p(\lambda) = \frac{I(\lambda, 0)}{I_0(\lambda)} \cdot e^{-\tau_e(\lambda, 0)}$ или в звездных величинах: $m - m_0 = 2.5 \lg p$. Для любого другого зенитного расстояния:

$$\frac{I(\lambda, 0)}{I_0(\lambda)} = p(\lambda)^{M(z)}.$$

Оптическая толщина для экстинкции равна сумме $\tau_s(\lambda) + \tau_a(\lambda)$ оптических толщин, обусловленных процессами рассеяния $\tau_s(\lambda)$ и процессами поглощения $\tau_a(\lambda)$. Излучение поглощается в земной

атмосфере главным образом в полосах поглощения молекул. Ослабление излучения из-за процессов рассеяния происходит непрерывно по спектру по закону $\approx \lambda - \alpha$. Для рэлеевского рассеяния, возникающего на оптических неоднородностях, сравнимых с размерами молекул и вызванных тепловыми движениями молекул (так называемое «молекулярное рассеяние»), $\alpha = 4$. Т.е. в этом случае размеры рассеивающих частиц малы по сравнению с длиной волны света.

Для аэрозольного рассеяния α лежит в пределах от 0 до 4, в зависимости от размера рассеивающих частиц; в среднем $\alpha = 1.3$. Белесоватость неба обусловлена аэрозольным рассеянием и зависит от размеров частиц и их индикатрис рассеяния.

Функция зависимости интенсивности рассеянного света от угла рассеяния (т.е. от угла между направлением рассеяния и первоначальным направлением) называется *индикатрисой рассеяния*.

Полная оптическая толщина для процессов рассеяния

$$\tau_s(\lambda) = \tau_R(\lambda) + \tau_A(\lambda),$$

где τ_R, τ_A – оптические толщины соответственно для рэлеевского и аэрозольного рассеяний.

Для данного места на Земле наименьшая возможная атмосферная экстинкция – рэлеевская, она практически неизменна во времени, зависит только от высоты h места наблюдения над уровнем моря и является полезной характеристикой места наблюдения. Значения показателя ослабления излучения \varkappa для некоторых длин волн приведены в следующей таблице:

Табл.2.1

$\lambda, \text{мкм}$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,7	1,0	5,0
$\varkappa_R(\lambda)$	954,2	152,5	45,4	18,1	4,605	1,902	$1,729 \cdot 10^{-3}$

Оптическая толщина τ_R , а следовательно и коэффициент прозрачности земной атмосферы для рэлеевского рассеяния, рассчитывается по формуле:

$$\tau_R(\lambda) = \varkappa_R(\lambda)H(h),$$

где $H(h)$ – высота однородной атмосферы, $\varkappa_R(\lambda)$ – показатель ослабления для рэлеевского рассеяния. Из таблицы видно, что чем

ближе наблюдаемый ход прозрачности с длиной волны (вне полос поглощения земной атмосферы) к рэлеевскому, тем более чиста атмосфера и тем меньше изменения ее прозрачности во времени.

Вторым основным источником искажений результатов наблюдений является *излучение фона неба*. Часто фоном называют все помехи, затрудняющие выделение сигнала от дискретного объекта: собственные шумы прибора, отсчеты рентгеновских счетчиков, вызванные наличием космических лучей, диффузное излучение, попадающее в поле зрения прибора (в частности, это может быть и фоновое излучение Вселенной при наблюдении источников с малыми угловыми размерами), и т.п.

Проблема фона неба является наиболее серьезной проблемой в фотометрии протяженных объектов, поскольку галактики наблюдаются на фоне ночного неба, и излучение его дает заметный вклад в распределение яркости изучаемых объектов. Фон неба влияет также на обнаружение галактик, на точность измерения их звездных величин и показателей цвета.

Основной вклад в яркость безлунного ночного неба дают следующие составляющие [6]:

- 1) свечение атмосферы, обусловленное фотохимическими процессами в ее верхних слоях;
- 2) зодиакальный свет – рассеянное на межпланетной пыли излучение Солнца;
- 3) излучение слабых и неразрешенных звезд нашей Галактики;
- 4) диффузное излучение от далеких, слабых галактик.

Другие факторы, влияние которых на яркость фона неба заметно меньше – это следствие межзвездного поглощения в Галактике; слабые отражательные и эмиссионные туманности Галактики; протяженные ореолы от ярких звезд, расположенных вблизи наблюдаемых объектов [4]. Вклад этих составляющих в общую яркость неба меняется в зависимости от положения наблюдателя на Земле. Он зависит также от галактических и эклиптических координат наблюдаемого объекта. Основной вклад в наблюдаемый фон неба (при наблюдениях в зените, без Луны, вдали от плоскостей эклиптики и Млечного Пути, а также в минимуме солнечной активности) вносят свечение атмосферы ($\approx 2/3$) и зодиакальный свет ($\approx 1/3$). Свечение атмосферы изменяется на масштабах времени 2-3 минуты, и оно приводит к изменениям

среднего уровня фона неба в пределах $\approx 2\%$. Кроме того, свечение атмосферы зависит от фазы цикла солнечной активности.

Если бы излучение фона, которое принимается вместе с излучением от исследуемого объекта, было постоянным по времени, его было бы просто учесть вычитанием из суммарного регистрируемого сигнала. Но излучение каждого источника состоит из фотонов, и в силу случайных причин в одинаковые промежутки времени регистрируется разное число фотонов. Эту случайно изменяющуюся часть регистрируемого сигнала и называют *шумом*. Для уверенного отождествления источника отношение сигнала к шуму должно быть намного больше 1. Величина, обратная этому отношению (С/Ш), является относительной случайной ошибкой измерений. Часто в качестве минимального порога регистрации выбирают $C/\Pi = 3-5$, что соответствует ошибке измерений в 30% и 20% соответственно [1]. За время экспозиции телескоп собирает кванты и от источника, и от фона (рассеяние постороннего света в атмосфере, собственное свечение атмосферы и т.д.). Пусть фон характеризуется яркостью S , измеряемую в единицах квант/($\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{кв.сек.дуги}$). Типичное значение яркости фона темного безлунного неба в сине-зеленой (В) области составляет примерно 21.5 звездной величины с кв.сек. дуги, что соответствует интенсивности $\sim 2.5 \cdot 10^{-3}$ кв./($\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{кв.сек.дуги}$).

Найдем ошибку измерения потока от источника, связанную с фоном, на котором он наблюдается. Рассмотрим для простоты случай линейного приемника с отсутствующими внутренними шумами. Обозначим через t время экспозиции, β – угловой размер изображения (обычно он ограничен атмосферой), D – размер объектива телескопа, S – яркость фона неба, η – квантовый выход приемника, f_* кв./($\text{см}^2 \cdot \text{с}$) – поток излучения от источника, который должен быть измерен. Площадь объектива примерно равна D^2 , а площадь, занимаемая источником на небе, равна β^2 кв.сек. Тогда среднее число квантов, зарегистрированных за время экспозиции t от источника $\langle n_* \rangle \approx \eta D^2 t f_*$, от фона $\langle n_\Phi \rangle \approx \eta D^2 t \beta^2 S$, а от источника и фона вместе $\langle n_{*+\Phi} \rangle \approx \eta D^2 t (f_* + \beta^2 S)$. В общем случае, при наличии помех у приемника, равных n_d импульсов в секунду, к правой части уравнения надо добавить $N_d = n_d \cdot t$.

Пусть за время экспозиции фон не меняется и флуктуации числа квантов носят пуассоновский характер. Тогда в соответствии с [4] при наблюдениях со временем накопления t разброс отсчетов относительно среднего значения будет равен $\sqrt{\langle n_{*+\phi} \rangle}$.

$$\sigma_n^2 = (n - \langle n \rangle)^2 = \langle n \rangle. \quad (2.4)$$

В (2.4) – свойство статистики Пуассона: среднеквадратичные флуктуации числа n определяются величиной $\langle n \rangle$. Эта формула описывает фотонный шум и случайные флуктуации светового потока относительно среднего значения.

Итак, число импульсов, относящихся к источнику, находится вычитанием импульсов фона из полного числа импульсов: $\langle n_* \rangle = \langle n_{*+\phi} \rangle - \langle n_\phi \rangle$. Т.к. среднеквадратичное отклонение пропорционально квадратному корню из числа импульсов, то разброс значений n_* будет описываться величиной $\sigma_* = \sqrt{n_{*+\phi} + n_\phi} = \sqrt{n_* + 2n_\phi}$ (здесь учитывается, что σ^2 для суммы и разности случайных независимых величин равно сумме σ^2 отдельных слагаемых). Тогда относительная ошибка ε измерения числа импульсов от источника n_* , описывающая точность измерения потока f_* от звезды, равна

$$\varepsilon = \frac{\sigma_*}{n_*} = \frac{\sqrt{n_{*+\phi} + n_\phi}}{n_*} = \frac{\sqrt{\eta D^2 t (f_* + 2\beta^2 S)}}{\eta D^2 t f_*}.$$

Далее рассматриваем два предельных случая – яркой и слабой звезды [1].

1) Случай яркой звезды, когда $n_* \gg n_\phi$. Здесь фоном неба можно пренебречь, тогда точность измерения

$$\varepsilon_b = \frac{\sqrt{n_*}}{n_*} = \frac{1}{\sqrt{n_*}} = \frac{1}{D\sqrt{ntf_*}}.$$

Таким образом, предельно обнаружимый поток f_* при заданной точности измерения (отношении сигнала к шуму, С/Ш) пропорционален $\frac{1}{D^2 t}$. Т.е., чем больше диаметр телескопа, тем при меньших экспозициях получается требуемая точность измерения. При этом увеличение времени экспозиции эквивалентно увеличению площади объектива D^2 . Чтобы с той же ошибкой

измерить вдвое более слабый сигнал, нужно вдвое большее время экспозиции или вдвое большая площадь объектива телескопа.

2) Случай слабой звезды, когда $n_* \ll n_\Phi$. Здесь имеем:

$$\varepsilon_f \cong \frac{\sqrt{2n_\Phi}}{n_*} = \frac{\sqrt{2\eta D^2 \beta^2 St}}{\eta D^2 t f_*} = \frac{\beta}{D f_*} \sqrt{\frac{2S}{\eta t}}.$$

Предельно обнаружимый поток слабо зависит от фона неба и времени экспозиции, но чувствителен к качеству изображения. В этом случае для измерения с той же точностью более слабого сигнала необходимо вдвое увеличить диаметр телескопа или вдвое уменьшить размер изображения звезды.

Еще один важный аспект, который влияет на точность проводимых наблюдений – это учет *нуль-пункта шкалы звездных величин*. Когда-то нуль-пунктом была Полярная звезда, а потом – примерно сотня звезд Полярного круга [4]. Определение нуль-пункта относится в поверхностной фотометрии к этапу стандартизации. Надо отметить, что привязка к стандартным звездам (типа Полярной) является наиболее распространенным способом стандартизации. Т.е., фотометрические стандарты устанавливаются путем выбора хорошо известных видимых звездных величин. Если инструментальная и стандартная фотометрические системы близки, то связь между ними может быть представлена в виде следующих уравнений:

$$V = v + c_1(b - v) + c_v, \quad B - V = c_2(b - v) + c_{bv}, \quad U - B = c_3(u - b) + c_{ub},$$

где u, b, v – внеатмосферные величины звезд в инструментальной системе, а U, B, V – соответствующие им величины в стандартной. Если эти системы совпадают, тогда $c_1 = 0, c_2 = c_3 = 1$.

При выборе стандартов нужно, чтобы диапазон изменения показателей цвета звезд либо соответствовал, либо перекрывал диапазон изменения показателей цвета наблюдающихся в течение данной ночи галактик. При тщательных наблюдениях точность нуль-пункта шкалы звездных величин по наблюдениям стандартов может составлять всего $\pm 0.^m01$.

Восстановление результатов измерений. Функция рассеяния точки, PSF

Помехи в наблюдениях могут быть вызваны как техническими причинами, так и различными атмосферными явлениями. В обоих случаях ошибки измерений можно свести к минимуму, посредством введения так называемой функции PSF, которую определяют таким образом, что она является характеристикой системы искажений.

С учетом искажений в измерениях видимую яркость записывают как свертку двух функций: $B = S * G$, где S – истинная яркость (без помех), а G – характеристика искажающей системы, или PSF (point spread function – функция рассеяния точки – распределение освещенности от точечного объекта). В данном случае этой системой является атмосфера и телескоп.

Если предположить, что искажения линейны и не меняются в пространстве (пространственно инвариантны), то связь видимой и истинной поверхностной яркостей объекта можно представить так:

$$B_{obs}(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x - x', y - y') B_{real}(x', y') dx' dy' + \delta g,$$

Это двумерное уравнение типа свертки, функция $\rho(x - x', y - y')$ – это PSF, x', y' – координаты центра диафрагмы телескопа, δg – шум наблюдения. На практике PSF применяют для построения различных профилей распределений. Часто аналитически эту функцию представляют в виде гауссианы, т.е. записывают так:

$$PSF = G(r, \sigma) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \cdot e^{-r^2/2\sigma^2},$$

либо представляют в виде суммы функций Гаусса. Здесь σ – стандартное отклонение или радиус кривой Гаусса, r – расстояние от центра профиля.

«Размытие» изображения может существенно повлиять на распределение поверхностной яркости в центральных областях галактик. Особенно сильно оно сказывается на далеких объектах, размеры которых сравнимы с шириной PSF. Например, наземные и космические исследования квазаров невозможны без тщательного

учета влияния PSF на фотометрические характеристики объектов. Влияние качества изображения искажает измерения видимых звездных величин m и поверхностных яркостей вблизи от ядра галактики, приводит к увеличению эффективного радиуса r_e , а также к уменьшению видимой эллиптичности изофот $\varepsilon = \frac{a-b}{a}$, где a и b – это большая и малая полуоси аппроксимирующего данную изофоту эллипса. Для описания этого эффекта было предложено несколько аналитических выражений кроме функции Гаусса.

Рассмотрим в качестве примера метод, предложенный в [9] для построения моделей звездных систем, в котором используется PSF. В этом методе показан процесс восстановления видимой поверхностной яркости, B_{obs} , а потом и светимости, с помощью PSF. PSF здесь представлена аналитической функцией. Уровневые поверхности светимости рассматриваются как трехосные фигуры, везде предполагается, что звездная система наблюдается под произвольным углом зрения.

Изложим сначала постановку задачи. PSF задается как сумма вида:

$$PSF(x', y') = \sum_{k=0}^m G'_{*k}, \quad (2.5)$$

здесь G'_{*k} – двумерные функции Гаусса:

$$G'_{*k} = I'_{*k} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma'^2_{*k}} \left(x'^2_{*k} + \frac{y'^2_{*k}}{q'^2_{*k}} \right) \right\}, \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} x'_{*k} &= (x' - x'_{0*k}) \cos \alpha_{*k} + (y' - y'_{0*k}) \sin \alpha_{*k}, \\ y'_{*k} &= -(x' - x'_{0*k}) \sin \alpha_{*k} + (y' - y'_{0*k}) \cos \alpha_{*k}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Как видно из (2.6) и (2.7), гауссианы описываются шестью параметрами: I'_{*k} – максимальная интенсивность, σ'_{*k} – стандартное отклонение, q'_{*k} – отношение осей, x'_{0*k}, y'_{0*k} – декартовы координаты максимальной интенсивности, α_{*k} – позиционный угол большой оси.

Подобно PSF, реальная поверхностная яркость (без помех) моделируется суммой гауссиан:

$$B_{real}(x', y') = \sum_{i=0}^N G'_i = \sum_{i=0}^N I'_i \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma'^2_i} \left(x'^2_i + \frac{y'^2_i}{q'^2_i} \right) \right\}, \quad (2.8)$$

где

$$\begin{aligned}x'_i &= (x' - x'_{0i}) \cos \beta_i + (y' - y'_{0i}) \sin \beta_i, \\y'_i &= -(x' - x'_{0i}) \sin \beta_i + (y' - y'_{0i}) \cos \beta_i.\end{aligned}$$

Связь между видимой и реальной поверхностной яркостью осуществляется через функцию PSF:

$$\begin{aligned}B_{obs}(x', y') &= B_{real} * PSF = \sum_i G'_i * \sum_k G'_k = \\&= \sum_{i,k} (G'_i * G'_k) = \sum_{i,k} G'_{i,k}.\end{aligned}\quad (2.9)$$

Итак, нужно восстановить распределение яркости с помощью функции PSF. Она дана выражениями (2.5)-(2.7) и содержит 6 неизвестных параметров: $I'_{*k}, \sigma'_{*k}, x'_{0*k}, y'_{0*k}, q'_{*k}, \alpha_k$, $k = \overline{1, m}$. Для отыскания этих параметров методом наименьших квадратов минимизируют следующий функционал:

$$\sum_{pixels} \left(\sum_{k=0}^m G'_k(x', y') - PSF(x', y') \right)^2. \quad (2.10)$$

Далее минимизируют функционал вида:

$$\sum_{pixels} \left(\sum_{i,k} G'_{i,k}(x', y') - I_{obs}(x', y') \right)^2, \quad (2.11)$$

I_{obs} в (2.11) – наблюдаемая интенсивность, которая входит в выражение для наблюдаемой поверхностной яркости. После того как в (2.10) и (2.11) нашли параметры PSF, находят (восстанавливают) видимую поверхностную яркость, используя (2.9). Далее, имея восстановленную поверхностную яркость, выраженную через I_{obs} и PSF, путем депроецирования яркости можно найти светимость. В итоге получается функция следующего вида:

$$\begin{aligned}L(x, y, z) &= \\&= \sum_{i=0}^N I_i \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2t_i u_i \sigma_i^2} (t_i^2 (x - x_{0i})^2 + u_i^2 (y - y_{0i})^2 + (z - z_{0i})^2) \right\}.\end{aligned}$$

Т.е. распределение светимости рассчитывают по восстановленной яркости, и тогда остается светимость, не искаженная фоном.

Для нахождения истинной (реальной) яркости можно использовать и другой метод, с преобразованием Фурье. В этом способе используются свойства свертки. Например, если F – это преобразование Фурье функции f , то

$$F[f * g] = \sqrt{2\pi} \cdot F[f] \cdot F[g].$$

Иначе говоря, задача может быть сведена к интегральному уравнению вида:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y) f(y) dy + g(x) \quad (2.12)$$

– это частный случай уравнения Фредгольма 1 рода, где $f(x)$ и $f(y)$ – распределение яркости по искаженному и неискаженному изображениям соответственно, $K(x-y)$ – это PSF, а $g(x)$ – шум наблюдений.

Применяя к этому уравнению преобразование Фурье, получают: $F[f] = F[g] + \sqrt{2\pi} \cdot F[f] \cdot F[K]$, отсюда выражают $F[f]$:

$$F[f] = \frac{F[g]}{1 - \sqrt{2\pi}F[K]}.$$

Обратное преобразование Фурье приводит к решению уравнения (2.12):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F[g](\zeta) e^{-i\zeta x}}{1 - \sqrt{2\pi}F[K](\zeta)} d\zeta.$$

Задача решения уравнения (2.12) является некорректной. Наиболее подходящим методом для ее решения является метод регуляризации Тихонова. При численной реализации метода для решения обратной задачи используются преобразование Фурье и метод квадратур [2].

Способ с применением преобразования Фурье более трудоемкий, и на практике чаще всего для восстановления реального распределения используют метод сравнения видимого распределения B_{obs} со сверткой $PSF * S$, о котором было сказано выше.

Функция Моффата

В качестве PSF кроме гауссианы часто рассматривают ее модификацию – функцию Моффата [10].

Моффат предложил свой вариант PSF, характеризующей искажения:

$$I^*(r) = \frac{I_0(m)}{(1 + (r/A)^2)^\beta}, \quad (2.13)$$

где $m = m_0 - 2.5 \lg I_0$, A – параметр, характеризующий ширину PSF, $\beta = \text{const}$. Во всех измеренных случаях формула (2.13) соответствует малым систематическим отклонениям к точке, в которой начинает преобладать дифракция, т.е. когда $I^*/I_0 \approx 10^{-3}$. Параметры A и β зависят от качества наблюдений; при плохом качестве их значения больше, и тогда функция Моффата приближается к гауссиане. Обычно для этих параметров берут такие значения: $A \approx 30 - 70\mu$, $\beta \approx 3 - 5$. В качестве PSF рассматривается также модифицированная функция Моффата:

$$PSF = \frac{\beta - 1}{\pi A^2} (1 + (r/A)^2)^{-\beta}$$

Для оценки искажений строят графики разности $M - C$, где M – выражение модельной поверхностной яркости (его полагают реальным), а C – это свертка. В примере из предыдущего пункта в качестве реальной яркости было взято выражение (2.8), а свертка дается формулой (2.9).

Как показали исследования, функция Моффата содержит PSF Гаусса как предельный случай (при $\beta \rightarrow \infty$). Более того, PSF Моффата имеет два очевидных преимущества перед функцией Гаусса:

1) она более удобна для проведения численных экспериментов, т.к. имеет полиномиальную структуру, тогда как функция

Гаусса, содержащая экспоненту в своем выражении, способствует усложнению вычислений;

2) эта функция позволяет приблизить к реальным значениям величину A (т.е. величину размаха, ширины), которая у функции Гаусса заметно отклоняется от реальности.

Разность $M - C$ между наблюдаемым и реальным значениями яркости возрастает по мере роста ширины PSF. В случае, когда PSF – нормированная функция Гаусса, роль этой ширины играет параметр σ – дисперсия или радиус гауссианы, в остальных – параметр A . Чем большие значения σ берем, тем больше увеличивается разность $M - C$, что означает рост искажений. Т.е. большее значение σ способствует большему размытию изображения. Таким образом, на практике имеет смысл брать меньшие значения σ . Аналогичные эффекты наблюдаются в случаях, когда PSF – функция Моффата и модифицированная функция Моффата. Здесь есть зависимость от двух параметров – A (ширины) и β .

На практике в прямых задачах по восстановлению яркости B_{real} в случае функции Моффата лучше брать меньшие значения A и большие значения β . А в случае модифицированной функции Моффата меньшие значения β и A . Такой выбор даст более точные значения свертки, т.е. более точные значения яркости.

2.6. Межзвездная материя и поглощение света

Все исследуемые внегалактические объекты наблюдаются не напрямую, а через полосы межзвездной материи, поглощающей и рассеивающей свет. По этой причине получают искаженную картину распределения светимости. Вывод о существовании межзвездной среды впервые был сделан В.Я.Струве в 1847 г. Это открытие, которое в дальнейшем подтвердилось в 20 в., повлекло за собой массу проблем при решении задач по определению расстояния до различных удаленных объектов типа туманностей.

До того, как были обнаружены эффекты поглощения света, в астрономии довольно успешно применялись различные фотометрические методы по определению расстояний до звезд и других космических объектов. По существу, эти методы сводились к следующему. На основании тех или иных астрофизических

или статистических предпосылок априори определяли абсолютную величину M изучаемых объектов. Затем, сравнивая ее с видимой величиной m , вычисляли расстояние r' до объекта по формуле:

$$\lg r' = 0.2(m - M) + 1. \quad (2.14)$$

С момента открытия факта существования межзвездной материи формула (2.14) перестала быть правильной и ее заменили другой:

$$\lg r = 0.2(m - M) + 1 - 0.2A \quad (2.15)$$

$$\text{или : } M = m + 5 - 5 \lg r - A,$$

где A обозначает потерю света в звездных величинах в результате его прохождения через межзвездную среду. Определенные ранее расстояния r' оказались преувеличенными, т.к., если сравнивать формулы (2.14) и (2.15), имеем:

$$r' = r \cdot 10^{0.2A}, \quad A \geq 0,$$

т.е., открытие темной материи повлекло за собой уменьшение почти всех измеренных ранее расстояний. Например, размеры нашей Галактики уменьшились примерно вдвое.

Убеждение в почти полной прозрачности пространства существовало до 1930 г. (за исключением тех мест, где есть темные туманности). Оно основывалось на нескольких фактах, основным из которых является следующий. В ряде шаровых скоплений Шепли обнаружил звезды с отрицательными показателями цвета, т.е. класса B . Это говорит о том, что в направлении этих шаровых скоплений свет почти не поглощается, потому что при поглощении должно было бы происходить покраснение звезд и показатели цвета не смогли бы быть отрицательными. Но этот факт недостаточно убедителен, т.к. все обнаруженные Шепли шаровые скопления находятся в высоких галактических широтах, т.е. все объекты, расположенные ниже – например, вблизи галактической плоскости, могут наблюдаться с искажениями из-за поглощающих эффектов. В общем, именно такое расположение поглощающей свет материи и имеет место в действительности: ее основная масса концентрируется вдоль плоскости Галактики, а показатели цвета звезд в далеких шаровых скоплениях (также принадлежащих

нашей Галактике, но расположенных в высоких галактических широтах) мало искажаются поглощением.

Если наблюдается покраснение света звезд, то говорят, что поглощение света – *избирательное (селективное)* и зависит от длины волны. Поглощение света при конкретной длине волны λ называется также *полным поглощением* света в лучах λ . Избирательное поглощение света обнаруживается изучением показателей цвета звезд. Показатели цвета звезд, свет которых достигает нас, пройдя некоторое расстояние в поглощающей среде, должны быть больше, чем это соответствует их спектральным классам, которые оцениваются по виду спектральных линий и от межзвездного поглощения не зависят.

Различие между наблюдаемым, преувеличенным показателем цвета и его нормальным значением, соответствующим данному спектральному классу, называется *избытком цвета* и обозначается CE . Избыток цвета должен расти с ростом расстояния, проходимого лучом в поглощающей среде, что и наблюдается в действительности. Таким образом, изучение избирательного поглощения сводится к исследованию показателей цвета, определению избытков цвета и изучению их изменений с расстояниями. Избирательное поглощение при этом будет равно разности между поглощением света для тех двух волн, к которым относятся показатели цвета. Поэтому избирательное поглощение называют также дифференциальным.

Взаимодействие вещества с излучением

Под взаимодействием излучения с веществом подразумевают процессы рассеяния, поглощения и генерации электромагнитного излучения.

Рассеяние и поглощение в межзвездной среде вызывается пылевыми частицами. Межзвездная пыль – это один из компонентов межзвездной среды (к другим относятся межзвездный газ, космические лучи, электромагнитное излучение). Она состоит из мелких твёрдых частиц, рассеянных в межзвездном пространстве. Основная масса концентрируется, главным образом, в экваториальной плоскости галактики, образуя газово-пылевые облака с неравномерным распределением вещества. Размеры таких

облаков достигают 10-100 пк, а масса – около $10^5 M_{\odot}$. Пылинки межзвездной среды в основном имеют несферичную форму, их размер – 0,1-1 мкм, а состав – тугоплавкое ядро и оболочка из летучих элементов [5].

При определенном радиусе частицы r и показателе преломления m теория дает значение коэффициента рассеяния k , рассчитанного на одну частицу. Объемный коэффициент рассеяния σ известен из наблюдений, поэтому из соотношения $\sigma = nk$ можно найти концентрацию частиц n . Затем может быть найдена плотность пыли в туманности по формуле

$$D = \frac{4}{3} \pi r^3 \delta n,$$

где δ – удельный вес вещества частицы.

Межзвездный газ является основным компонентом межзвездной среды – составляет 99% от ее массы и 2% от массы нашей Галактики. Он равномерно перемешан с межзвездной пылью, температура варьируется от $4 - 6^{\circ} K$ до $10^6 K$.

В (2.3) было дано определение интенсивности излучения. Чтобы получить интегральную интенсивность, нужно проинтегрировать (2.3) по всему спектру частот:

$$I = \int_0^{\infty} I_{\nu} d\nu.$$

Если рассматривать среду, поглощающую излучение, то в ней на некотором пути ds_* интенсивность излучения света будет ослаблена на величину

$$dI_{\nu} = -k I_{\nu} ds_*, \quad (2.16)$$

где k – коэффициент поглощения. Иногда вместо k вводят $\rho \kappa$ – коэффициент поглощения на грамм вещества, пройденного фотонами. В этом случае коэффициент κ имеет размерность $\text{см}^2/\text{г}$ и называется *коэффициентом непрозрачности*. Физический смысл коэффициента поглощения таков: рассматривая его в связи с одним атомом, получим зависимость только от свойств этого атома, т.е.

$k/n = \sigma_\nu$. Его величина имеет размерность см^2 и называется эффективным сечением поглощения.

Процесс поглощения можно представить так: пусть каждый атом поглощающего вещества выглядит как малый непрозрачный диск, ребро которого перпендикулярно пучку излучения. Тогда получится, что кванты, попадая в такие диски, будут застревать в них, т.е. поглощаться. Если площадь каждого диска σ_ν , а их число в единице объема равно n , то полная площадь всех дисков в слое газа с площадью 1 см^2 и толщиной ds равна $n\sigma_\nu ds$, таким образом, вместо (2.16) имеем: $dI_\nu = -n\sigma_\nu I_\nu ds$. Коэффициент поглощения может быть положительным и отрицательным, т.к. среди процессов испускания и поглощения света всегда есть вынужденное излучение, пропорциональное, подобно поглощению, интенсивности падающего излучения.

Уравнение переноса излучения

Рассмотрим подробнее изменение интенсивности излучения в поглощающей среде:

$$I_\nu(s_*) = I_\nu(0) \cdot e^{-\tau_\nu}, \quad \tau_\nu = \int_{s_0}^{s_*} k(s_*) ds_*, \quad (2.17)$$

где τ_ν – оптическая толщина. Величина $e^{-\tau_\nu}$ показывает, во сколько раз уменьшится интенсивность света, прошедшего через поглощающую среду, имеющую оптическую толщину τ_ν .

Оптическая толщина – это безразмерная характеристика, определяющая поглощение вдоль луча распространения света или от s_0 до s_* . Если отсчет расстояния ведется в обратном направлении, тогда в определении оптической толщины появляется знак минус.

Если $\tau_\nu \gg 1$, тогда имеем оптически толстую среду (она непрозрачна для излучения), если $\tau_\nu \ll 1$ – оптически тонкая среда (прозрачна для излучения).

Понятие оптической толщины связано с длиной свободного пробега фотона. Пусть есть однородная среда без излучения. Средняя длина свободного пробега фотона определяется из

условия: $\langle \tau_\nu \rangle = k \langle l_\nu \rangle = 1$, т.е.

$$\langle l_\nu \rangle = \frac{1}{k} = \frac{1}{n \sigma_\nu}$$

– это обратный коэффициент поглощения.

Если $\tau_\nu < 1$, то фотоны, принимаемые наблюдателем – это те же фотоны, что и исходные (испущенные источником). Если $\tau_\nu = 1$, то это значит, что на пути к наблюдателю свет хотя бы раз испытает поглощение межзвездной средой. Если в среде кроме поглощения есть и рассеяние, то оптическую толщину по рассеянию понимают как число рассеяний фотона света, которое с ним произойдет, прежде чем этот фотон уйдет из конкретной исследуемой области.

В том случае, когда среда как поглощает свет, так и излучает, имеем вместо (2.16) следующее выражение для интенсивности излучения:

$$\frac{dI_\nu}{ds_*} = \mathcal{E}_\nu - kI_\nu, \quad (2.18)$$

где k – коэффициент излучения, \mathcal{E}_ν – это количество энергии, излучаемое объемом в 1 см^3 в единичном интервале частот в единичном телесном угле за 1 сек.

Уравнение (2.18) называют *уравнением переноса излучения*.

Итак, фотоны из пучка уходят не только вследствие истинного поглощения, но и из-за рассеяния (которое меняет траектории фотонов), тогда уравнение (2.18) усложняется – оно превращается в интегро-дифференциальное уравнение, которое обычно решается численными методами. Наиболее простые частные случаи уравнения переноса излучения [1]:

– когда среда только излучает, тогда

$$k = 0, \quad \frac{dI_\nu}{ds_*} = \mathcal{E}_\nu,$$

$$I_\nu(s_*) = I_\nu(s_0) + \int_{s_0}^{s_*} \mathcal{E}_\nu(s') ds',$$

где $I_\nu(s_0)$ – интенсивность излучения перед входом в поглощающую материю.

– когда среда только поглощает,

$$\mathcal{E}_\nu = 0, \quad \frac{dI_\nu}{ds_*} = -k_\nu I_\nu,$$

$$I_\nu(s_*) = I_\nu(s_0) \cdot \exp \left[- \int_{s_0}^{s_*} k_\nu(s') ds' \right] = I_\nu(s_0) \cdot \exp(-\tau_\nu).$$

Введем понятие функции источника. На основе (2.17) $d\tau_\nu = k_\nu ds$, тогда (2.18) перепишем в виде:

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu,$$

где $S_\nu \equiv \mathcal{E}_\nu/k_\nu$ – функция источника, ее вычислить проще, чем коэффициенты поглощения и излучения по отдельности. Эта же функция фигурирует в законе Кирхгофа.

Закон Кирхгофа выполняется в условиях локального термодинамического равновесия и устанавливает связь между коэффициентами поглощения и излучения. Он справедлив для любого теплового излучения:

$$S_\nu = B_\nu(T), \quad \mathcal{E}_\nu = k_\nu B_\nu(T),$$

где B_ν – функция Планка.

Для равновесного излучения функция Планка может быть записана в виде:

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right)^{-1}. \quad (2.19)$$

Размерность функции Планка: эрг/см² · с · Гц · стер.

В (2.19) $k \approx 1.38 \cdot 10^{-16}$ [эрг/К] – постоянная Больцмана, $h = 6.625 \cdot 10^{-27}$ [эрг · с] – постоянная Планка.

Термодинамическое равновесие – это такое состояние, при котором устанавливается баланс всех элементарных физических процессов: излучения, поглощения, ионизации, рекомбинации и т.д. При этом прямые и обратные процессы идут с одинаковыми скоростями. При термодинамическом равновесии существует

только одно значение температуры, определяющее физическое состояние среды. Но в действительности термодинамическое равновесие нигде строго не выполняется.

Локальное термодинамическое равновесие означает, что в каждой бесконечно малой области есть баланс элементарных физических процессов, который поддерживает термодинамическое равновесие. При этом температура является функцией координат и времени.

Тепловым излучением называют излучение среды, в которой энергия хаотического движения частиц переходит в энергию фотонов. Важным примером теплового излучения является излучение абсолютно черного тела; это излучение находится в полном термодинамическом равновесии со средой, поэтому называется равновесным.

Для излучения абсолютно черного тела интенсивность равна планковской, т.е. $I_\nu = B_\nu(T)$, для теплового излучения функция источника равна функции Планка $S_\nu = B_\nu(T)$. Но спектр может иметь иную форму.

Модели распределения пыли

Рассмотрим разные модели распределения звезд и пыли [8].

1. Модель поглощающего экрана.

Эта модель представляет собой слой поглощающего вещества, расположенного между наблюдателем и источником излучения (галактикой). В этом случае яркость, неискаженная поглощением, равна $\varepsilon_* T'$, где ε_* – полная светимость галактического диска в единице объема, а T' – толщина галактики вдоль луча зрения.

Искаженная поглощением интенсивность галактики будет равна $\varepsilon_* T' \exp(-x'/\lambda)$, где λ – средняя длина свободного пробега фотонов, идущих от источника излучения без учета поглощения света.

При этом $x' = x \operatorname{cosec} \alpha$, $T' = T \operatorname{cosec} \alpha$, где x и T – толщина поглощающего экрана и галактики соответственно при $i = 0$. Тогда поверхностная яркость будет равна

$$I(\alpha) = \varepsilon_* T \operatorname{cosec}(\alpha) \exp(-x \operatorname{cosec}(\alpha)/\lambda).$$

Для оптически тонких галактик (когда $\tau = x/\lambda \ll 1$) яркость

убывает по мере уменьшения α . Связь поглощения с оптической толщиной осуществляется по формуле:

$$A = 1.086(x/\lambda) = 1.086\tau.$$

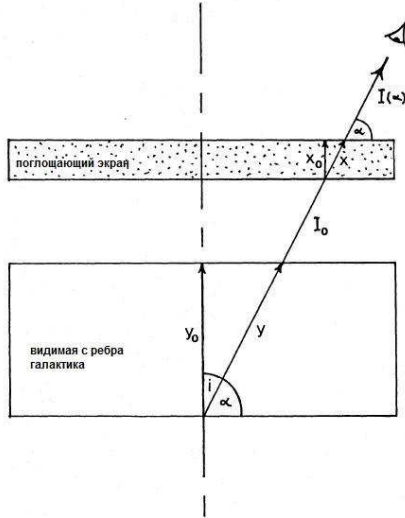


Рис. 2.2. Модель поглощающего экрана.

2. *Модель однородного слоя.* Здесь рассматривается слой, в котором равномерно перемешаны звезды, газ и пыль.

Поверхностная яркость вычисляется как

$$\int_0^T \epsilon_* \exp(-x/\lambda) dx = \epsilon_* \lambda [1 - \exp(-T/\lambda)],$$

$\tau = T/\lambda$ – полная оптическая толщина слоя.

Для оптически тонкого слоя ($\tau \ll 1$) $I(i = 0) = \epsilon_* T$, для оптически толстого ($\tau \gg 1$) $I(i = 0) = \lambda T$. Если слой (диск галактики) расположен под углом i к наблюдателю, то поверхностная яркость записывается в виде:

$$I(i) = \epsilon_* \lambda (1 - \exp[-T \sec(i)/\lambda]).$$

Если слой оптически толстый ($\tau \gg 1$), то его поверхностная яркость не зависит от наклона: $I(0) = I(i) = \varepsilon_* \lambda$, а если слой оптически тонкий, поверхностная яркость увеличивается с ростом $\sec(i)$:

$$I(i) = \varepsilon_* T \sec(i).$$

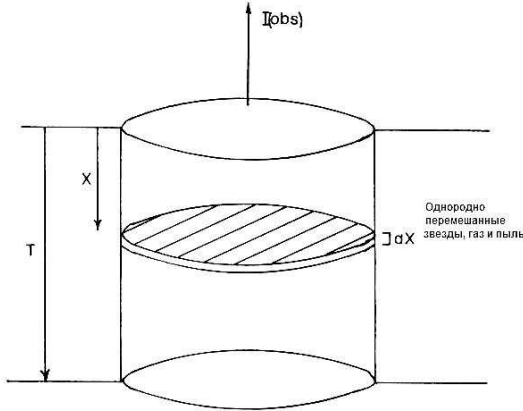


Рис. 2.3. Модель однородного слоя.

Светимость при этом будет равна

$$L(i) = \pi ab I(i) = \pi a^2 \cos i \cdot I(i) = \begin{cases} \pi a^2 \varepsilon_* \lambda \cos i, & \tau \gg 1, \\ \pi a^2 \varepsilon_* \lambda \tau, & \tau \ll 1, \end{cases}$$

где a, b – большая и малая полуоси диска.

Когда галактика видна под произвольным углом к лучу зрения, наблюдаемая центральная поверхностная яркость диска (μ_0^{obs}) обычно пересчитывается к значению, которое было бы у галактики при $i = 0^\circ$ в случае отсутствия внутреннего поглощения:

$$\mu_0^{face-on} = \mu_0^{obs} + 2.5 \lg \frac{a}{b}.$$

Сравнивая поверхностные яркости слоя с пылью и без нее, можно выявить связь между оптической толщиной и поглощением в звездных величинах:

$$A = -2.5 \lg \frac{\varepsilon_* \lambda [1 - \exp(-\tau)]}{\varepsilon_* T} = -2.5 \lg \frac{1 - \exp(-\tau)}{\tau}.$$

Оптическая толщина однородного слоя больше, чем у поглощающего экрана, потому что не вся пыль поглощает свет. Т.е. при одном и том же значении поглощения A оптическая толщина однородного слоя получается больше оптической толщины экрана.

3. *Модель сандвича* представляет собой звездный диск, в центре которого лежит слой пыли, смешанный со звездами. Толщина слоя относительно звезд принимается равной ζ , $0 < \zeta \leq 1$. Рассмотрим сначала оптически толстый сандвич при $i = 0^\circ$, т.е. сверху. В этом случае нижний слой звезд полностью скрыт от наблюдателя, верхний просматривается без поглощения. Также можно будет видеть пылевой слой вглубь на расстоянии λ . Наблюдаемая поверхностная яркость равна:

$$I(i = 0) = I(opt) = \varepsilon_* T(1 - \zeta)/2 + \varepsilon_* \lambda,$$

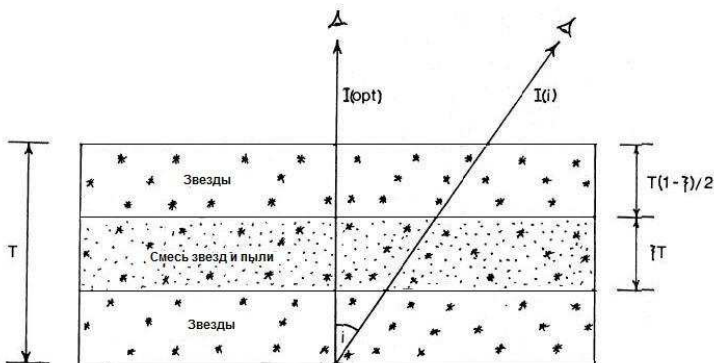


Рис. 2.4. Модель сандвича.

без поглощения (при $\tau = 0$):

$$I(i = 0) = I(bol) = \varepsilon_* T, \quad (2.20)$$

тогда

$$I(opt) = I(bol)[(1 - \zeta)/2 + \zeta/\tau]. \quad (2.21)$$

Из (2.21) видно, что при $(1 - \zeta)/2 > \zeta/\tau$ большая часть света в оптически толстом диске исходит от верхнего слоя, яркость

которого не искажена поглощением. Т.е. выполняются следующие соотношения:

$$\zeta < \tau/(2 + \tau), \quad \exp(-\tau) \ll 1$$

или

$$\tau > 2\zeta/(1 - \zeta), \quad \exp(-\tau) \ll 1.$$

Интегрируя вдоль луча зрения (рассматриваем галактику под углом i), с учетом (2.20) имеем:

$$I(i) = I(bol) \sec(i) \left[\frac{1 - \zeta}{2} \{1 + \exp(-\tau(i))\} + \frac{\zeta}{\tau(i)} \{1 - \exp(-\tau(i))\} \right],$$

где $\tau = \zeta T/\lambda$ и $\tau(i) = \tau \sec(i)$.

Для оптически толстого сандвича с $\zeta = 0.5$ выполняется:

$$I(i) = \varepsilon_* T \sec(i)/4 = I(bol) \sec(i)/4,$$

т.е. поверхностная яркость ведет себя так же, как оптически тонкий однородный слой толщиной $T/4$. При этом светимость равна

$$L(i) = \pi a^2 \cos i \cdot I(i).$$

В случае оптически толстого слоя имеем:

$$L(i) = \pi a^2 I(bol)/4 = \text{const}, \quad \exp(-\tau) \ll 1.$$

При $i = 0^\circ$ величина поглощения вычисляется так:

$$A = -2.5 \lg \left\{ \frac{1 - \zeta}{2} [1 + \exp(-\tau)] + \frac{\zeta}{\tau} [1 - \exp(-\tau)] \right\}.$$

4. *Тройная экспоненциальная модель* предлагается как более реалистичная по сравнению с предыдущими. Наблюдения показывают, что поверхностная яркость в спиральных галактиках убывает экспоненциально по мере увеличения радиуса. В то же время в вертикальном направлении тоже экспоненциально уменьшаются распределения звезд, газа и пыли вместе с z . В соответствии с этим вводятся следующие параметры. Пусть α – масштабный параметр, характеризующий распределения звезд и пыли в радиальном направлении, β^* , β_d – параметры, описывающие распределения по

вертикали звезд и пыли соответственно, при этом $\beta_d = \beta^* \zeta$. $\zeta (\leq 1)$ имеет тот же смысл, что и в модели сандвича.

Дальше в каждой точке диска нужно решить уравнение переноса излучения

$$\frac{dI(z)}{dz} = \varepsilon^*(z) - \frac{I(z)}{\lambda}, \quad (2.22)$$

где ось z может быть наклонена под любым углом к плоскости. Полагая диск геометрически тонким ($\beta^* \ll \alpha$), можно найти аналитическое решение (2.22) при $i \leq 80^\circ$, т.е. поверхностную яркость:

$$I(r, i) = 2I(0, 0)\beta^* \frac{\theta}{\cos i} \exp(-r/\alpha),$$

где

$$\theta = \exp(-\tau) \left[1 + \frac{\tau^2}{(\zeta + 1)(\zeta + 2)} + \frac{\tau^4}{(\zeta + 1)(\zeta + 2)(\zeta + 3)(\zeta + 4)} \dots \right],$$

$$\zeta = \beta_d / \beta^* \left(\frac{\sin i}{\alpha} + \frac{\cos i}{\beta^*} \right) / \left(\frac{\sin i}{\alpha} + \frac{\cos i}{\beta_d} \right),$$

$$\tau = \frac{\tau_0}{\cos i} \exp(-r/\alpha).$$

Внутреннее поглощение в галактиках разных типов.

Наблюдения показывают, что в большинстве спиральных галактик пыль располагается в ветвях. Основной ее объем приходится на внешнюю часть внутренних ветвей, хотя в ряде случаев пыль находится внутри спиральной ветви.

Распределение темной материи неравномерно, проще ее выявить тогда, когда галактика видна с ребра. Но в некоторых галактиках типа Sc, с углом наклона почти 90° , темная полоса вдоль экватора не прослеживается.

При исследовании поглощающих эффектов прибегают к моделированию пылевого и звездного компонентов конкретного объекта. В связи с этим рассмотрим несколько моделей спиральных галактик. В [11] исследуется оптическая толщина семи спиральных галактик. Для звездного и пылевого дисков принимается

экспоненциальное распределение материи, а для балджа – закон $R^{1/4}$. Светимость записывается как сумма светимостей диска и балджа:

$$L(R, z) = L_d \exp\left(-\frac{R}{h_d} - \frac{|z|}{z_d}\right) + L_b \exp\left(7.67S^{1/4}\right) S^{-7/8},$$

$$S = \frac{\sqrt{R^2 + z^2(a/b)^2}}{R_e},$$

где h_d, z_d – масштабные параметры диска, R_e – эффективный радиус балджа, a и b – его большая и малая полуоси соответственно. Центральная поверхностная яркость диска и балджа задаются соотношениями:

$$B_{0d} = 2L_d h_d, \quad B_{0b} = 5.12L_d R_e.$$

Для коэффициента поглощения, являющегося характеристикой пылевой материи, дается такое выражение:

$$k_\lambda(R, z) = k_\lambda \exp\left(-\frac{R}{h_{dust}} - \frac{|z|}{z_{dust}}\right),$$

где k_λ – значение коэффициента в центре диска, h_{dust} и z_{dust} – масштабные параметры в горизонтальном и вертикальном направлениях соответственно. Модельная оптическая толщина в центре диска при $i = 0^\circ$ равна $\tau_\lambda^0 = 2k_\lambda z_{dust}$.

Все вычисления проводились внутри цилиндра с радиусом $R_{\max} = 3 \max(h_d, h_b)$ и полувысотой $6 \max(z_d, R_e)$, при таких обозначениях учитывается практически весь галактический свет и вся пыль.

Для параметров модели были получены следующие значения (в полосе В): $z_d \approx 0.4$, $h_d \approx 5$, $B_{0d} \approx 20 \text{ mag/arc sec}^2$ для звездного компонента и $z_{dust} \approx 0.5z_d$, $h_{dust} \approx h_d$ для пылевого.

Выбирая среднее значение для z_{dust} во всех полосах и используя полученные значения центральной оптической толщины ($\tau_\lambda^0 = 2k_\lambda z_{dust}$) в каждом фильтре, в [11] нашли значения коэффициента экстинкции в каждой полосе. Например, для NGC5907 получилось: $k_B/k_V = 1.12$, $k_I/k_V = 0.61$.

Основными выводами авторов статьи [11] были:

- 1) оптическая толщина в центре оказалась меньше значений толщины во всех оптических полосах, это указывает на то, что типичные спиральные галактики, подобные смоделированным, должны быть полностью прозрачны, когда наблюдаются «плашмя», т.е. при угле наклона 0° ;
- 2) параметр z_{dust} , характеризующий распределение пыли по вертикали, примерно в два раза меньше аналогичного параметра для звезд, т.е. z_d , что означает, что пыль больше всего сконцентрирована в плоскости диска;
- 3) параметр h_{dust} , характеризующий распределение пыли по горизонтали, в 1.4 раза больше параметра h_d , это говорит о том, что протяженность темной материи в радиальном направлении больше протяженности звезд;
- 4) найденная масса пыли оказалась на порядок величины больше найденной ранее; отношение массы газа к массе пыли получилось почти таким же, как аналогичное отношение для нашей Галактики;
- 5) полученный закон поглощения подходит и для нашей Галактики.

В [7] рассматривается выборка из 15000 слабых спиральных галактик для статистического определения их внутреннего поглощения путем исследования спроектированной поверхностной яркости. Рассеяние света не учитывается. Как и в предыдущем случае, здесь представлена трехкомпонентная модель, состоящая из звездного диска, балджа и пылевого слоя.

Для светимости балджа принято выражение:

$$L_b(r) = L_e \left(\frac{r}{r_e} \right)^{7/8} \cdot \exp \left(-7.67 \left(\frac{r}{r_e} \right)^{1/4} \right),$$

$$r^2 = \left(x^2 + y^2 + \left(\frac{z}{q} \right)^2 \right)^{2/3},$$

где (x, y, z) – координаты заданной точки в галактике, а q – истинное отношение осей балджа. Светимость диска задана выражением вида:

$$L_d(R, z) = \begin{cases} L_0 \exp \left(-\frac{R}{r_0} - \frac{|z|}{z_0} \right), & R \leq R_{\max} \\ 0, & R > R_{\max}, \end{cases}$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Общая светимость равна: $L(x, y, z) = L_b(x, y, z) + L_d(x, y, z)$.

Пылевой компонент задается введением коэффициента поглощения:

$$k(R, z) = \begin{cases} k_0 \exp\left(-\frac{R}{r'_0} - \frac{|z|}{z'_0}\right), & R \leq R'_{\max} \\ 0, & R > R'_{\max}. \end{cases}$$

Оптическая толщина в центре, когда галактика видна плашмя, равна: $\tau_0 = 2k_0 z'_0$. Она определяется в точке (x, y, z) интегрированием k вдоль луча зрения от наблюдателя до этой точки. Интенсивность излучения в заданной точке находится интегрированием вдоль луча зрения следующего выражения:

$$L_{obs}(x, y, z) = L(x, y, z) \exp(-\tau).$$

Чтобы выяснить, являются выбранные галактики оптически толстыми или тонкими, проводились вычисления для разных углов наклона и разных значений оптической толщины. В итоге получилось, что для значения $\tau_0 = 7$ галактики не являются оптически тонкими. Вообще, был сделан вывод о том, что результаты исследования во многом зависят от качества модели, т.е. нужно выбирать наиболее реалистичную модель, чтобы получить более близкую к реальности картину внутреннего поглощения в галактике.

На основании результатов исследований поглощающих эффектов во многих работах оказалось, что поглощение присутствует и в центральных областях дисков спиральных галактик и оно отнюдь не пренебрежимо. С увеличением наклона диска к лучу зрения влияние поглощения возрастает.

Пылевые составляющие в ряде случаев наблюдаются как в карликовых, так и в гигантских эллиптических галактиках. По форме они представляют собой небольшие неправильные облака. В отличие от звезд, которые имеют сферическое распределение и сконцентрированы в центре систем, пыль располагается хаотически. Распределение пыли и связанного с ней газа существенно отличается от распределения звезд.

2.7. Заключение

Были даны определения основным фотометрическим величинам, применяемым на практике, рассмотрена проблема точности измерений. На примере нескольких моделей из ряда статей предложены варианты решения задачи восстановления искаженных измерений (некорректно поставленной) с использованием функции рассеяния точки – PSF (Гаусса, Моффата). Также приведены несколько параметрических моделей галактик для исследования эффектов поглощения света в них. Таким образом, была произведена попытка анализа поверхностного распределения яркости как одного из методов изучения звездных систем.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 2

1. *Засов А. В., Постнов К. А.* Общая астрофизика. – Фрязино: Век2, 2006. 493 с.
2. *Кирьянов К. А.* Инструментальная реализация алгоритмов реконструкции искаженных изображений.–20th Int. Conf. on Computer Graphics and Vision Sept. 20-24, 2010, SPb, Russia – <http://www.graphicon.ru/proceedings/2010/technical.html>
3. *Кононович Э. В., Мороз В. И.* Общий курс астрономии. – М: Едиториал УРСС, 2001. 542 с.
4. *Решетников В. П.* Поверхностная фотометрия галактик. Уч. Пособие, СПбГУ, 2003 – <http://astronet.ru/db/msg/1166765>
5. *Физика космоса.* Маленькая энциклопедия. ред. Сюняев Р.А. – М.: Советская энцикл.,1986 – <http://astronet.ru/db/FK86/>
6. *Binney J., Merrifield M.* Galactic astronomy. – Princeton University Press, 1998. – 796 с.
7. *Cunow B.* Internal absorption in spiral galaxies//MNRAS.1992. Vol. 258.P. 251-256.
8. *Disney M., Davies J., Phillips S.* Are galaxy discs optically thick?// MNRAS. 1989. Vol. 239. P. 939-976.
9. *Emsellem E., Monnet G., Bacon R.* The multi-gaussian expansion method: a tool for building realistic photometric and kinematical models of stellar systems.I. The formalism//A & A, 1994, Vol. 285, P. 723-738.
10. *Moffat A. F. J.* A theoretical investigation of focal stellar images in the photographic emulsion and application to photographic photometry //A&A. 1969. Vol. 3. P. 455-461.
11. *Xilouris E. M., Byun Y. I., Kylafis N. D.* A spiral galaxies optically thin or thick? //A&A. 1999. Vol. 344. P. 868-878.

ГЛАВА 3. ПРИНЦИПИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ДИНАМИКИ ГАЛАКТИК

3.1. Введение

Современная физика знает четыре основных вида взаимодействия. Сильные и слабые взаимодействия рассматриваются в физике элементарных частиц. Электромагнетизм изучается специальным разделом физики — электродинамикой. Естественно выделить часть физики, в которой рассматриваются гравитационно взаимодействующие системы, и которую уместно назвать **гравидинамикой**. Поскольку гравитационные поля могут играть определяющую роль только в космических масштабах и обычно действительно доминируют там, гравидинамика оказывается тесно связанной с астрономией.

Согласно [24], *динамика звёздных систем — это раздел гравидинамики, рассматривающий (как сплошную среду или дискретно) совокупности большого числа гравитирующих тел в применении к изучению реальных звёздных систем.*

Сходное определение дается в фундаментальной монографии Дж. Бинни и С. Тримейна [98]: «Звёздные системы — это гравитационно связанные собрания звёзд . . . Поведение этих систем определяется ньютоновскими законами движения и ньютоновским законом гравитации, и изучение динамики звёздных систем составляет раздел теоретической физики, называемый **звёздной динамикой**» (перевод автора).

Можно было бы ожидать, что основные понятия звёздной динамики как сугубо классической науки имеют ясные определения. С. Чандрасекар [87] пытался представить её как ветвь классической динамики — «в виде дисциплины такой же категории, как небесная механика». Он же писал, что некоторые из проблем «звёздной динамики настолько строго классические, что трудно поверить, что они не обсуждались, например, еще в „Vorlesungen“ Якоби». К сожалению, большая часть звёздной динамики по Чандрасекару оказалась несовместимой с условием самогравитируемости и имеет, в основном, историческое значение.

За более чем столетнюю историю динамика звёздных

систем достигла значительных успехов. Вместе с тем существуют трудности принципиального характера, касающиеся понимания её основных положений. Некоторые из них рассматривали Б. П. Герасимович [26], С. Чандрасекар [107], [109], Р. Курт и Э. Финлей-Фрейндлих [126], [150], К. Ф. Огородников [53], [54], Т. А. Агемян [2], Г. М. Идлис [33], И. Л. Генкин и Ф. А. Цицин [25], [83], [84] и др. Даже сейчас с интересом читается статья [112], написанная одним из основоположников звёздной динамики К. В. Л. Шарлье и первоначально опубликованная в 1917 г. в журнале «Scientia».

В последние десятилетия принципиальные вопросы звёздной динамики обсуждались в монографии [98] и статьях [92], [97], [99], [113], [154], [170]. Особо необходимо отметить работы покойных В. А. Антонова [11], [91] и Г. Э. Кандрупа (в особенности [142], [143], [145], [146]).

Глубокая причина исследуемых проблем лежит в том, что в динамике ансамблей гравитирующих точечных масс отражается то единство дискретного и континуального в их строении, значение которого подчеркивал К. Ф. Огородников [55]. В сущности, эти проблемы являются общими для всех твёрдых, жидких, газообразных и плазменных сред. Некоторые из них обсуждал Ю. Л. Климонтович (например, [35], [36], [37]). Дальнейшее действие гравитации резко обостряет эти проблемы. С дискретностью можно связать первопричину флуктуаций (как и для плазмы [38]), на фундаментальном значении которых настаивал Ф. А. Цицин [84], [85]. Роль подобных флуктуаций в звёздной динамике рассматривали Г. Э. Кандруп [146] и М. Вейнберг [170].

Принципиальные вопросы динамики галактик автор обсуждал в статьях [59], [60], [62], [66], [92] и брошюре [65]. Ниже более подробно будут рассматриваться некоторые из них. Предполагается, что читатель знаком с основными понятиями динамики звёздных систем, например, по книгам [4], [55], [73], [87], [98].

3.2. Объём звёздной системы

Первый вопрос, с которым мы сталкиваемся при построении

теории звёздных систем как статистических ансамблей N гравитирующих материальных точек состоит в следующем. Что понимать под объёмом звёздной системы? Этот вопрос обсуждал Ф. А. Цицин [82]. Он предложил использовать с этой целью берналовское понятие объёма [94], которое состоит в следующем. Построим вокруг каждой звезды область («элементарную ячейку»), к которой отнесём все точки пространства, для которых расстояние до данной звезды меньше, чем до других звёзд. Такие ячейки называют «областями Дирихле – Вороного», и их свойства исследовались рядом математиков, в частности, Б. Н. Делоне (см. [7]). Соберём так называемую «мозаику Вороного» — построим объединение всех ограниченных ячеек. Его объём примем за объём системы.

В одномерном случае, предполагая, что частицы распределены на прямой равномерно с естественными флуктуациями, Ф. А. Цицин нашёл функцию распределения длин этих ячеек (отрезков) (см. [65]). Обозначим её $h(z)$. Оказалось, что

$$h(z) = 4\kappa^2 z \exp(-2\kappa z).$$

Здесь κ — линейная плотность частиц. В двумерном и трехмерном случаях аналитическое решение подобной задачи, как кажется, невозможно. Представляет интерес провести соответствующие компьютерные эксперименты. Затем следует исследовать неоднородные модели.

Подобный подход, однако, кажется не вполне удовлетворительным, и прежде всего потому, что является чисто геометрическим, применимым в одинаковой степени как к гравитирующим системам, так и к жидкостям, и к кристаллическим телам. Кроме того, следовало бы обдумать, как модифицировать определение ячеек в случае дробной фрактальной размерности, меньшей размерности пространства (например, если звёзды располагаются преимущественно вереницами, вдоль некоторых линий [88]), чтобы исключить преобладание ячеек бесконечного объёма.

Как ни определять границу автономных гравитирующих систем, потенциальный барьер на ней будет отсутствовать. Система будет неограниченно расширяться, что было ясно

ещё А. Пуанкаре [157]. Объём системы со временем будет стремиться к бесконечности, а средняя плотность — к нулю. В то же время размеры и объём реальных звёздных систем мы представляем конечными. Об ограниченности размеров нашей Галактики заключил в своё время К. Ф. Боттлингер [101], объясняя известный оортковский предел на скорости звёзд в окрестности Солнца. Г. М. Идлис [32] выдвинул положение о принципиальной ограниченности реальных звёздных систем.

В [65] предлагалось следующим образом определять объём звёздных систем. Следуя Ф. А. Цицину [83], откажемся от постулата автономности звёздных систем. Примем, что звёздная система — это совокупность таких звёзд, чье взаимное притяжение превосходит воздействие со стороны остальных объектов. Под объёмом такой системы естественно понимать объём той части пространства, в которой суммарное гравитационное притяжение пробной частицы со стороны членов системы превосходит притяжение внешних объектов.

Как конкретно реализовать данную идею? Начнём с простейшей модели скопления, обращающегося по круговой орбите в стационарной осесимметричной галактике. Задачу о движении звезды в совместном поле скопления и галактики автор предложил называть «задачей Бока» [61]. Как известно, для задачи Бока существуют интеграл Якоби и критическая поверхность Хилла [63], [65]. Объём области, ограниченной этой поверхностью, и следует принять за объём скопления. Конечно, даже в этом случае имеются усложняющие обстоятельства. Вообще говоря, неизвестна судьба звёзд со значением постоянной Якоби, превышающим критическое. Обычно считают, что они улетают за пределы критической поверхности, но не доказано, что они не могут вернуться. Для некоторого модельного потенциала орбиты подобных звёзд исследовались в работе [120]. В том частном случае, когда и скопление, и галактика аппроксимируются точечными массами (классическая задача Хилла [77]), удалось найти приближённые условия вылета [160]. Не исключено, однако, что перед тем, как покинуть скопление, звёзды могут длительное время находиться в его окрестности.

Если орбита звезды не является круговой, то интеграл Якоби и критическая поверхность Хилла, вообще говоря, не существуют.

Тогда в качестве объёма скопления приходится принимать объём так называемой сферы тяготения (см. обсуждение в [20]), а его размер отождествлять с так называемым приливным радиусом скопления по С. фон Хорнеру [169] и А. Кингу [148]. Хотя серьёзные динамические основания для этого отсутствуют, но численные расчёты (например, [138]) показывают, что, в общем, приливной радиус можно применять для оценки размеров скопления. Некоторую модификацию критерия приливной устойчивости, в которой учитывалось и приливное взаимодействие скоплений, ранее предложил Г. М. Идлис [31].

В случае галактик ситуация является более сложной. Можно, однако, ввести «эффективную» поверхность Хилла, которая будет в этом случае «дышащей» [49].

3.3. Регулярные и иррегулярные силы

Со времени А. С. Эддингтона [125] силу, действующую на звезду, принято разделять на две части — сглаженную (которая определяется свойствами системы как сплошной гравитирующей среды) и флуктуирующую, наличие которой обязано дискретности звёздных систем. К. Шварцшильд [161] в посмертно опубликованных заметках назвал эти части соответственно **регулярной** и **иррегулярной** силами. После статьи Б. П. Герасимовича [26] эти термины стали практически общепринятыми в отечественной звёздной динамике [4], [52], [55], но в современной зарубежной литературе встречаются крайне редко. Регулярную силу чаще называют «сглаженной» (smoothed) (что кажется более предпочтительным) или «объёмной» (bulk). Иррегулярную силу иногда называют «флуктуирующей» или «случайной». Последнее наименование не представляется удачным, поскольку, как мы теперь знаем, регулярные силы могут, как и иррегулярные, приводить к стохастическим изменениям в звёздных системах.

Как определять понятия регулярных и иррегулярных сил — вопрос очень непростой, и он служил предметом специальных обсуждений [20], [22], [89], [93], [107], [123], [142], [144].

Согласно самому простому, но наименее удовлетворительному определению [90], иррегулярная сила в данной точке внутри

системы — это суммарная сила притяжения от нескольких (от 5 до 15) ближайших звёзд. Тогда кумулятивный эффект далёких звёздных сближений следует отнести к воздействию регулярных сил, как это считал ещё К. В. Л. Шарлье [111]. По другому определению регулярное поле — сглаженная часть полного силового гравитационного поля [30], но оно также не может считаться приемлемым (см. его обсуждение в [20]). В частности, сомнения вызывает возможность корректного усреднения по пространству силы, действующей на звезду, хотя соответствующая методика и разрабатывалась [102], [167]. Наиболее удовлетворительным кажется третье определение (первоначальное определение Эддингтона [125]), согласно которому регулярная сила — это сила притяжения сплошной гравитирующей среды, получающейся «размазыванием» массы звёзд по системе [4].

Таким образом, если $\varrho(\mathbf{r})$ — плотность масс, то регулярная сила

$$\mathbf{F}_{\text{reg}}(\mathbf{r}) = - \int \frac{G\varrho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r}'$$

(G — гравитационная постоянная).

Но сейчас же встает вопрос, как производить размазывание [149], т. е. как определять звёздную плотность $\varrho(\mathbf{r})$ в данной точке пространства, если отказаться от интуитивно понятного, но логически противоречивого понятия «макроскопический элемент объёма» [54], [107]. И. Л. Генкин [20] предлагал использовать с этой целью области Дирихле – Вороного. В каждый момент времени масса звезды равномерно распределяется по внутренности той элементарной ячейки, центром которой является данная звезда. Таким образом, плотность оказывается кусочно-постоянной (ступенчатой) в пространстве функцией времени. Заметим, что для фазового пространства сходный подход рассматривался в [141]. Затем эту плотность следует усреднить за промежуток времени τ порядка нескольких типичных времён пролёта между звёздами. Естественно положить

$$\tau = d/\sigma,$$

где d — среднее расстояние между звёздами, а σ — средняя относительная скорость звёзд [86]. Очевидно, что $d \approx n^{-1/3} \approx$

$R/(N/4)^{1/3}$, где n — среднее число звёзд в единице объёма, R — характерный размер системы, N — число звёзд. В системах без движения центроидов по теореме вириала $3\sigma^2 \approx GM/R$, где M — масса системы, а тогда

$$\tau \approx \frac{k\tau_c}{N^{1/3}},$$

где $k \approx 2.6$,

$$\tau_c = \left(\frac{R^3}{GM} \right)^{1/2}$$

— так называемое **время пересечения**, характерное время действия регулярных сил [55].

Конечно, трудно представить, чтобы в какой-либо реальной галактике плотность определялась таким образом (даже если бы были известны координаты и скорости всех звёзд). Однако было бы интересно выполнить эту процедуру на компьютере.

Но можно рассуждать следующим образом. Будем для простоты считать, что у всех звёзд одна и та же масса m . Пусть N гравитирующих точечных масс, составляющих звёздную систему, распределены в соответствии с некоторым вероятностным законом $n(\mathbf{r})/N$. Тогда вероятность обнаружить в области D хотя бы одну звезду

$$P(D) = \frac{1}{N} \int_D n(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}.$$

Сглаженную плотность масс $\varrho(r)$ мы можем отождествить с $m n(\mathbf{r})$. В случае спектра масс следует вычислить соответствующий интеграл Стильбеса. Силу притяжения от этого сглаженного распределения будем называть регулярной силой.

Итак, если известна функция $n(\mathbf{r})$, то нет необходимости строить ячейки Вороного. Мы имеем здесь *вероятностный подход* к звёздным системам [65], который широко применяется в монографии [98]. Вероятностная трактовка ряда физических понятий обсуждалась Т. А. Агекяном [5].

Если звёзды распределены достаточно «плотно», то данное определение совпадает с традиционным (вследствие закона больших чисел). Если же система сильно разрежена, то реальное число звёзд в малом объёме может сильно отличаться от его математического ожидания. В этом случае существенными

окажутся флуктуации силы, действующей на звезду, вследствие дискретности системы.

Кажется поучительным сравнить описанные выше подходы к определению регулярных сил. Подход Генкина применим и к системам небольшого числа тел, которые кажутся совершенно детерминированными. Он перекликается с предложенным Т. А. Агеяном и А. С. Барановым [6] способом построения моделей звёздных систем в результате компьютерных экспериментов над небольшим числом тел. Вероятностный подход предполагает, что существует «Бог, играющий в кости» (см. переписку А. Эйнштейна с М. Борном [67]). Фактически, здесь принимается точка зрения А. А. Власова [16], согласно которой первичным является описание природы с помощью статистических функций распределения.

Можно предложить ещё один подход к определению иррегулярных сил для дискретных систем. По-прежнему будем считать, что звёзды распределены согласно некоторому вероятностному закону $n(\mathbf{r})$. Тогда сила \mathbf{F} , действующая в каждый момент времени на пробную звезду, является случайным вектором, распределённым в каждый момент времени по некоторому закону $\mathcal{W}(\mathbf{F}, \mathbf{r})$ [86], [107], [110], [144]. Например, при равномерном распределении в пределе бесконечного числа тел (и пренебрежении корреляциями, см. [78]!) получается закон Хольцмарка [5], [86]. Для других случаев законы распределения случайной силы найдены аналитически или численно в большом числе работ, в частности, в [89], [93], [95], [122], [124], [142]. Будем называть регулярной силой в данной точке в данный момент времени математическое ожидание случайной силы, т. е.

$$\mathbf{F}_{\text{reg}}(\mathbf{r}) = \int \mathbf{F} \mathcal{W}(\mathbf{F}, \mathbf{r}) d^3\mathbf{F}.$$

Иррегулярная же сила — это разность между полной и регулярной силой. Как соотносится это определение с предыдущим? По-видимому, из результатов Дж. Л. Камма [103] следует их совпадение. Фактически, сходное определение принимал П.-А. Шавани [116].

При традиционном определении регулярных и иррегулярных сил (например, [4], [55]), вообще говоря, не очевидно, что иррегулярные силы являются случайными. Их стохастичность

даже специально проверялась при компьютерных экспериментах [89]. Напротив, из определений, приведенных выше, это сразу же следует. Следовательно, действие иррегулярных сил должно изучаться методами теории случайных процессов. Заметим также, что при традиционном подходе грань между регулярными и иррегулярными силами представляется иногда довольно условной [20], [22]. В некоторых случаях (например, при рассеянии звёзд на массивных объектах) различить их затруднительно [50]. Кажется, что данные выше определения позволяют разрешить сомнения (нужно «всего лишь» условиться, что такое случай). В этой связи чрезвычайно интересным кажется следующий результат Г. Э. Кандрупа [144]. Следуя С. Чандрасекару и Дж. фон Нейману [110], он рассмотрел для нескольких моделей функцию распределения случайной силы $\mathcal{W}(\mathbf{F})$. Находилось среднее значение $\overline{\mathbf{F}}$ (которое выше предлагалось принимать за регулярную силу), после чего исследовалось распределение флуктуирующей части $\mathbf{F}' = \mathbf{F} - \overline{\mathbf{F}}$ (т. е. иррегулярной силы). В исследованных примерах распределение флуктуирующей части силы не зависит от среднего. Это подтверждает, что разделение силы на среднюю и флуктуирующую части носит объективный характер. Флуктуирующая сила по порядку величины близка к силе притяжения со стороны нескольких ближайших соседей [110], чего и следовало ожидать.

Таким образом, у нас исходной функцией описания звёздных систем оказывается случайная функция $n(\mathbf{r}; t)$. По ней определяются закон распределения случайной силы $\mathcal{W}(\mathbf{F}, \mathbf{r}; t)$ и её математическое ожидание — регулярная сила. После этого из столкновительного кинетического уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}_{\text{reg}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \text{St}f$$

в принципе определяется фазовая плотность $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t)$ — функция распределения в шестимерном фазовом пространстве, как функция фазовых координат и времени. Её интегрирование по скоростям возвращает к $n(\mathbf{r}; t)$. В правой части этого уравнения стоит так называемый *столкновительный* (Stoß) член, отражающий действие иррегулярных сил, который будет обсуждаться далее.

3.4. О действии иррегулярных сил

В теории иррегулярных сил обычно начинают вычисления того, насколько при парном сближении звёзд (гиперболическая задача двух тел) изменяется относительная скорость звезды [55], или, что правильнее, её энергия [104], или направление её движения [171]. Затем полученное выражение статистически суммируется по сближениям данной звезды со всеми телами системы (кумулятивный эффект) (при некоторых подходах — по сближениям только с близкими соседями). Действительно, для далёких сближений справедлив принцип суперпозиции [42], [55]. С другой стороны, тесные даже двойные сближения происходят крайне редко (см. табл. 2.1 в монографии Л. Спицера [76], показывающую относительный вклад тесных и далёких сближений, или аналогичную таблицу в [119]), так что тесными кратными сближениями можно пренебречь. Метод приближённого учёта эффекта кратности предложил Т. А. Агекян [3].

При этих расчётах считается, что сближающиеся звёзды приходят из бесконечности и расходятся на бесконечное расстояние. Очевидно, однако, что так поступать неверно, когда рассматриваются «сближения» с прицельными расстояниями порядка размеров макроскопического элемента объёма и больше, например, порядка размеров системы. В частности, при оценке так называемого **времени релаксации** (характерного времени действия иррегулярных сил) необходимо при каждом сближении находить, а затем статистически суммировать изменение скорости не за бесконечный интервал времени, а за конечный (и пока ещё неизвестный) период — время релаксации [22], [135], [156].

Вспомним классическую теорию звёздных сближений Джинса — Чандрасекара. Для наших целей достаточно ограничиться выражением для времени релаксации по К. Ф. Огородникову [55], хотя его трактовка будет несколько иной. Напомним вывод этого выражения, следуя [55] (а также [73], [172]). Аналогичным образом можно проанализировать имеющие тот же порядок чандрасекаровские времена релаксации по энергии T_E и направлению движения T_D [148], [172].

Начнём с гиперболической задачи двух тел. Обозначим массы

тел через m (рассеиваемая звезда), m_s (рассеиватель). Пусть $(\pi - \psi)$ — угол между асимптотами гиперболы, \mathbf{v}_- , \mathbf{v}_+ — векторы относительной скорости до и после сближения, $v = |\mathbf{v}_-| = |\mathbf{v}_+|$ — величина относительной скорости сближения, h — постоянная площадей, $p = h/v$ — прицельное расстояние. Из решения задачи двух тел выводится формула

$$\operatorname{tg} \frac{\psi}{2} = \frac{G(m + m_s)}{pv^2}.$$

Очевидно, что вектор относительной скорости поворачивается на угол ψ (т. е. ψ — угол между векторами \mathbf{v}_- , \mathbf{v}_+). Обозначим

$$p_{\perp} = \frac{G(m + m_s)}{v^2}.$$

Как известно, сближение с данным прицельным расстоянием при данной величине относительной скорости v будет настолько сильным, что звезда изменит направление своего относительного движения на 90° . Введём вектор $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_+ - \mathbf{v}_-$ и обозначим Δv длину этого вектора. Очевидно, что

$$\frac{\Delta v}{v} = 2 \sin \frac{\psi}{2}.$$

Тогда

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{2G(m + m_s)}{pv^2 \sqrt{1 + \frac{G^2(m + m_s)^2}{p^2 v^4}}}$$

— формула Резерфорда – Джинса [71], [140]. Используя обозначение p_{\perp} , перепишем её в более компактном виде:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{2G(m + m_s)}{pv^2 \sqrt{1 + \frac{p_{\perp}^2}{p^2}}}.$$

Для далёких сближений с $p \gg p_{\perp}$

$$\frac{\Delta v}{v} \approx 2p_{\perp}/p.$$

Теперь рассмотрим кумулятивный эффект сближений (считая их независимыми и применяя к слабым далёким сближениям *принцип суперпозиции*; для плазмы обоснование такого подхода дано в [119]). Считаем, что у всех рассеивателей одна и та же масса m_s . Каждое сближение считается произошедшим мгновенно, в точке, так что за время сближения звезда не успевает переместиться внутри системы. Предполагается, что в течение того интервала времени, за который мы оцениваем эффект сближений, звезда движется по инерции, т. е. равномерно и прямолинейно, в среде с постоянной плотностью числа рассеивателей n_s . Наконец, распределение относительных скоростей считается изотропным.

При сделанных предположениях параметрами каждого сближения являются p и v . Для вычисления кумулятивного эффекта следует подсчитать число сближений с данными значениями параметров за время t и найти соответствующее изменение направления скорости (или иных величин), а затем *статистически* просуммировать это изменение по всем допустимым значениям параметров. За время t произойдет

$$2\pi p dp \cdot vt \cdot f(v) dv \cdot n_s = Q dp dv \cdot t$$

сближений со значениями прицельного расстояния от p до $p + dp$ и начальной относительной скорости от v до $v + dv$. Здесь $f(v)$ — функция распределения относительных скоростей с условием нормировки $\int f(v) dv = 1$. В результате этих сближений получим за время t изменение

$$(\Delta v)^2 \cdot Q \cdot dp dv \cdot t = \frac{4p_{\perp}^2 v^2}{p^2(1 + p_{\perp}^2/p^2)} Q \cdot dp dv \cdot t.$$

В известном приближении Джинса — Ландау [46], [139], когда пренебрегается искривлением (гиперболической) орбиты при двойном сближении (что соответствует далёким сближениям, $p \gg p_{\perp}$),

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{2G(m + m_s)}{pv^2},$$

и выписанное выше выражение упрощается:

$$(\Delta v)^2 \cdot Q \cdot dp dv \cdot t = 8\pi G^2(m + m_s)^2 \cdot tn_s \frac{dp}{p} \frac{f(v) dv}{v}.$$

Подробный анализ этого приближения сделал недавно Р. Серафин [163].

Полное изменение за время t вследствие кумулятивного эффекта обозначим $(\delta v)^2$. Получим:

$$(\delta v)^2 = \int \int \frac{4p_{\perp}^2 v^2}{p^2(1 + p_{\perp}^2/p^2)} Q dp dv \cdot t,$$

или

$$(\delta v)^2 = 8\pi t n_s G^2(m + m_s)^2 \int \frac{f(v) dv}{v} \int \frac{p_{\perp}/p}{1 + p_{\perp}^2/p^2} d\frac{p}{p_{\perp}}.$$

Обозначим

$$\Lambda(p_{\max}, p_{\min}) = \int_{p_{\max}/p_{\perp}}^{p_{\min}/p_{\perp}} \frac{p_{\perp}/p dp/p_{\perp}}{1 + p_{\perp}^2/p^2}.$$

Очевидно, что

$$\Lambda(p_{\max}, p_{\min}) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + p_{\max}^2/p_{\perp}^2}{1 + p_{\min}^2/p_{\perp}^2}.$$

Данное выражение для Λ привели А. М. Микиша и Ф. А. Цицин [48]. При нахождении времён релаксации T_D , T_E выражения для логарифмического члена получаются несколько иными, хотя и переходящими в данное в пределе большого числа тел [172]. Фактически, ранее оно было найдено в [104], [119]. Тогда

$$(\delta v)^2 = t \cdot 8\pi G^2(m + m_s)^2 n_s \int \Lambda(p_{\max}, p_{\min}) \frac{f(v)}{v} dv.$$

Будем считать, что иррегулярные силы сработали (как говорят, *произошла релаксация*), когда $(\delta v)^2$ сравняется с квадратом средней скорости рассеиваемых звёзд σ^2 . Тогда время релаксации

$$\tau_r = \frac{\sigma^2}{8\pi G^2(m + m_s)^2 n_s} \frac{1}{\int \Lambda(p_{\max}, p_{\min}) \frac{f(v)}{v} dv}.$$

Обычно считается, что $\Lambda(p_{\max}, p_{\min})$ можно с достаточной точностью считать не зависящим от v . Предполагается, что зависимость от скорости под знаком логарифма (в p_{\perp}) пренебрежимо слабая, так что Λ можно вынести из под интеграла и заменить в p_{\perp}^2 квадрат скорости на дисперсию (аналогично [8]). У Л. Спизера [76] этот вопрос обходится. Множитель Λ часто называют ньютоновским или (по аналогии с плазмой) кулоновским логарифмом. Обозначим

$$\tilde{v} = 1 / \int \frac{f(v)}{v} dv.$$

Тогда приходим к классическому выражению [55]:

$$\tau_r = \frac{\tilde{v}\sigma^2}{8\pi G^2(m + m_s)^2 n_s \Lambda}.$$

В приближении Джинса – Ландау получается такое же выражение, но с

$$\Lambda = \Lambda_L(p_{\max}, p_{\min}) = \ln \frac{p_{\max}}{p_{\min}}.$$

(см. [55], [79], [172]). В случае максвелловского распределения скоростей с дисперсией скоростей (в одном направлении) s

$$f(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{s^3} v^2 \exp\left(-\frac{v^2}{2s^2}\right)$$

легко найти, что

$$\tilde{v} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} s \approx s.$$

Тогда

$$\tau_r = \frac{s\sigma^2}{8\pi G^2(m + m_s)^2 n_s \Lambda}.$$

В случае системы звёзд одной и той же массы m имеем $m_s = m$, $n_s = n$, и естественно положить $s = \sigma$. Тогда

$$\tau_r = \frac{\sigma^3}{32\pi G^2 m^2 n \Lambda}.$$

С помощью теоремы вириала получаем, что тогда

$$\tau_r = \frac{1}{8\sqrt{27}\pi} \frac{\tau_c}{(1 + \gamma^2)^{3/2}} \frac{N}{\Lambda} \gg \tau_c.$$

Здесь $\gamma^2 = V^2/(3\sigma^2)$ — фактор Огородникова, V — скорость центраида.

В случае массивных рассеивателей $m_s \gg m$, а величина s зависит от конкретной задачи. Если рассеиватели — шаровые скопления Галактики или гипотетические чёрные дыры галактического гало, то их скорости относительно звёзд галактического диска будут порядка полной скорости звёзд диска. Тогда

$$3s^2 \approx 3\sigma^2 + V^2 = 3\sigma^2(1 + \gamma^2).$$

Поэтому

$$\tau_r \approx \frac{(1 + \gamma^2)^{1/2}\sigma^3}{8\pi G^2 m_s^2 n_s \Lambda} \approx \frac{\gamma\sigma^3}{8\pi G^2 m_s^2 n_s}.$$

Если же рассеиватели — гигантские молекулярные облака галактического диска, то по-прежнему можем считать $s \approx \sigma$ и

$$\tau_r \approx \frac{\sigma^3}{8\pi G^2 m_s^2 n_s \Lambda}.$$

В этих рассуждениях мы молчаливо предполагали, что релаксация происходит локально, в пределах макроскопического элемента объёма. Тогда σ^2 — локальная дисперсия остаточных скоростей. Этот подход был бы оправдан задним числом, если бы оказалось, что длина свободного пробега звёзд не превосходит размеров макроскопического элемента объёма, а релаксация происходит быстро. В действительности, как известно, эти допущения далеки от выполнения. Поэтому кажется резонным рассматривать и далёкие сближения с прицельными расстояниями вплоть до размеров системы. Тогда относительные скорости v будут порядка полных скоростей. Что же касается σ , то по-прежнему кажется разумным полагать σ^2 порядка дисперсии остаточных скоростей (здесь мы несколько расходимся с [45], [55]). Тогда, если $m_s = m$, $n_s = n$, то

$$\tau_r = \frac{\sigma^3(1 + \gamma^2)^{1/2}}{32\pi G^2 m^2 n \Lambda}.$$

Нам кажется, что именно эту величину следует называть **большим временем релаксации**. Если принять эволюционную схему Т. А. Агеяна [2], то можно предположить, что именно за такое время устанавливается состояние, названное Агеяном квазистационарным в целом (IV стадия эволюции). Однако схема Т. А. Агеяна молчаливо предполагает локальность релаксации.

Теперь обратим внимание на ньютоновский логарифм Λ . Казалось бы, естественно положить $p_{\max} = \infty$, $p_{\min} = 0$, а тогда из выражения для Λ_L в приближении Джинса – Ландау получаем расходимость τ_r . Поэтому для p_{\min} приходится принимать другие значения. Например, можно положить $p_{\min} = \bar{p}_\perp = G(m + m_s)/\sigma^2$, т. е. p_\perp для «типичной» звезды [9], [55], [73], [117] (эту величину иногда называют *длиной Ландау* [117]), или $p_{\min} = d = n^{-1/3}$ (d — среднее расстояние между звёздами), или $p_{\min} = a$, тому расстоянию, на котором иррегулярная сила оказывается сравнимой по своей величине с регулярной [55], [73]. Оправдать такой выбор можно следующими рассуждениями. Приближение Джинса – Ландау предполагает, что сближения — далёкие, к тесным сближениям оно не применимо. Но тесные сближения происходят крайне редко, и их вкладом в кумулятивный эффект можно пренебречь [55], [76]. Разумным кажется при ограничении снизу прицельных расстояний использовать идею А. С. Расторгуева и В. Н. Семенцова [70] и взять такое минимальное прицельное расстояние, что за время релаксации произойдёт хотя бы одно сближение с таким прицельным расстоянием.

Что касается p_{\max} , то можно положить его равным или размеру системы R [9], [148], [42], [55], [73], [76], [115], [117], или среднему межзвёздному расстоянию d [104], [171], [111], [142], или a . Сильным аргументом в пользу принятия p_{\max} равным d является установленная близость закона распределения случайной силы (распределения Хольцмарка) закону распределения силы от ближайшего соседа [110] (для плазмы с учётом дебаевского экранирования ситуация иная [168]). Численные эксперименты Х. Смита [164] также подтверждают, что следует брать $p_{\max} = d = RN^{-1/3}$. Для плазмы ряд авторов рекомендует использовать дебаевский радиус [46], [75], [79], [119]. При этом используется то соображение, что в рамках задачи двух тел можно с достаточной точностью рассмотреть взаимодействие частицы с флуктуациями

плотности (на расстояниях, бóльших, чем межчастичное) [75], [119], т. е. хотя бы частично учесть коллективные эффекты [47]. Интуитивно к этому подходил и К. Ф. Огородников, подчёркивая роль кумулятивного эффекта слабых сближений («прохождений», как он называл их) и принципа суперпозиции [55].

Из теоремы вириала $3M\sigma^2(1 + \gamma^2) = GM^2/R$ следует, что $\overline{p}_\perp \approx 6\gamma^2 R/N$ (если $\gamma \gg 1$). Учитывая, что $a \approx RN^{-1/2}$ и $d \approx RN^{-1/3}$, легко найти, что

$$\Lambda_L(R, \overline{p}_\perp) \approx \ln \frac{N}{6\gamma^2}, \quad \Lambda_L(a, \overline{p}_\perp) \approx \ln \frac{N^{1/2}}{6\gamma^2}, \quad \Lambda_L(d, \overline{p}_\perp) \approx \ln \frac{N^{2/3}}{6\gamma^2},$$

а также, что

$$\Lambda_L(R, a) \approx \ln N^{1/2}, \quad \Lambda_L(R, d) \approx \ln N^{1/3}, \quad \Lambda_L(d, a) \approx \ln N^{1/6}.$$

Поскольку все оценки имеют смысл с точностью до порядка, подтверждается вывод, что в приближении Джинса – Ландау

$$\Lambda_L(p_{\max}, p_{\min}) \approx \ln N.$$

Теперь обратимся к более точному выражению для ньютоновского логарифма

$$\Lambda(p_{\max}, p_{\min}) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + p_{\max}^2/p_\perp^2}{1 + p_{\min}^2/p_\perp^2}.$$

Расходимость при $p_{\min} = 0$ пропадает. Полагая, как Л. Спицер [76], $p_{\min} = 0$, будем иметь

$$\Lambda(p_{\max}, 0) = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{p_{\max}^2 v^4}{G^2(m + m_s)^2} \right).$$

Для оценок по порядку величины можно положить

$$\int \Lambda(p_{\max}, 0) \frac{f(v)}{v} dv \approx \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{p_{\max}^2 s^4}{G^2(m + m_s)^2} \right) \frac{1}{s} = \tilde{\Lambda}/s,$$

а тогда

$$\tau_r = \frac{\sigma^2 s}{8\pi G^2(m + m_s)^2 n_s \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{p_{\max}^2 s^4}{G^2(m + m_s)^2} \right)}.$$

В случае системы одинаковых масс, если $p_{\max} = R$, то $\tilde{\Lambda} \approx (1/2) \ln \left(1 + \frac{N^2}{36(1 + \gamma^2)^2} \right) \approx (1/2) \ln \left(1 + \frac{N^2}{36\gamma^4} \right)$ и

$$\tau_r = \frac{\sigma^2 s}{32\pi G^2 m^2 n \ln \left(1 + N^2/36\gamma^4 \right)}.$$

Если же $p_{\max} = n^{-1/3}$, то $\tilde{\Lambda} \approx (1/2) \ln \left(1 + \frac{N^{4/3}}{4^{1/3}(1 + \gamma^2)^2} \right)$. Таким образом, по-прежнему $\tilde{\Lambda} \approx \ln N$, и, как заметил Спицер [76], отказ от приближения Джинса – Ландау приводит только к устранению расходимости при малых прицельных расстояниях.

Что касается расходимости при больших прицельных расстояниях, то заметим, что при интегрировании по p предполагалась равномерность распределения по прицельным расстояниям, что означает однородность по плотности. Попытка учесть ход плотности, очевидно, приведёт к огромным техническим трудностям. Для простых моделей такие расчёты проделали Б. С. Сагинтаев и О. В. Чумак [72]. Примечательно, тем не менее, что в кинетическом уравнении, выведенном П.-А. Шавани [116], в случае неоднородных систем расходимость в кулоновском логарифме исчезает. Однако от расходимости можно избавиться и в рамках модели бесконечной однородной среды [156]. При этом для оценки времени релаксации надо учесть изменение скорости лишь за это время. Вектор скорости повернётся при этом не на ψ , а на небольшой угол, тем меньший, чем больше прицельное расстояние. Для нахождения времени релаксации получается довольно сложное уравнение, и найти его аналитическое решение не удаётся. Однако расходимость ньютоновского логарифма пропадает.

Но нужно ли вообще учитывать далёкие сближения при оценке характерного времени действия иррегулярных сил? Если следовать традиционному определению иррегулярных сил, а тем более предложенному выше, то при исследовании каждого двойного сближения мы должны из силы парного взаимодействия вычесть регулярную силу. Для близких сближений, с прицельными расстояниями, вероятно, до величины порядка радиуса сферы действия звезды a (0.3 пк в окрестности Солнца) или, хотя бы,

межзвёздных расстояний d влиянием регулярных сил можно пренебречь, и обычные формулы теории иррегулярных сил остаются справедливыми. В случае же прицельных расстояний, сравнимых с размерами системы, напротив, коллективное действие огромного числа слабых «сближений» практически эквивалентно действию регулярной силы [111] (что в принципе не исключает стохастичности эволюции, по крайней мере, в отношении крупнозернистого распределения, см. [143]). Наличие же отдельных звезд, т. е. дискретность среды проявляется как «шум». Аналогичный вывод, по-видимому, уже давно был сделан в теории плазмы [39]. Наибольшее прицельное расстояние следует брать порядка межзвёздных расстояний.

Таким образом, традиционный подход к изучению иррегулярных сил [55], [87] оказывается применимым лишь к редким, но сильным сближениям. Но их следует рассматривать как чисто разрывный случайный процесс, на чем давно настаивал Т. А. Агекян [4]. Практически общепринятая в настоящее время трактовка стохастической эволюции гравитирующих систем на основе уравнения Фоккера – Планка [98] оказывается оправданной лишь для сближений со значениями прицельного расстояния порядка межзвёздных расстояний.

Вспоминая приведённый выше вывод выражения для классического времени релаксации, мы приходим к следующему. Единственный вывод, который с уверенностью можно сделать из теории Джинса – Чандрасекара, это утверждение, что эта теория неверна. В [155] сформулированы те не независимые предположения, на которых основывается эта теория и которые заведомо не выполняются. Во-первых, среда предполагается бесконечной и однородной, а действием регулярных сил пренебрегается. Г. Г. Кузмин [42], [43] косвенным образом учитывал регулярные силы, считая, что в результате сближений звёзды перескакивают с одной регулярной орбиты на другую, определяемую иными значениями интегралов движения [43]. Теорию релаксации в стационарном и нестационарном регулярном поле начал разрабатывать И. Л. Генкин [18], [19], [21], но фактически ограничился однородными системами, базируясь на теории диффузии С. Чандрасекара [86]. Во-вторых, действие иррегулярных сил рассматривается как марковский случайный

процесс, что кажется неестественным с точки зрения небесной механики и, вообще говоря, является неверным [117], [73]. П.-А. Шавани особо подчеркивает в этой связи значение результата Чандрасекара [108], показавшего, что коэффициент корреляции для случайной силы убывает со временем медленно (как $1/t$, а не экспоненциально) [117]. Теория Пригожина и Северна [158] свободна от этого допущения, но до сих пор практически не используется в приложениях. Немарковость допускается и уравнениями Шавани [116], но оказывается, что в пределе бесконечного числа тел практически не играет роли. В-третьих, как уже отмечалось, для описания действия иррегулярных сил чаще всего используются диффузионное приближение и уравнение Фоккера – Планка. Только Т. А. Агемян [1], И. В. Петровская [69] и их немногочисленные последователи рассматривали звёздные сближения как чисто разрывный случайный процесс, описываемый уравнениями Колмогорова – Феллера (см. [34], [68], [142]). Наконец, как отмечается в [155], пренебрегается откликом системы на действие иррегулярных сил вследствие самогравитации (хотя Г. Г. Кузмин [43] фактически упоминал о нём). По нашему мнению, анализ такого отклика развивался в [47].

Как кажется, более правильный подход к проблеме релаксации должен базироваться на современной концепции хаоса в динамических системах и идеях, в общем виде разрабатывавшихся Н. С. Крыловым [41]. К звёздным системам этот подход первыми применили В. Г. Гурздян и Г. К. Саввиди [131] и далее развивали многие авторы, в частности, в статьях [51], [64], [70], [99], [100], [118], [130]. Нельзя согласиться с утверждением [80], что проблема в основном решена в статье [128].

3.5. Столкновительное кинетическое уравнение

Статистически наиболее полное описание звёздных систем достигается, когда известна функция фазовой плотности $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t)$ (функция распределения в шестимерном фазовом пространстве координат и скоростей). Для *бесстолкновительных* систем, когда действием иррегулярных сил пренебрегается, фазовая плотность постоянна вдоль фазовой траектории (**теорема Джинса**) и

удовлетворяет бесстолкновительному кинетическому уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0.$$

Здесь $\Phi(\mathbf{r}; t)$ — потенциал регулярных сил, а уравнение записано в инерциальной системе отсчёта.

Приведём элементарный вывод этого уравнения. Как ни удивительно, он отсутствует в известных автору руководствах, за исключением обзора К. Фримена [127].

Для бесстолкновительных систем уравнение движения пробной звезды в инерциальной системе отсчёта

$$\ddot{\mathbf{r}} = \nabla \Phi$$

можно записать в виде системы канонических уравнений Гамильтона

$$\dot{\mathbf{p}} = -H_{\mathbf{q}}, \quad \dot{\mathbf{q}} = H_{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{p} = \mathbf{v}, \quad \mathbf{q} = \mathbf{r}$$

с функцией Гамильтона

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}; t) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^2 - \Phi(\mathbf{q}; t).$$

Предположим, что существует общее решение этих уравнений в форме Коши $\mathbf{x}^t = \mathbf{X}(\mathbf{x}^0, t^0, t)$ (здесь $\mathbf{x} = (\mathbf{p}, \mathbf{q})$). Тогда для этих уравнений (вообще, для любой системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, дивергенция правых частей которых обращается в нуль) справедлива **теорема Лиувилля**. Согласно этой теореме [13] определитель Якоби

$$\left\| \frac{\partial X_i}{\partial x_j^0} \right\| \equiv 1.$$

По формуле общего решения каждой точке \mathbf{x}^0 фазового пространства в каждый момент времени t (для которого существует общее решение) можно сопоставить её образ \mathbf{x}^t . Имея это в виду, говорят, что *уравнения движения индуцируют однопараметрическое семейство автоморфизмов фазового*

пространства. Согласно теореме Лиувилля, эти преобразования фазового пространства являются сохраняющими меру, а само это утверждение называют *теоремой о сохранении фазового объёма.* Если рассмотреть мысленный поток точек в фазовом пространстве, то в силу этой теоремы он является несжимаемым.

Выделим произвольную (измеримую) область Γ^0 фазового пространства. Пусть Γ^t — её образ в момент t . По теореме Лиувилля $\text{mes}\Gamma^0 = \text{mes}\Gamma^t$. Каждой звезде соответствует точка в фазовом пространстве. Рассмотрим те звезды, для которых соответствующие точки попадают в Γ^0 . Действием иррегулярных сил (когда точки могут «перескочить» в другой фазовый объём) мы пренебрегаем. Мы не рассматриваем явлений звездообразования и рассеяния вещества звёзд в газовой среде. Поэтому в Γ^t будет такое же число фазовых точек, что и в Γ^0 . Можно сказать, что масса фазового объёма сохраняется. Обозначая массу через μ , запишем, что $\mu\Gamma^0 = \mu\Gamma^t$. Поделим второе из этих равенств на первое. Отношение $\mu\Gamma/\text{mes}\Gamma = \bar{f}(\Gamma)$, очевидно, можно назвать средней фазовой плотностью в Γ . Тогда мы получаем, что

$$\bar{f}(\Gamma^0) = \bar{f}(\Gamma^t),$$

т. е. *средняя фазовая плотность любой области фазового пространства сохраняется при движении.* Будем стягивать область Γ^0 к точке P^0 . Если к данной системе применима модель фазовой жидкости, т. е. для неё существует понятие фазовой плотности, то в пределе получим фазовую плотность в этой точке $f(P^0)$. Тогда получаем, что фазовая плотность постоянна вдоль фазовой траектории, $f(P^0) = f(P^t)$, что и означает теорему Джинса. Если фазовая плотность дифференцируема, то получим

$$\frac{df}{dt} = 0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}},$$

т. е. основное уравнение бесстолкновительной звёздной динамики. Как известно, разные авторы более или менее обоснованно связывают его с различными комбинациями из имён Ж. Лиувилля, Л. Больцмана, А. А. Власова и даже Дж. В. Гиббса. Подробно обсуждавший этот вопрос М. Энон [136] рекомендует называть его **бесстолкновительным уравнением Больцмана.**

При учёте иррегулярных сил приведённый вывод перестаёт быть справедливым. Во-первых, уже нельзя применять теорему Лиувилля. Если бы дело было только в этом, то в некотором приближении к регулярной силе, действующей на звезду, можно было бы добавить силу динамического трения, зависящую от скорости [79]. Если при этом масса фазового объёма остаётся неизменной, т. е. переходы точек, изображающих звёзды, из одного объёма в другой, взаимно компенсируются, то будет справедливо уравнение неразрывности для фазового пространства,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} (f \dot{\mathbf{v}}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (f \mathbf{v}) = 0.$$

Вообще говоря, однако, такие переходы не будут компенсироваться, а диссипация звёзд из системы приведёт к вековой убыли массы фазового элемента. Чтобы компенсировать эти изменения, в правую часть кинетического уравнения добавляют так называемый столкновительный член (Г. Г. Кузмин [42] назвал его **функцией сближений**).

Вычисление функции сближений для гравиплазмы, как и для плазмы и других сред, является очень трудной задачей, попытки решения которой не прекращаются до настоящего времени (см. [114], [116], [137]). Первый столкновительный член нашёл Л. Больцман [14] в 1872 г. для разреженного газа. Современный вывод *интеграла столкновений Больцмана*, наилучший по мнению автора, приведён в книге М. Н. Когана [40]. Регулярные силы при этом, конечно, не учитывались. Напомним, что по Больцману

$$St f = \int (f' f'_1 - f f_1) db d\mathbf{v}_1,$$

где $f = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t)$, $f_1 = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1; t)$, $f' = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}'; t)$, $f'_1 = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_1; t)$, \mathbf{v} , \mathbf{v}_1 — скорости пробной молекулы и молекулы поля до столкновения, \mathbf{v}' , \mathbf{v}'_1 — скорости после столкновения, b — параметры столкновения.

При получении этого выражения был сделан ряд существенных предположений. Во-первых, учитывались только парные столкновения, что оправдывалось разреженностью газа. Во-вторых, считалось, что фазовые координаты двух молекул не коррелированы (*предположение о молекулярном хаосе*).

Наконец, предполагалось, что вероятности столкновения молекул с любым прицельным расстоянием одинаковы. Для звёздных систем из максвелловского столкновительного члена исходили К. В. Л. Шарлье и его школа [111], [151], а затем Г. Г. Кузмин [42].

После того, как Л. Д. Ландау [46] вывел интеграл столкновений для плазмы, И. Н. Скабицкий [74] (ученик В. А. Амбарцумяна) применил его к гравитирующим системам и нашёл, что плотность сферической системы мало меняется под действием иррегулярных сил, а распределение скоростей приближается к максвелловскому. При этом он полагал $Stf = \partial f / \partial t$ (ошибочность этого допущения была отмечена Г. Г. Кузминым [42]). Кстати, П.-А. Шавани [117] пишет, что в известной ему астрофизической литературе первая ссылка на работу Ландау появилась только в 1981 г. в работе Г. Э. Кандрупа [143]. На самом деле ссылки на [46] есть в монографии К. Ф. Огородникова [55] (хотя он и не рассматривал столкновительное кинетическое уравнение), в упомянутой выше статье И. Н. Скабицкого [74] и в работе Г. Г. Кузмина [42]. Позднее на уравнение Ландау неоднократно ссылался И. Л. Генкин.

В работах С. Чандрасекара [105], [106] появился фоккер-планковский столкновительный член

$$Stf = -(1 + \mu)\nabla_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}f) + \nabla_{\mathbf{v}}\nabla_{\mathbf{v}}(\mathbf{A}f),$$

где $\nabla_{\mathbf{v}}$ — оператор набла в пространстве скоростей, μ — отношение масс возмущаемых и возмущающих звёзд, определяющий динамическое трение вектор $\mathbf{a} = -\beta\mathbf{v}$, тензор диффузии в пространстве скоростей $\mathbf{A} = A\mathbf{E}$, причём здесь \mathbf{E} — единичный тензор, а β , A — постоянные величины. Если $\mu = 1$, то $A = \beta\sigma^2$. В. А. Антонов и С. Н. Нуриддинов [12] несколько модифицировали столкновительный член Чандрасекара с тем, чтобы выполнялись законы сохранения. В частности, в $\nabla_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}f)$ они предполагают пропорциональность вектора \mathbf{a} не полной, а остаточной скорости звезды. Подробный вывод уравнения Фоккера – Планка для марковского случайного процесса, исходя из уравнений Чепмена – Колмогорова, приводится в [129]. Наиболее удобная для приложений (в плазме) форма этого уравнения дана М. Н. Розенблютом с соавторами [159]. В следующей статье [153] авторы с помощью данного уравнения исследовали релаксацию в

плазме. Столкновительная эволюция звёздных систем на основе уравнения Фоккера – Планка изучалась в большом числе работ, см. [68], [73], [76], [98]. Как правило, функция распределения скоростей рассеивателей при этом предполагалась заданной (максвелловской). А. Кинг [147] обратил внимание на то, что такая задача не является самосогласованной и пытался найти самосогласованное распределение скоростей. П.-А. Шавани [117] заметил, что при этом фактически Кинг пришёл к уравнению Ландау.

Практически одновременно с М. Н. Розенблютом с соавторами [159] уравнение Фоккера – Планка для гравитирующих систем вывел Г. Г. Кузмин [42]. Для сферических систем с изотропным в начальный момент распределением скоростей после усреднения кинетического уравнения вдоль регулярной орбиты оказывается, что

$$\overline{\text{St}f} = 4\pi\kappa \left[F_0 f - F_1 \frac{\partial f}{\partial x} + F_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right].$$

Здесь κ – постоянная, пропорциональная квадрату массы звёзд, $x = \Phi - v^2/2$ – (удельная) энергия с обратным знаком,

$$\begin{aligned} F_0 &= f, \\ F_1 &= \int_0^x f dx + (\Phi - x)^{-1/2} \int_x^\Phi (\Phi - x)^{1/2} f dx, \\ F_2 &= \frac{2}{3}(\Phi - x) \left[\int_0^x f dx + (\Phi - x)^{-3/2} \int_x^\Phi (\Phi - x)^{3/2} dx \right]. \end{aligned}$$

Из этого уравнения сразу же следует, что в ходе эволюции распределение скоростей становится радиально вытянутым [44]. Для несферических систем столкновительное кинетическое уравнение диффузионного типа Г. Г. Кузмин привёл в [43].

В 1954 г. П. Батнагар с соавторами [96] предложили (для плазмы) феноменологический столкновительный член (τ -*приближение*)

$$\text{St}f = \frac{f_{\text{maxw}} - f}{\tau},$$

где f_{maxw} отвечает максвелловскому распределению скоростей, а τ – характерное время (время релаксации). Для исследования

эволюции звёздных систем это выражение использовал И. Л. Генкин [24], модифицировав схему обратной задачи Джинса. Г. Г. Кузмин и Ю.-И. К. Велтманн [44] сравнили выражение для столкновительного члена в τ -приближении с точным согласно теории Кузмина [42]. Неожиданно оказалось, что согласие очень хорошее. Поэтому можно рассчитывать на то, что с помощью простейшего τ -приближения удастся с достаточной точностью изучить столкновительную эволюцию сферических скоплений. Но нужно иметь в виду следующее. При использовании τ -приближения молчаливо предполагается, что вследствие действия иррегулярных сил распределение скоростей становится максвелловским, т. е. что максвелловское распределение отвечает максимуму энтропии. Однако В. А. Антонов [10] показал, что это предположение может не выполняться.

В связи со столкновительным кинетическим уравнением встаёт, однако, следующая проблема. И. Л. Генкин утверждал [22], [23], что в левой части кинетического уравнения следует отбросить член с регулярной силой, так что кинетическое уравнение будет в принципе иметь первоначальный больцмановский вид для идеального газа (без регулярных сил) (почти как у Скабицкого [74], за что его критиковал Кузмин [42]). Для обоснования этого были проделаны детальные расчёты для одномерной модели. Идея этого соображения следующая. Учитывая далёкие сближения и суммируя их, мы фактически принимаем во внимание действие регулярных сил. Поэтому включать в кинетическое уравнение специальное слагаемое с регулярной силой не следует. С другой стороны, ещё раньше А. А. Власов [15] писал (имея в виду плазму), что при учёте самосогласованного поля специальный столкновительный член не нужен. Конечно, при этом молчаливо подразумевалось, что тесными сближениями, как и прямыми соударениями можно пренебречь ввиду их редкости. Действие же далёких сближений включается в самосогласованное поле.

Кажется, что каждый из авторов по-своему прав. Но если в соответствии с вышеизложенным мы не будем относить далёкие «сближения» к иррегулярным силам, то мы должны будем записать в левой части член с регулярной силой (которая может быть случайной), т. е. согласиться с А. А. Власовым [15]. Если считать, что иррегулярные силы проявляют себя,

как правило, как силы тесных сближений, то чаще всего столкновительным членом можно просто пренебречь. Вывод кинетических уравнений из так называемой иерархии уравнений ББГКИ для многочастичных функций распределения для систем с дальнодействием даёт формальное обоснование такому заключению [102], [115], [116]: в пределе бесконечного числа частиц в первом приближении получается так называемое «уравнение Власова», т. е. «бесстолкновительное уравнение Больцмана». В следующем же приближении получается столкновительное кинетическое уравнение с регулярной силой в левой части и штосс-членом в правой [115], [116], [137]. В частности, могут получаться кинетические уравнения Ландау и Балеску–Ленарда [114]. Аналогичные результаты для плазмы давно известны [29].

3.6. Особенности статистической механики звездных систем

Любая современная динамическая теория галактик строится на основе схемы «звёздного газа» Кельвина – Пуанкаре. Ещё сам А. Пуанкаре [157] указал на принципиальные отличия «звёздного газа» от больцмановского газа классической статистической механики (анизотропия распределения скоростей, бесстолкновительность) (см. также [26], [53], [126], [150], а также противоположную точку зрения К. В. Л. Шарлье [112]). В частности, мы сейчас можем указать на несколько причин, по которым статистическое равновесие недостижимо для гравиплазмы.

Во-первых, мы уже упоминали «испарение» (диссипацию) звёзд из гравитирующих систем. Количественную теорию этого процесса создали В. А. Амбарцумян [9], Л. Спизер [165], а затем Л. Э. Гуревич и Б. Ю. Левин [27]. Последние показали, что диссипация сопровождается увеличением плотности и дисперсии скоростей остатка. Действительно, молчаливо трактуя действие иррегулярных сил как непрерывный случайный процесс, они считали, что энергия каждой звезды – непрерывная функция времени и по достижении ею нулевого значения звезда улетает из системы. Следовательно, энергия всей системы остаётся неизменной. С другой стороны, ввиду медленности действия

иррегулярных сил можно считать выполняющейся теорему вириала, а тогда сохраняются по отдельности как кинетическая, так и потенциальная энергия. Из сохранения кинетической энергии (для невращающейся системы) следует увеличение дисперсии скоростей («разогрев» системы). Диссипации уже достаточно для недостижимости в гравитирующих системах статистического равновесия.

Рассмотрим теперь двойную звезду в звёздном поле. Может оказаться, что пролетающая мимо третья звезда улетит. Может случиться и так, что она оторвёт один из компонентов и займёт его место. Спрашивается, как изменятся в среднем размеры оставшейся пары по отношению к первоначальной. В 1950 г. этот вопрос рассмотрели Л. Э. Гуревич и Б. Ю. Левин [28], а в 1975 г. фундаментальное исследование выполнил Д. Хегги [160]. Они нашли, что существуют два класса двойных систем в звёздном поле, в зависимости от величины параметра

$$\lambda = \frac{Gm_1m_2}{2a} \bigg/ m_a\sigma_a^2.$$

Здесь m_1 , m_2 — массы звёзд пары, a — большая полуось их орбиты, m_a , σ_a^2 — масса и дисперсия скоростей звёзд поля. Если $\lambda > 1$, то пара называется «прочной» (hard binary по Хегги), а в противном случае — «непрочной» (soft binary по Хегги). Были доказаны следующие утверждения (*законы Гуревича – Левина – Хегги*): прочные пары будут становиться в среднем всё более прочными (т. е. более тесными), непрочные пары в среднем становятся менее прочными. Численные эксперименты подтвердили эти статистические законы. Отсюда следует, что хотя при взаимодействии третьей звезды с парой суммарная энергия трёх тел сохраняется, часть её переходит в энергию орбитального движения пары. Поэтому сближение звезды с «прочной» парой можно рассматривать как неупругое столкновение, в отличие от парных сближений. В результате таких взаимодействий эволюция «звёздного газа» ускоряется.

Традиционно считалось, что иррегулярные силы приводят к установлению максвелловского распределения скоростей, которое будет нарушаться только диссипацией (процессом, по-видимому, обычно на порядок более медленным, чем релаксация).

Но в 1962 г. появилась статья В. А. Антонова [10], в которой доказывалось, что максвелловское распределение скоростей является наивероятнейшим (для сферических систем) только в том случае, когда отношение центральной плотности системы к плотности на периферии не превосходит критическое значение, равное 708.61. В противном случае «горячее» плотное ядро будет становиться все плотнее и «горячее», а наружные части будут «охлаждаться». Не нужно путать этот процесс с увеличением дисперсии скоростей при диссипации (как это сделано в [34]). Д. Линден-Белл и Р. Вуд [152] назвали такое явление *гравитермальной катастрофой*. Таким образом, закон возрастания энтропии приводит для гравитирующих систем к нарушению второго начала термодинамики (в формулировке Клаузиуса). Причина гравитермальной катастрофы лежит в том, что теплоёмкость гравитирующих систем является отрицательной (что, как известно, вытекает из теоремы вириала).

В обычном газе, состоящем из молекул разных масс, в результате столкновений устанавливается *равнораспределение по энергии*. В принципе, то же самое происходит и в гравитирующих системах: действие иррегулярных сил приводит к равенству $m_i \sigma_i^2 = \text{const}$, где m_i — масса звёзд i -ой группы, σ_i^2 — дисперсия их остаточных скоростей [112]. Тогда более массивные звёзды «оседают» в центре системы, а менее массивные звёзды занимают бóльший объём. В 1969 г. Л. Спицер [166] показал, что при слишком большом различии масс звёзд равнораспределение по энергии не достигается. Пусть система состоит из звёзд с массами m_1 и $m_2 \gg m_1$. Массивные звёзды (массы m_2), взаимодействуя с лёгкими, отдают им энергию (в соответствии с тенденцией к равнораспределению). Скорости массивных звёзд уменьшаются, поэтому они двигаются медленнее и в среднем перемещаются к центру системы. Если массивных звёзд было много, то такое перемещение массивных звёзд будет означать сжатие системы. Тогда скорости звёзд увеличатся (из теоремы вириала следует, что уменьшение размеров приводит к увеличению дисперсии скоростей). Затем звёзды массы m_2 опять отдадут энергию звёздам массы m_1 , снова будут сжиматься к центру и ещё сильнее увеличат свою энергию. Процесс будет продолжаться и далее.

Расчёт показывает, что эволюция зависит от значения параметра

$$\chi = \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^{3/2},$$

где M_i — суммарная масса звёзд массы m_i . Равнораспределение по энергии не наступает, если $\chi > 0.16$.

Из других особенностей статистической механики гравитирующих систем упомянем о *гравивращательной катастрофе* [132], [133]. Она проявляется в том, что на периферии вращающихся систем не устанавливается твердотельное вращение, напротив, дифференциальность вращения увеличивается.

Несмотря на отмеченные особенности статистической механики гравиплазмы, сама исходная концепция звёздной системы как ансамбля частиц остается неизменной до сих пор. Между тем, наблюдения определенно указывают, что по крайней мере нашу Галактику следует представить как ансамбль «жгутов» в фазовом пространстве. Такие жгуты могут проявлять себя как так называемые движущиеся звёздные скопления (звёздные потоки) [56], [58], звёздные вереницы, о которых давно писала Р. Б. Шацова [88], звёздные группы Эггена, обсуждавшиеся в 1960-ые гг. звёздные цепочки (см. [81]), в конце концов, даже как обычные звёздные скопления. В данном контексте неважно, что некоторые из этих образований, вероятно, не являются «физически реальными». Известна концепция, согласно которой Галактика была первоначально ансамблем не звёзд, а звёздных скоплений. Можно ожидать, что жгуты смогут существенно ускорить процессы релаксации [56], хотя до сих пор выполнены только предварительные расчёты [57]. Но сюда же можно отнести и релаксацию на волнах плотности, которая рассматривается как наиболее существенный механизм увеличения дисперсии скоростей звёзд галактического диска [162].

Пока трудно представить даже контуры фрактальной теории галактик. Тем не менее, попытки ввести в звёздную динамику хаусдорфову размерность уже предпринимаются (например, [121]). Не за ними ли будущее звёздной динамики?

3.7. Заключение

Мы обсудили далеко не все принципиальные вопросы динамики звездных систем. Например, совершенно неясно, какое ограничение накладывает теорема Джинса на общий вид фазовой плотности при наличии хаотических орбит. С другой стороны, можно утверждать что для реальных звездных систем, существующих конечное время, вообще нельзя говорить об эргодических и хаотических орбитах. Можно лишь вычислять энтропию Крылова–Колмогорова для каждого момента времени.

Наивероятнейшее состояние звездных систем ищется при фиксированных значениях массы и энергии. Ему, как известно, соответствует максвелловское распределение скоростей (забудем о гравитермальной катастрофе Антонова). Но масса и энергия шара с максвелловским распределением бесконечны, вопреки исходным предположениям.

Принципиальные (и математические) трудности встают при попытках замкнуть уравнения гидродинамики и гросс-динамики звездных систем.

Наконец, в динамике звездных систем чаще всего рассматривается тонкозернистая функция распределения, тогда как реальный астрономический интерес представляет крупнозернистое распределение. Но для крупнозернистой фазовой плотности уже не будут справедливы ни бесстолкновительное уравнение Больцмана, ни теорема Джинса.

Подробный анализ как этих, так и рассмотренных выше принципиальных вопросов должен потребовать значительных усилий. Существенную помощь могут оказать численные эксперименты. Но, по мнению автора, подобная работа необходима. Иначе реальный прогресс в математическом моделировании галактик будет невозможен.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 3

1. *Агекян Т. А.* Вероятность звёздного сближения с заданным изменением абсолютной скорости // *Астрон. ж.*, т. 36, № 1, с. 41–53, 1959.
2. *Агекян Т. А.* Общие черты эволюции вращающихся систем гравитирующих тел // *Астрон. ж.*, т. 37, № 2, с. 317–326, 1960.
3. *Агекян Т. А.* Об учёте кратности звёздных сближений в теории иррегулярных сил // *Астрон. ж.*, т. 38, № 6, с. 1056–1064, 1961.
4. *Агекян Т. А.* Звёздная динамика // *Курс астрофизики и звёздной астрономии* / Отв. ред. А. А. Михайлов. М.: Физматгиз. 1962. С. 528–577.
5. *Агекян Т. А.* Теория вероятностей для физиков и астрономов. М.: Наука. 1974. 264 с.
6. *Агекян Т. А., Баранов А. С.* Построение моделей звёздных систем при помощи численного эксперимента // *Астрофизика*, т. 5, № 2, с. 305–316, 1969.
7. *Александров А. Д.* Борис Николаевич Делоне (к 90-летию со дня рождения) // *Проблемы науки и позиция учёного* / Отв. ред. В. А. Залгаллер. Л.: Наука. 1988. С. 471–489.
8. *Амбарцумян В. А.* К статистике двойных звёзд // *Астрон. ж.*, т. 14, № 3, с. 207–219, 1937.
9. *Амбарцумян В. А.* К вопросу о динамике открытых скоплений // *Учён. записки Ленинградск. ун-та*, № 22, с. 19–22, 1938.
10. *Антонов В. А.* Наивероятнейшее фазовое распределение в сферических звёздных системах и условия его существования // *Вестн. Ленинградск. ун-та*, № 7, с. 135–147, 1962.
11. *Антонов В. А.* Устойчивость и эволюция галактик // *Вісник Астрономічн. школи*, т. 1, № 1, с. 6–15, 2000.
12. *Антонов В. А., Нуритдинов С. Н.* О роли иррегулярных сил в слабонестационарных самогравитирующих системах // *Астрофизика*, т. 10, № 4, с. 611–624, 1974.

13. Бибииков Ю. Н. Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд. 2. СПб.: изд. С.-Петербургск. ун-та. 2005. 276 с.
14. Больцман Л. Дальнейшие исследования теплового равновесия между молекулами газа // Избранные труды / Отв. ред. Л. С. Полак. М.: Наука. 1984. С. 125–189.
15. Власов А. А. Теория многих частиц. М.; Л.: Гостехиздат. 1950. 348 с.
16. Власов А. А. Статистические функции распределения. М.: Наука. 1968. 356 с.
17. Генкин И. Л. Работы по звёздной динамике // Труды Астрофиз. ин-та АН КазССР, т. 12, с. 34–74, 1969.
18. Генкин И. Л. Роль динамического перемешивания в процессе релаксации звёздных систем // Астрон. цирк. № 307, с. 4–6, 1969.
19. Генкин И. Л. Уравнение Власова и необратимость в физике плазмы и звёздной динамике // Астрон. ж., т. 46, № 6, с. 1228–1230, 1969.
20. Генкин И. Л. Регулярные и иррегулярные силы в звёздных системах // Труды Астрофиз. ин-та АН КазССР, т. 16, с. 103–110, 1971.
21. Генкин И. Л. Релаксация в регулярном поле // Докл. АН СССР. т. 197, № 5. С. 1042–1044, 1971.
22. Генкин И. Л. О некоторых трудностях классической теории релаксации и возможных путях их преодоления // Труды Астрофиз. ин-та АН КазССР, т. 29, с. 33–39, 1977.
23. Генкин И. Л. Взаимообусловленность индивидуальных и коллективных эффектов в процессах релаксации // Труды Астрофиз. ин-та АН КазССР, т. 32, с. 10–15, 1978.
24. Генкин И. Л., Осипков Л. П., Цицин Ф. А. О предмете динамики звёздных систем // Астрометрия и небесная механика (сер. «Проблемы исследования Вселенной», вып. 7) / Ред. В. К. Абалакин. М.; Л.: изд. ВАГО, ГАО, ИТА АН СССР. 1978. С. 308–323.
25. Генкин И. Л., Цицин Ф. А. К аксиоматике динамики звёздных систем // Труды Астрофиз. ин-та АН КазССР, т. 28, с. 48–58, 1976.

26. *Герасимович Б. П.* Статистические ансамбли звёздной астрономии // Мирозведение, т. 20, № 1, с. 41–54, 1931.
27. *Гуревич Л. Э., Левин Б. Ю.* Эволюция систем гравитирующих тел // Докл. АН СССР, т. 70, № 5, с. 781–784, 1950.
28. *Гуревич Л. Э., Левин Б. Ю.* Об образовании двойных звёзд // Астрон. ж., т. 27, № 5, с. 273–284, 1950.
29. *Гуров К. П.* Основания кинетической теории. Метод Н. Н. Боголюбова. М.: Наука, 1966. 352 с.
30. *Зонн В., Рудницкий К.* Звёздная астрономия. М.: ИЛ. 1959. 449 с.
31. *Идлис Г. М.* Критерий приливной устойчивости и распределение шаровых скоплений в галактиках и звёзд в шаровых скоплениях // Докл. АН СССР, т. 41, № 6, с. 1305–1308, 1953.
32. *Идлис Г. М.* Структура и динамика звёздных систем // Труды Астрофиз. ин-та АН КазССР, т. 1, с. 1–314, 1961.
33. *Идлис Г. М.* О рациональных основах и актуальных проблемах теоретических моделей галактик // Труды Астрофиз. ин-та АН КазССР, т. 5, с. 105–178, 1965.
34. *Кинг А. Р.* Введение в классическую звёздную динамику // М.: Едиториал УРСС. 2002. 288 с.
35. *Климонтович Ю. Л.* Статистическая физика. М.: Наука. 1982. 608 с.
36. *Климонтович Ю. Л.* Физика бесстолкновительной плазмы // Успехи физ. наук, т. 167, № 1, с. 23–55, 1997.
37. *Климонтович Ю. Л.* Турбулентное движение и структура хаоса. Новый подход к статистической теории открытых систем. М.: КомКнига. 2007. 328 с.
38. *Климонтович Ю. Л., Силин В. П.* О флуктуациях в плазме без столкновений // Докл. АН СССР, т. 145, № 4, с. 764–767, 1968.
39. *Коган В. И.* Флуктуирующее микрополе и многократные столкновения в газе заряженных (или гравитирующих) частиц // Докл. АН СССР, т. 135, № 6, с. 1374–1377, 1960.
40. *Коган М. Н.* Динамика разреженного газа. Кинетическая теория. М.: Наука. 1967. 440 с.

41. *Крылов Н. С.* Работы по обоснованию статистической физики. М.; Л.: изд. АН СССР. 1950. 208 с.
42. *Кузмин Г. Г.* Эффект сближений звёзд и эволюция звёздных скоплений // Публ. Тартуск. астрон. обсерв., т. 33, № 2, с. 75–102, 1957.
43. *Кузмин Г. Г.* Динамика звёздных систем с учётом эффекта сближений // Сообщ. Тартуск. астрон. обсерв., № 6, с. 1–9, 1963.
44. *Кузмин Г. Г., Велтманн Ю.-И. К.* О функции сближений в звёздных системах // Динамика и эволюция звёздных систем (сер. «Проблемы исследования Вселенной», вып. 4) / Ред. К. Ф. Огородников. М.; Л.: изд. ВАГО, ГАО АН СССР. 1975. С. 177–184.
45. *Курт Р.* Анализ размерностей в астрофизике. М.: Мир. 1975. 231 с.
46. *Ландау Л. Д.* Кинетическое уравнение в случае кулоновского взаимодействия // Журн. exper. теорет. физ., т. 7, № 2, с. 203–209, 1937.
47. *Марочник Л. С.* Пробная звезда в звёздной системе // Астрон. ж., т. 44, № 5, с. 1087–1096, 1967.
48. *Микиша А. М., Цицин Ф. А.* О формуле для времени релаксации // Вестн. Московск. ун-та, сер. III, физ., астрон., вып. 5, с. 74–77, 1965.
49. *Нежинский Е. М.* О размерах и устойчивости корон галактик // Астрон. ж., т. 52, № 5, с. 1107–11010, 1975.
50. *Нуритдинов С. Н.* О фазовом перемешивании в нелинейных нестационарных звёздных системах // Астрон. цирк., № 1081, с. 1–2, 1977.
51. *Овод Д. В.* О релаксации в регулярном поле звёздных систем // Процессы управления и устойчивость. Труды 41-й международн. научн. конф. / Ред. Н. В. Смирнов, Г. Ш. Тамасян. СПб.: изд. СПбГУ. 2010. С. 199–204.
52. *Огородников К. Ф.* Некоторые современные проблемы звёздной динамики // Вестн. Ленинградск. ун-та, № 1, с. 5–16, 1947.

53. *Огородников К. Ф.* Основы динамики вращающихся звёздных систем // Успехи астрон. наук, т. 4, с. 3–68, 1948.
54. *Огородников К. Ф.* О принципиальной возможности обоснования статистической механики звёздных систем // Астрон. ж., т. 54, № 6, с. 809–819, 1957.
55. *Огородников К. Ф.* Динамика звёздных систем. М.: Физматгиз. 1958. 627 с.
56. *Огородников К. Ф.* Строение и динамика Галактики // Земля и Вселенная, № 2, с. 6–13, 1966.
57. *Огородников К. Ф.* Приближённый расчёт величины импульса при прохождении точки мимо вытянутого однородного двухосного эллипсоида // Вестн. Ленинградск. ун-та, № 7, с. 146–149, 1972.
58. *Огородников К. Ф., Латышев И. Н.* Исследование звёздных потоков. II. Поток Большой Медведицы // Астрон. ж., т. 46, № 6, с. 1190–1199, 1969.
59. *Осипков Л. П.* К постановке эргодической проблемы в звёздной динамике (заметки по поводу классификации интегралов движения в звёздной динамике) // Проблемы наблюдательной и теоретической астрономии (сер. «Проблемы исследования Вселенной», вып. 6) / Ред. О. А. Мельников, В. К. Абалакин. М.; Л.: изд. ВАГО, ГАО, ИТА АН СССР. 1977. С. 181–189.
60. *Осипков Л. П.* Универсальные понятия, характеризующие развитие статистических систем, на примере звёздной динамики // Развитие классических методов исследования в естествознании (сер. «Проблемы исследования Вселенной», вып. 17) / Ред. В. В. Чешев. СПб.: изд. НИИ радиоэлектронных комплексов РАН. 1994. С. 465–470.
61. *Осипков Л. П.* Обыкновенные дифференциальные уравнения в задачах звёздной динамики // Математические методы исследования космических систем / Ред. В. Н. Старков. СПб.: КМУ физ. ф-та СПбГУ. 2003. С. 73–131.
62. *Осипков Л. П.* Существует ли парадокс релаксации в звёздных системах? // Улугбековские чтения, т. 1 / Отв. ред. С. Н. Нуритдинов. Ташкент. 2004. С. 46–56.

63. *Осипков Л. П.* Точки либрации для задачи Бока // Вестн. С.-Петербургск. ун-та, сер. 10, вып. 2, с. 148–157, 2007.
64. *Осипков Л. П.* Стохастизация в однородной гравиплазме // Вестн. С.-Петербургск. ун-та, сер. 10, вып. 2, с. 93–103, 2009.
65. *Осипков Л. П.* Общие принципы математического моделирования звёздных систем. СПб.: СОЛЮ. 2010. 102 с.
66. *Осипков Л. П., Петровская И. В.* Динамика звёздных систем начала XXI века // *Астрофизика на рубеже веков* / Ред. Н. С. Кардашёв, Р. Д. Дагкесаманский, Ю. А. Ковалёв. М.: Янус-К. 2001. С. 471–476.
67. Переписка А. Эйнштейна и М. Борна // *Эйнштейновский сборник, 1972* / Отв. ред. В. Л. Гинзбург, Г. И. Наан. М.: Наука. 1974. С. 7–103 (С. 34).
68. *Петровская И. В.* Иррегулярные силы в звёздных системах // *Кинематика и динамика звёздных систем (Итоги науки. Астрономия, 1966)* / Отв. ред. К. Ф. Огородников, Т. А. Агемян. М.: изд. ВИНТИ. 1968. С. 132–165.
69. *Петровская И. В.* Чисто разрывные случайные процессы в поле иррегулярных сил. I // *Астрон. ж.*, т. 46, № 4, с. 824–831, 1969.
70. *Расторгуев А. С., Семенцов В. Н.* Оценка времени стохастизации звёздных систем // *Письма в Астрон. ж.*, т. 32, № 1, с. 16–19, 2006.
71. *Резерфорд Э.* Рассеяние α - и β -частиц веществом и строение атома // *Избранные научные труды. Строение атома и искусственное превращение элементов* / Отв. ред. Г. Н. Флёров. М.: Наука. 1972. С. 206–224.
72. *Сагинтаев Б. С., Чумак О. В.* Некоторые кинетические эффекты в неоднородных гравитирующих системах // *Труды Астрофиз. ин-та АН КазССР*, т. 40, с. 12–20, 1983.
73. *Саслау У.* Гравитационная физика звёздных и галактических систем. М.: Мир. 1989. 544 с.
74. *Скабицкий И. Н.* Применение кинетического уравнения к звёздным системам // *Учён. записки Ленинградск. ун-та*, № 136, с. 10–32, 1950.

75. *Спитцер Л.* Физика полностью ионизованного газа. М.: ИЛ. 1957. 112 с.
76. *Спитцер Л., мл.* Динамическая эволюция шаровых скоплений. М.: Наука. 1990. 184 с.
77. *Субботин М. Ф.* Введение в теоретическую астрономию. М.: Физматгиз. 1968. 800 с.
78. *Теребиж В. Ю.* Корреляция гравитационной силы в однородной звёздной системе // *Астрон. ж.*, т. 52, № 2, с. 442–444, 1975.
79. *Трубников Б. А.* Столкновения частиц в полностью ионизованной плазме // *Вопросы теории плазмы. Вып. 1 / Отв. ред. М. А. Леонтович.* М.: Госатомиздат. 1963. С. 98–182.
80. *Фридман А. М., Хоперсков А. В.* Физика гравитирующих дисков. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2011. 640 с.
81. *Холопов П. Н.* Звёздные скопления. М.: Наука. 1981. 480 с. (гл. 4).
82. *Цицин Ф. А.* Об определении понятия «объём» для систем дискретной природы // *Вестн. Московск. ун-та, сер. III, физ., астрон.*, вып. 5, с. 54–55, 1963.
83. *Цицин Ф. А.* Некоторые вопросы аксиоматического построения динамики звёздных систем (постулат об «автономности» звёздной системы и его границы) // *Труды Астрофиз. ин-та АН КазССР*, т. 5, с. 211–218, 1965.
84. *Цицин Ф. А.* К физическим основам динамики звёздных систем // *Труды Астрофиз. ин-та АН КазССР*, т. 12, с. 3–16, 1969.
85. *Цицин Ф. А.* Термодинамика, Вселенная и флуктуации // *Вселенная, астрономия, философия / Отв. ред. Д. Я. Мартынов и др.* М.: изд. Московск. ун-та. 1988. С. 142–156.
86. *Чандрасекар С.* Стохастические проблемы в физике и астрономии. М.: ИЛ. 1947. 168 с.
87. *Чандрасекар С.* Принципы звёздной динамики. М.: ИЛ. 1948. 264 с.
88. *Шацова Р. Б., Анисимова Г. Б.* Звёздные вереницы // *Звёздные скопления / Отв. ред. К. А. Бархатова.* Свердловск: изд. Уральск. ун-та. 1979. С. 17–35.

89. *Ahmad A., Cohen L.* Random force in gravitational systems // *Astrophys. J.*, v. 179, No 3, p. 885–896, 1973.
90. *Ahmad A., Cohen L.* Integration of the N body gravitational problem by separation of the force into a near and far component // *Proc. Conf. on Numer. Solution Ordin. Diff. Equations (Lecture Notes in Mathematics, v. 362)* / Ed. D. G. Bettis. Berlin; Heidelberg; New York: Springer Verlag. 1974. P. 304–312.
91. *Antonov V. A.* Individual and statistical aspects of star motions // *Order and Chaos in Stellar and Planetary Systems (ASP Conf. Ser., v. 316)* / Ed. G. Byrd et al. San Francisco: ASP. 2004. P. 10–19.
92. *Antonov V. A., Nuritdinov S. N., Ossipkov L. P.* On the classification of phase-space mixing in collisionless stellar systems // *Astron. Astrophys. Transact.*, vol. 7, No 2/3, p. 177–180, 1995.
93. *Antonuccio-Delogu W., Atrio-Barandella T.* Gravitational field fluctuations in weakly clustered systems // *Astrophys. J.*, v. 392, No 2, p. 403–418, 1992.
94. *Bernal J.* A geometric approach to the structure of liquids // *Nature*, v. 183, No 4655, p. 141–147, 1959.
95. *Bertau F. C., Roberts P. H.* Distribution of gravitational field at the center of globular and spherical clusters // *Astrophys. J.*, v. 128, No 1, p. 130–138, 1958.
96. *Bhatnagar P. L., Gross E. P., Krook M.* A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component system // *Phys. Rev.*, v. 94, No 3, p. 511–525, 1954.
97. *Binney J.* Thoughts on Stellar Dynamics // Preprint. Dep. Theor. Phys. Univ. of Oxford, p. 1–15, 1986.
98. *Binney J., Tremaine S.* Galactic Dynamics. 3rd printing. Princeton: Princeton Univers. Press. 1994. xvi+734 p.
99. *Boccaletti D., Pucacco G., Ruffini R.* Multiple relaxation time-scales in stellar dynamics // *Astron. Astrophys.*, v. 244, No 1, p. 48–51, 1991.
100. *Bouchet F., Barré J.* Statistical mechanics of long-range interaction // *J. Phys.: Conf. Ser.* v. 31, No 1, p. 18–26, 2006.

101. *Bottlinger K. F.* Die hellen Sterne und die Rotation der Milchstrasse // Veröff. Universitätsternw. zu Berlin-Babelsberg, Bd. 8, H. 5, S. 1–42, 1931.
102. *Braun W., Hepp K.* The Vlasov dynamics and its fluctuations in the $1/N$ limit of interacting classical particles // *Comm. Math. Phys.*, v. 56, No 2, p. 101–113, 1977.
103. *Camm G. L.* Random gravitational forces in a star field // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, v. 126, No 3, p. 283–298, 1963.
104. *Chandrasekhar S.* The time of relaxation of stellar systems. I // *Astrophys. J.*, v. 93, No 2, p. 285–304, 1941.
105. *Chandrasekhar S.* Dynamical friction. I. General considerations: the coefficient of dynamical friction // *Astrophys. J.*, v. 97, No 2, p. 255–262, 1943.
106. *Chandrasekhar S.* Dynamical friction. II. The rate of escape from clusters and the evidence for the operation of dynamical friction // *Astrophys. J.*, v. 97, No 2, p. 263–273, 1943.
107. *Chandrasekhar S.* New methods in stellar dynamics // *Ann. New York Acad. Sci.*, v. 45, p. 131–162, 1943.
108. *Chandrasekhar S.* The statistics of the gravitational field arising from a random distribution of stars. IV. The stochastic variation of the force acting on a star // *Astrophys. J.*, v. 99, No 1, p. 47–53, 1944.
109. *Chandrasekhar S.* Brownian motion, dynamical friction, and stellar dynamics // *Rev. Mod. Phys.*, v. 21, No 3, p. 383–388, 1949.
110. *Chandrasekhar S., von Neumann J.* The statistics of the gravitational field arising from a random distribution of stars. I // *Astrophys. J.*, v. 95, No 3, p. 489–531, 1942.
111. *Charlier C. V. L.* Statistical mechanics based on the law of Newton // *Lunds Univ. Årskraft*, Bd. 13, No 5, S. 1–88, 1917.
112. *Charlier C. V. L.* Monistic and dualistic conceptions of the stellar dynamics // *Pop. Astron.*, v. 27, p. 306–313, 1919.
113. *Chavanis P.-H.* On the ‘coarse-grained’ evolution of collisionless stellar systems // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, v. 300, No 4, p. 981–991, 1998.
114. *Chavanis P.-H.* Generalized thermodynamics and kinetic equation: Boltzmann, Landau, Kramers, and Smoluchowski // *Physica A*, v. 332, No 1, p. 89–122, 2004.

115. *Chavanis P.-H.* Hamiltonian and Brownian systems with long-range interactions: II. Kinetic equations and stability analysis // *Physica A*, v. 361, No 1, p. 81–123, 2006.
116. *Chavanis P.-H.* Hamiltonian and Brownian systems with long-range interactions: III. The BBGKY hierarchy for spatially inhomogeneous systems // *Physica A*, v. 387, p. 787–805, 2008.
117. *Chavanis P.-H.* Kinetic equations for systems with long-range interactions: a unified description // *J. Stat. Mech.: Theory and Experiment*, No 5, p. 05019–05058, 2010.
118. *Cipriani P., Pucacco G.* Some critical remarks on relaxation in N -body systems // *Nuovo Cimento*, v. 109 B, No 3, p. 325–330, 1994.
119. *Cohen R. S., Spitzer L., Routly P. McR.* The electrical conductivity of an ionized gas // *Phys. Rev.*, v. 80, No 2, p. 230–236, 1950.
120. *Contopoulos G., Kandrup H. E., Kaufman D.* Fractal properties of escape from a two-dimensional potential // *Physica D. Nonlinear Phenomena*, v. 64, Nos 1–3, p. 310–323, 1993.
121. *de Vega J., Sanchez N. G.* Statistical mechanics of the self-gravitating gas: thermodynamic limit, instabilities and phase diagrams // *Nuclear Physics D*, v. 625, No 2, p. 409–459, 2002.
122. *Del Popolo A.* Stochastic force in gravitational systems // *Astron. Astrophys.*, v. 305, No 3, p. 899–1004, 1996.
123. *Del Popolo A.* On the nature of gravitational forces // *Intern. J. Mod. Phys.*, v. 16, No 8, p. 1349–1368, 2007.
124. *Del Popolo A., Gumbera R.* The statistics of the gravitational field arising from an inhomogeneous system of particles // *Astron. Astrophys.* v. 324, No 1, p. 34–40, 1999.
125. *Eddington A. S.* The dynamics of a globular stellar system // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, v. 74, № 1, p. 5–16, 1913.
126. *Finlay-Freundlich E., Kurth R.* Über die Grundlagen, Ziele und Möglichkeiten einer mechanischen Theorie der Sternsysteme // *Naturwissenschaften*, Jg. 42, H. 7, S. 167–169, 1955.
127. *Freeman K. C.* Stellar Dynamics and the structure of galaxies // *Galaxies and the Universe (Stars and Stellar Systems, v. IX)* /

- Ed. A. Sandage, M. Sandage, J. Kristian. Chicago; London: Univ. Chicago Press. 1975. P. 409–507.
128. *Fridman A. M., Khoruzhii O. V., Piskunov A. E.* On the solution of the main paradox of stellar dynamics // *Physics of Gaseous and Stellar Disks of the Galaxy (ASP Conf. Ser., v. 66)* / Ed. I. R. King. San Francisco: ASP. 1994. P. 215–233.
 129. *Gasiorowicz S., Neuman V., Riddel R. J.* Dynamics of ionized media. *Phys. Rev.*, v. 101, No 3, p. 922-934, 1956.
 130. *Goodman J., Heggie D. C., Hut P.* On the exponential instability of N -body system // *Astrophys. J.*, v. 415, Pt. 1, No 2, p. 715–733, 1993.
 131. *Gurzadyan V. G., Savvidi G. K.* Collective relaxation of stellar systems // *Astron. Astrophys.*, v. 160, No 2, p. 203–210, 1986.
 132. *Hachisu I.* Gravogyro catastrophe of self-gravitating and rotating systems // *Publ. Astron. Soc. Japan*, v. 31, № 3, p. 523–540, 1975.
 133. *Hachisu I.* Gravothermal and gravogyro catastrophes of rotating and self-gravitating gaseous disks // *Publ. Astron. Soc. Japan*, v. 34, № 3, p. 313–335, 1982.
 134. *Heggie D. C.* Binary evolution in stellar dynamics // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, v. 173, No 3, p. 729–787, 1975.
 135. *Hénon M.* Un calcul amélioré des perturbations des vitesses stellaires // *Ann. d'Astrophys.*, t. 21, n^o 2, p. 186–216, 1958.
 136. *Hénon M.* Vlasov equation? // *Astron. Astrophys.*, v. 114, No 2, p. 211–212, 1982.
 137. *Heyvaerts J.* A Balescu – Lenard type kinetic equation for the collisional evolution of stable self-gravitating systems // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, v. 407, No 1, p. 355–372, 2010.
 138. *Innanen K. A., Wright A. E., House F. C., Keenan D. W.* The stability of a certain model binary stellar systems in galactic gravitational fields // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, v. 160, No 3, p. 249–253, 1972.
 139. *J Jeans J. H.* On the 'Kinetic Theory' of star-clusters // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, v. 74, No 2, p. 109–112, 1913.
 140. *J Jeans J. H.* *Astronomy and Cosmogony.* 3rd ed. New York: Dover Publ. 1961. xv+428 p.

141. *Jehle H.* Statistical hypotheses in Stellar Dynamics // Phys. Rev., v. 70, No 7/8, p. 538–555, 1946.
142. *Kandrup H. E.* Stochastic gravitational fluctuations in a self-consistent mean field theory // Physics Reports, v. 63, No 1, p. 1–59, 1980.
143. *Kandrup H. E.* A generalized Landau equation for a system with a self-consistent mean field: derivation from an N-particle Liouville equation // Astrophys. J., v. 244, No 1, p. 316–330, 1981.
144. *Kandrup H. E.* The complexion of forces in an anisotropic self-gravitating system // Astrophys. J., v. 244, No 3, p. 1039–1063, 1981.
145. *Kandrup H. E.* An H -theorem for violent relaxation? // Mon. Not. Roy. Astron. Soc., v. 225, No 4, p. 995–998, 1987.
146. *Kandrup H. E.* ‘Discreteness fluctuation’ and relaxation in stellar dynamical systems // Mon. Not. Roy. Astron. Soc., v. 235, No 4, p. 1151–1167, 1988.
147. *King I.* The escape of stars from clusters. V. The basic escape rate // Astron. J., v. 65, No 3, p. 122–126, 1960.
148. *King I.* The structure of star clusters. I. An empirical density law // Astron. J., v. 67, No 2, p. 471–485, 1962.
149. *Klimontovich Yu. L.* From the Hamiltonian mechanics to a continuous media. Dissipative structures. Criteria of self-organization // Теор. и матем. физ., т. 96, № 3, с. 385–416, 1993.
150. *Kurth R.* Gibt es eine statistische Mechanik von Sternhaufen? // Z. Angew. Mathem. Phys., Bd. 6, H. 2, S. 115–125, 1955.
151. *Lundahl C. F.* Contribution to Statistical Mechanics based on the law by Newton // Meddel. Lund Astron. Observ., ser. II, Bd. 5, Nr 45, p. 1–36, 1926.
152. *Lynden-Bell D., Wood R.* The gravothermal catastrophe in isothermal spheres and the onset of red-giant structure for stellar systems // Mon. Not. Roy. Astron. Soc., v. 138, No 4. P. 495–525, 1968.
153. *MacDonald W. M., Rosenbluth M. N., Chuck W.* Relaxation of a system of particles with Coulomb interaction // Phys. Rev., v. 107, No 2, p. 350–353, 1957.

154. *Miller R. H.* On the 'thermodynamics' of self-gravitating N -body system // *Astrophys. J.*, v. 180, Pt. 1, No 3, p. 759–782, 1973.
155. *Nelson R. W., Tremaine S.* Linear response, dynamical friction, and the fluctuation dissipation theorem in stellar dynamics // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, v. 306, No 1. P. 1–21, 1999.
156. *Ostriker J. P., Davidson A. F.* Time of relaxation. I. Unbounded medium // *Astrophys. J.*, v. 151, Pt. 1, No 2, p. 679–686, 1968.
157. *Poincaré H.* La Voie Lactée et la théorie de gaz // *Bull. Soc. astron. France*, t. 20, p. 153–165, 1906.
158. *Prigogine I., Severne G.* On the statistical mechanics of gravitational plasmas // *Physica*, D. 3, No 8, B. 1376–1396, 1966.
159. *Rosenbluth M. N., MacDonald W. V., Judd J. L.* Fokker – Planck equation for an inverse-square force // *Phys. Rev.*, v. 107, No 1, p. 1–6, 1957.
160. *Ross D., Mennim A., Heggie D. C.* Escape from a tidally limited star cluster // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, v. 284, No 3, p. 811–814, 1997.
161. *Schwarzschild K.* Stationäre Geschwindigkeitsverteilung im Sternsystem // *Probleme der Astronomie. Festschrift für Hugo von Seeliger* / Ed. H. Kienle. Berlin: Verlag von Julius Springer. 1924. S. 94–105.
162. *Sellwood J. A., Preto M.* Scattering of stars by transient spiral waves // *Disks of Galaxies: Kinematics, Dynamics and Perturbations (ASP Conf. Ser., v. 275)* / Ed. E. Athanassoula et al. San Francisco: ASP. 2002. P. 281–292.
163. *Serafin R. A.* On the rectilinear non-collision motion // *Cel. Mech. Dyn. Astron.*, v. 80, p. 97–109, 2001.
164. *Smith H. P.* Mass segregation, relaxation, and the Coulomb logarithm in N -body systems // *Astrophys. J.*, v. 398, Pt. 1, No 2, p. 519–524, 1992.
165. *Spitzer L.* The stability of isolated clusters // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, v. 100, No 5, p. 396–413, 1940.
166. *Spitzer L.* Evaporation and formation of compact nuclei in spherical stellar systems // *Astrophys. J. (Letters)*, v. 158, No 3, p. L139–L143, 1969.

167. *Spohn H.* Kinetic equations from Hamiltonian dynamics: Markovian limit // *Rev. Mod. Phys.*, v. 53, No 3, p. 589–615, 1980.
168. *Theimer O., Hoffman H.* On the relation between Holtsmark's microfield distribution function and the cutoff value of the collision parameter in fully ionized gases // *Astrophys. J.*, v. 129, No 2, p.224–235, 1959.
169. *von Hoerner S.* Die Auflösungszeit offener Sternhaufen // *Z. Astrophys.* Bd. 44, H. 2, S. 221–242, 1958.
170. *Weinberg M. D.* Fluctuations in finite-N equilibrium stellar systems // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, v. 297, No 1, p. 101–107, 1998.
171. *Williamson R. E., Chandrasekhar S.* The time of relaxation of stellar systems. II // *Astrophys. J.*, v. 93, No 2, p. 305–322, 1941.
172. *Woltjer L.* Structure and dynamics of galaxies // *Relativity Theory and Astrophysics. 2. Galactic Structure (Lectures in Applied Mathematics, v. 9)* / Ed. J. Ehlers. Providence: Amer. Math. Soc. 1967. P. 1–65.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. Гидродинамическое моделирование Галактики	6
1.1. Введение.....	6
1.2. Гидродинамические уравнения.....	6
1.3. Замыкание системы уравнений. I.....	8
1.4. Скорость вращения.....	11
1.5. Замыкание системы уравнений. II.....	13
1.6. Модель гравитационного поля.....	14
1.7. Алгоритм решения системы уравнений.....	17
1.8. Результаты.....	21
1.9. Заключение.....	24
Литература к главе 1	25
Глава 2. Моделирование галактик методами фотометрии	26
2.1. Введение.....	26
2.2. Основные физические величины фотометрии.....	26
2.3. Приемники излучения.....	34
2.4. Обработка данных.....	35
2.5. Точность фотометрических измерений.....	38
2.6. Межзвездная материя и поглощение света.....	50
2.7. Заключение.....	66
Литература к главе 2	67
Глава 3. Принципиальные вопросы динамики галактик	68
3.1. Введение.....	68
3.2. Объем звёздной системы.....	69
3.3. Регулярные и иррегулярные силы.....	72
3.4. О действии иррегулярных сил.....	77
3.5. Столкновительное кинетическое уравнение.....	87

3.6. Особенности статистической механики звездных систем.	94
3.7. Заключение.....	98
Литература к главе 3.....	99