САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет прикладной математики – процессов управления

А. П. ИВАНОВ

АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ

Методические указания

Санкт-Петербург
2013

§1. Линейная задача метода наименьших квадратов

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана некоторая функция $f(\cdot)$, причём её значения $\{y_i = f(x_i)\}$ в узлах сетки $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ известны с погрешностями $\{\varepsilon_i\}$, то есть вместо набора значений $\{y_i\}$ имеем набор $\{\tilde{y}_i = y_i + \varepsilon_i\}$. (Далее под $\{y_i\}$ будем понимать заданные значения функции, т.е. с погрешностями, вводя обозначение $\tilde{y}_i$ лишь в случае необходимости). Пусть, кроме того, на $[a,b]$ определены функции $\varphi_j(\cdot) \in \Phi$, $\ j = \overline{0,m}$.

Введём в рассмотрение обобщённый полином

$$P_m(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j \varphi_j(x).$$

Пусть a – вектор коэффициентов полинома $P_m(\cdot)$, y – вектор значений функции $f(\cdot)$ и, наконец, $\varphi(\cdot)$ – вектор-функция, составленная из значений $\{\varphi_i(x)\}$:

$$\begin{aligned}
&a = (a_0, a_1, \ldots, a_m)^T,\\
&y = (y_0, y_1, \ldots, y_n)^T,\\
&\varphi(x) = (\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x))^T,
\end{aligned}$$

Введём также функции

$$\sigma(a,y) = \sum_{i=0}^{n} (P_m(x_i) - y_i)^2, \quad \delta(a,y) = \sqrt{\frac{\sigma(a,y)}{n+1}}.$$

Функцию $\delta(a,y)$ назовём *среднеквадратичным уклонением* обобщённого полинома $P_m(\cdot)$ от функции $f(\cdot)$ на системе узлов $\{x_i\}$. Поставим задачу: *найти обобщённый полином* $\bar{P}_m(\cdot) = \bar{a}^T \varphi(\cdot)$, *для которого среднеквадратичное уклонение минимально*:

$$\delta(\bar{a}, y) = \min_a \delta(a,y).$$

Поставленную здесь задачу называют *линейной задачей метода наименьших квадратов* или просто методом наименьших квадратов (МНК). Если искомый полином существует, то будем называть его *многочленом наилучшего среднеквадратичного приближения.*

Отметим, что минимум функций $\sigma(\cdot)$ и $\delta(\cdot)$ достигается *на одном и том же векторе* $\bar{a}$, поэтому фактически будем вести минимизацию функции $\sigma(a, y)$, а не $\delta(\cdot)$.

Простейший подход к решению задачи – использование необходимых условий в задаче поиска экстремума для дифференцируемой функции:

$$\frac{\partial \sigma(a, y)}{\partial a_k}\Big|_{a=\bar{a}} = 0, \quad k = \overline{0, m}. \tag{1.1}$$

В дополнение к уже введённым ранее обозначениям примем также следующее:

$$Q = \begin{pmatrix} \varphi_0(x_0), & \varphi_1(x_0), & \ldots & \varphi_m(x_0), \\ \varphi_0(x_1), & \varphi_1(x_1), & \ldots & \varphi_m(x_1), \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_0(x_n), & \varphi_1(x_n), & \ldots & \varphi_m(x_n) \end{pmatrix}.$$

Кроме того будем считать, что под скалярным произведением двух векторов $u, v \in \mathbb{R}^k$ понимается число

$$(u, v) = u^T v = u \cdot v = \sum_{i=1}^{k} u_i v_i,$$

а под нормой векторов – евклидова норма $\|y\|^2 = (y, y)$. Тогда в новых обозначениях

$$\begin{aligned} \sigma(a, y) = \|Qa - y\|^2 = (Qa - y, Qa - y) = \\ = (Qa, Qa) - 2(Qa, y) + (y, y) = \\ = (a, Q^T Qa) - 2(a, Q^T y) + \|y\|^2. \end{aligned}$$

Для определения параметров искомого полинома в соответствии с формулой (1.1) имеем СЛАУ:

$$Ha = b, \quad \text{где} \;\; H = Q^T Q, \;\; b = Q^T y. \tag{1.2}$$

Остаётся для определения параметров полинома $\bar{P}_m(x)$ решить систему линейных алгебраических уравнений (1.2). В предположении линейной независимости функций $\{\varphi_i\}$ матрица H системы (1.2) неособая и задача имеет единственное решение.

§2. Наилучшие приближения в линейных нормированных пространствах. Постановка задачи

Пусть U – линейное нормированное пространство заданных линейно независимых функций $\{\varphi_i(\cdot)\} \subset U$, $i = \overline{0,n}$ и $f(\cdot) \in U$.

Введём подпространство $\bar{U}$ пространства U:

$$\bar{U} = \{\varphi(\cdot) \in U: \ \varphi(\cdot) = \sum_{i=0}^{n} c_i \varphi_i(\cdot), \ \varphi_i(\cdot) \in U\} \tag{2.1}$$

и расстояние между его элементами

$$\varrho\,(f,\varphi) = \|f(\cdot) - \varphi(\cdot)\| \geq 0.$$

Рассмотрим вопрос: существует ли $\bar{\varphi}(\cdot) \in \bar{U}$ такой, что имеет место равенство $\varrho\,(f,\bar{\varphi}) = \inf\limits_{\varphi \in \bar{U}} \varrho\,(f,\varphi)$?

Определение 2.1. Всякий элемент $\bar{\varphi}(\cdot) \in \bar{U}$, для которого выполняется последнее равенство, называется элементом *наилучшего приближения* для $f(\cdot)$ в $\bar{U}$ (или *проекцией* $f(\cdot)$ на $\bar{U}$). ♣

Имеет место следующая теорема:

Теорема 2.1. *В $\bar{U}$ для любой функции $f(\cdot) \in U$ существует элемент наилучшего приближения $\bar{\varphi}(\cdot)$.* ♣

Единственность элемента наилучшего приближения

Определение 2.2. Линейное нормированное пространство U называется *строго нормированным*, если из условия

$$\|f_1(\cdot) + f_2(\cdot)\| = \|f_1(\cdot)\| + \|f_2(\cdot)\|,$$

где $f_1(\cdot) \neq 0$, $f_2(\cdot) \neq 0$ следует равенство:

$$f_2(\cdot) = \alpha f_1(\cdot), \ \alpha > 0. \ ♣$$

Имеет место следующая теорема:

Теорема 2.2. *Если U – строго нормированное пространство, то в подпространстве $\bar{U}$ существует единственный элемент наилучшего приближения для любой функции $f(\cdot) \in U$.* ♣

§3. Приближение функций в гильбертовых пространствах

Будем рассматривать в дальнейшем только вещественные пространства. Напомним, что линейное пространство называется гильбертовым, если

- в нём введено скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$;
- оно сепарабельно, т.е. в нём существует счётное всюду плотное множество.

Напомним, что норма в гильбертовом пространстве H вводится как $\|h\|^2 = (h, h)$. Система функций $\{\varphi_i\}$ в гильбертовом пространстве называется ортонормированной, если $(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера. Ортонормированная система $\{\varphi_i\}$ называется полной, если из условия $(\varphi_i, \psi) = 0$ следует $\psi = 0$. *В гильбертовом пространстве любая ортонормированная система не более чем счётна.* Приведём некоторые теоремы.

Теорема 3.1. *В гильбертовом пространстве существует не более чем счётная полная система функций.* ♣

Теорема 3.2. *В гильбертовом пространстве ряд Фурье для любого элемента этого пространства по полной ортонормированной системе элементов сходится к этому элементу.* ♣

Рассмотрим гильбертово пространство U и его подпространство H. Пусть в U определена функция $f(\cdot)$. Поставим задачу: *найти элемент $h_0 \in H$ (элемент наилучшего приближения), для которого выполнено равенство*

$$\|f(\cdot) - h_0(\cdot)\| = \inf_{h \in H} \|f(\cdot) - h(\cdot)\|.$$

Замечание 3.1. Здесь не предполагается, что H есть линейная оболочка, натянутая на конечное число элементов из U. ♣

Перейти к оглавлению на странице: 12

§4. Основные теоремы теории приближения

Теорема 4.1. *Если в H существует элемент наилучшего приближения h_0, то $(f-h_0,h)=0$ для любого $h\in H$.* ♣

Доказательство. Пусть $h_0\in H$ существует, но одновременно существует и $h_1\in H$: $(f-h_0,h_1)=\alpha\neq 0$. Рассмотрим элемент $h_2=h_0+\alpha h_1$, считая $\|h_1\|=1$. Имеем:

$$\|f-h_2\|^2=\|f-h_0\|^2-2\alpha(f-h_0,h_1)+\alpha^2=\|f-h_0\|^2-\alpha^2,$$

что противоречит определению h_0. ♣

Теорема 4.2. *В подпространстве $H\subset U$ не может существовать двух элементов наилучшего приближения.* ♣

Доказательство. Пусть это не так, т.е. существуют *два* элемента наилучшего приближения h_0, h_0', $h_0\neq h_0'$; тогда по теореме 4.1 имеем

$$\left\{\begin{array}{lcl}(f-h_0,h) & = & 0,\\ (f-h_0',h) & = & 0 \quad \forall h\in H,\ \text{например } h=\Delta h=h_0-h_0'.\end{array}\right. \tag{4.1}$$

Тогда

$$\|\Delta h\|^2=\big((h_0-f)+(f-h_0'),\Delta h\big)=(h_0-f,\Delta h)+(f-h_0',\Delta h)=0$$

в соответствии с (4.1), откуда $\|\Delta h\|=0$, $\Rightarrow \Delta h=0$, что противоречит предположению. ♣

Пусть теперь

$$H=H_n=\{h:\ h=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i h_i\},$$

$\{h_i\}$ $i=\overline{1,n}$ – *линейно независимы*, причём $\{h_i\}$ $i=\overline{1,\infty}$ – *полная* система[1] элементов в *полном*[2] гильбертовом пространстве U.

[1]ортонормированная система элементов $\{\varphi_i\}$ пространства U называется полной, если не существует элемента $h\in U$, $h\neq 0$ такого, что $(\varphi_i,h)=0\ \forall i$

[2]пространство называется полным, если любая фундаментальная (сходящаяся в себе) последовательность элементов этого пространства сходится к некоторому элементу этого пространства

На основании предыдущих рассмотрений элемент наилучшего приближения существует и единствен. Рассмотрим вопрос о построении элемента наилучшего приближения h_0.

Поскольку $h_0 \in H_n$, то на основании теоремы 4.1 должны быть выполнены равенства

$$(f - h_0, h_i) = 0, \quad h_i \in H_n,\ i = \overline{1, n}. \tag{4.2}$$

Это есть СЛАУ $Ax = b$ с матрицей Грама $A = \{(h_i, h_j)\}$, поэтому $\det A \neq 0$ и, следовательно, для любой функции $f(\cdot)$ существует единственный элемент наилучшего приближения $h_0 \in H_n$:

$$h_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i.$$

Уклонение этого элемента от функции $f(\cdot)$ может быть представлено в виде:

$$\delta^2 = \|f - h_0\|^2 = (f - h_0, f - h_0) = (f, f) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (h_i, f).$$

При условии *ортонормированности* элементов $\{h_i\}$ в соответствии с равенством Парсеваля имеет место оценка

$$\delta^2 = \|f - h_0\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2.$$

§5. Приближения алгебраическими многочленами

Пусть $U = L_2[a, b]$. Скалярное произведение и норма, как известно, задаются в этом пространстве формулами:

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x)\, dx, \quad \|f\|^2 = \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

Пусть $p(x) \geq 0$, причём $p(x) = 0$ не более, чем на множестве меры нуль. Введём пространство $L_2(p)$: считаем, что $f(\cdot) \in L_2(p)$, если существует интеграл

$$\int_a^b p\,(x) f^2(x)\, dx.$$

Очевидно, что это пространство является линейным. Скалярное произведение в $L_2(p)$ зададим равенством:

$$(f, g) = \int_a^b p\,(x) f(x) g(x)\, dx.$$

Сходимость в пространстве L_2 – известная в анализе *сходимость в среднем*, а в $L_2(p)$ – *сходимость в среднем с весом* $p(\cdot)$. В дальнейшем будем рассматривать пространство $L_2(p)$ как более общий случай.

Функции $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$, взятые в любом числе, линейно независимы в $L_2(p)$. Множество $\mathcal{P}_n$ полиномов степени не выше n можно рассматривать как линейную оболочку, натянутую на функции $1, x, x^2, \ldots, x^n$, поэтому на основании предыдущих результатов можем утверждать, что в $\mathcal{P}_n$ существует единственный полином $\bar{P}_n(\cdot)$, дающий наилучшее приближение функции $f(\cdot) \in L_2(p)$ по метрике этого пространства, т.е.

$$\delta_n^2 = \|f - \bar{P}_n\|^2 = \int_a^b p\,(x)\big(f(x) - \bar{P}_n(x)\big)^2\, dx = \\ = \inf_{P_n \in \mathcal{P}_n} \int_a^b p\,(x)\big(f(x) - \bar{P}_n(x)\big)^2\, dx.$$

Если ввести обозначения

$$s_k = \int_a^b p\,(x) x^k\, dx, \quad m_k = \int_a^b p\,(x) f(x) x^k\, dx,$$

то коэффициенты $\{a_i\}$ полинома $\bar{P}_n(\cdot)$ могут быть найдены как решение следующей СЛАУ

$$\big(f(x) - P_n(x), x^k\big) = 0, \quad k = \overline{0, n},$$

или с использованием введённых обозначений

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_0 s_0 + a_1 s_1 + \cdots + a_n s_n & = & m_0, \\ a_0 s_1 + a_1 s_0 + \cdots + a_n s_{n+1} & = & m_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_0 s_n + a_1 s_{n+1} + \cdots + a_n s_{2n} & = & m_n. \end{array} \right.$$

Это есть система с определителем Грама, построенная по системе линейно независимых элементов $\{x^k\}$ и потому имеет единственное решение для любой функции $f(\cdot) \in L_2(p))$, однако с ростом n её обусловленность ухудшается, поэтому выгоднее выбирать ортонормированную систему полиномов. Метод ортогонализации позволяет построить такую систему:

$$\{Q_0(x), Q_1(x), \ldots, Q_n(x)\}: \quad \int_a^b p(x) Q_i(x) Q_j(x)\, dx = \delta_{ij}.$$

Имеет место

Теорема 5.1. *Ортонормированная система полиномов в $L_2(p)$ определяется единственным образом.* ♣

Определение 5.1. Многочлен $\alpha_n Q_n(\cdot)$, $\alpha_n \neq 0$ будем называть ортогональным (относительно веса $p(\cdot)$ и отрезка $[a, b]$). ♣

Для выбранной системы ортогональных многочленов

$$\{Q_0(x), Q_1(x), \ldots, Q_n(x)\}$$

многочлен наилучшего приближения $\bar{Q}_n(x) \in \mathcal{P}_n$ запишется в виде

$$\bar{Q}_n(x) = c_0 Q_0(x) + c_1 Q_1(x) + \cdots + c_n Q_n(x),$$

причём коэффициенты $\{c_i\}$ на основании общей теории вычисляются по формулам

$$c_k = \frac{\displaystyle\int_a^b p(x) f(x) Q_k(x)\, dx}{\displaystyle\int_a^b p(x) Q_k^2(x)\, dx}.$$

Величина отклонения δ_n наилучшего приближения от аппроксимируемой функции определится по формуле

$$\delta_n^2 = \int_a^b p(x) f^2(x)\, dx - \sum_{k=0}^{n} c_k^2 \int_a^b p(x) Q_k^2(x)\, dx.$$

Частным случаем ортогональных полиномов являются многочлены **Лежандра**:

$$p(x) = 1,\; x \in [-1, 1], \quad L_n(x) = \frac{1}{n! 2^n} \cdot \frac{d^n}{dx^n}\big[(1 - x^2)^n\big].$$

§6. Содержание задания

1. Для указанной функции $f(x)$ по методу наименьших квадратов построить алгебраический полином наилучшего среднеквадратичного приближения третьей степени по пяти узлам $\{x_i\}$ и значениям функции $\{f(x_i)\}$ в этих узлах.
2. Для той же функции на том же отрезке построить алгебраический полином наилучшего приближения в пространстве L_2 третьей степени с использованием полиномов Лежандра.
3. Построить графики исходной функции и двух построенных полиномов.

§7. Функции для выполнения задания

Отрезок аппроксимации для всех указанных функций принять равным $[-1, 1]$.

1. $f(x) = x - \sin x$;
2. $f(x) = x^3 + e^x$;
3. $f(x) = \sqrt{x+1} - \cos x$;
4. $f(x) = x^2 \cos x$;
5. $f(x) = \sin x - \dfrac{7}{2x+6}$;
6. $f(x) = \ln x^2 + x^3$;
7. $f(x) = 3x - \cos(x+1)$;
8. $f(x) = x\sqrt{x+2}$;
9. $f(x) = x^2 \sin x$;
10. $f(x) = x^2 + \sin x$;
11. $f(x) = x \ln(x+2)^2$;
12. $f(x) = x^3 \sin x$;
13. $f(x) = x \operatorname{tg} x$;
14. $f(x) = x \ln x^2$;
15. $f(x) = x^2 \operatorname{tg} x$;
16. $f(x) = \sqrt{x^2} + \ln x^2$;
17. $f(x) = e^x (x-2)^2$;
18. $f(x) = (x+3)\cos x$;
19. $f(x) = x^2 \ln(x+3)$;
20. $f(x) = x \cos(x+3)$;

Перейти к оглавлению на странице: 12

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. Бахвалов, Н. Жидков, Г. Кобельков.* Численные методы. — М.: Изд. Физматлит, 2006.
2. *Н. Бахвалов* Численные методы. — М.: Изд. Наука, 1973.
3. *И. С. Березин, Н. П. Жидков.* Методы вычислений, т. 1. — М.: Изд. Физматлит, 1962.

ОГЛАВЛЕНИЕ