

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет прикладной математики – процессов управления

А. П. ИВАНОВ, И. В. ОЛЕМСКОЙ

**КУРСОВАЯ РАБОТА
ПО ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ ДЛЯ II КУРСА**

Методические указания

Санкт-Петербург
2009

КУРСОВАЯ РАБОТА ПО ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ

1. Методом Рунге-Кутты IV порядка проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} + a \cdot y = \varphi(x), \quad \varphi(x) = \sin kx, \quad k = \frac{a\pi}{4}, \quad (1)$$

на отрезке $x \in [0; 5]$, приняв $\pi = 3.14159265$, с начальным условием $y(0) = 0$. Вывести значения интегрируемой функции в точках $x_i = 0.5 \cdot i$, $i = \overline{0, 10}$.

2. Используя представление искомого решения в виде

$$y(x) = \int_0^x e^{a(t-x)} \varphi(t) dt, \quad (2)$$

получить значения $y(x)$ с точностью ε в заданных точках $x_i = 0.5 \cdot i$, $i = \overline{0, 10}$, применив для вычисления интеграла составную квадратурную формулу Симпсона.

3. Найти с заданной точностью ε ближайший к нулю корень уравнения $y(x) = 0$.
4. Взяв значения $z_i = y(i) + (-1)^i \varepsilon_i$, $i = \overline{0, 10}$, построить полином наилучшего среднеквадратичного приближения пятой степени $\bar{Q}_5(x)$, то есть найти параметры $\{a_i\}$ полинома $Q_5(x) = a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5$ из условия

$$\sum_{i=0}^{10} (\bar{Q}_5(x_i) - z_i)^2 = \min_{\{a_i\}} \sum_{i=0}^{10} (Q_5(x_i) - z_i)^2. \quad (3)$$

Решить эту же задачу, заменив $\{z_i\}$ точными значениями функции $y(x)$ в точках $x_i = i$, $i = \overline{0, 5}$ (см. формулу (1.7)).

В заданиях 1, 2, 4 построить графики соответствующих функций.

ГЛАВА 1. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§1. Постановка задачи

Пусть в области $D = \{a \leq x \leq b, |y^i - y_0^i| \leq b_i\} \in R^{n+1}$ определена функция

$$f \equiv f(x, y^1, \dots, y^n), \quad (x, y) \in D.$$

Необходимо найти решение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1.1)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$y(x_0) = y_0. \quad (1.2)$$

§2. Одношаговые методы

Одношаговые методы – это методы, которые последовательно дают приближения y_m к значениям точного решения $y(x_m)$ в каждом узле x_m сетки на основе известного приближения y_{m-1} к решению в точке x_{m-1} .

В общем виде их можно представить :

$$y_{m+1} = F(f, x_{m+1}, x_m, y_{m+1}, y_m). \quad (2.1)$$

Надо отметить, что одношаговые методы вида (2.1) в правой части содержат искомое значение y_{m+1} . Это позволяет ввести еще один параметр классифицирующий численные методы. Наличие в правой части представления метода в виде (2.1) зависимости от искомой функции y_{m+1} делает его неявным. Отсутствие этой зависимости – явным, вида:

$$y_{m+1} = F(f, x_{m+1}, x_m, y_m). \quad (2.2)$$

Общая схема явного m – этапного одношагового метода Рунге-Кутты имеет вид

$$y(x+h) \approx y(x) + \sum_{i=1}^m p_i k_i(h), \quad (2.3)$$

$$k_i(h) = hf(x + \alpha_i h, y(x) + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j), \quad i = \overline{1, m}. \quad (2.4)$$

Он идеально приспособлен для практического расчета: во-первых, не требует вычисления дополнительных начальных значений; во-вторых, позволяет легко менять шаг интегрирования. Функция

$$\Psi(h) = \varrho_{x+h} = y(x+h) - y(x) - \sum_{i=1}^m p_i k_i(h) \approx O(h^{s+1}), \quad (2.5)$$

называется **методической (локальной) погрешностью одношагового метода (методической погрешностью на шаге)**, а s – порядком метода.

Выбор постоянных (параметров метода) $p_i, \alpha_i, \beta_{ij}$ производится так, чтобы разложение методической погрешности (2.5) по степеням h начиналось со степени $s+1$ при произвольной функции $f(x, y)$.

Расчётная схема четырёхэтапного метода Рунге-Кутты четвёртого порядка. (Правило одной шестой).

$$y(x+h) \approx y(x) + \frac{1}{6}[k_1(h) + 2k_2(h) + 2k_3(h) + k_4(h)]. \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} k_1(h) &= hf(x, y(x)), \\ k_2(h) &= hf(x + \frac{1}{2}h, y(x) + \frac{1}{2}k_1(h)), \\ k_3(h) &= hf(x + \frac{1}{2}h, y(x) + \frac{1}{2}k_2(h)), \\ k_4(h) &= hf(x + h, y(x) + k_3(h)). \end{aligned}$$

Погрешность расчётной схемы (2.6), как и для всех формул Рунге-Кутты четвёртого порядка точности, представляется в следующей

форме:

$$\varrho_{x+h} = \frac{\Psi^{(5)}(0)}{120} h^5 + o(h^5). \quad (2.7)$$

Классификация погрешностей.

Требуется найти функцию $y(x)$, которая является решением дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y(x)), \quad x \in [a, b], \quad (2.8)$$

и принимает в точке $x_0 = a$ некоторое определённое значение

$$y(x_0) = y_0. \quad (2.9)$$

- В случае, если начальное условие $y(x_0)$ вычислено (задано) с погрешностью, то вместо задачи (2.8), (2.9), решается задача:

$$\frac{dy_0}{dx} = f(x, y_0(x)), \quad x \in [a, b], \quad (2.10)$$

$$y_0(x_0) = \bar{y}_0. \quad (2.11)$$

с изменёнными начальными условиями

$$y_0 - \bar{y}_0 = R_0 \neq 0. \quad (2.12)$$

Решение задачи (2.10), (2.11) зависит от \bar{y}_0 и не совпадает с решением $y(x)$ исходной задачи (2.8), (2.9).

Разность $\xi_n = y(x_n) - y_0(x_n)$ называется **неустранимой погрешностью решения** $y_0(x)$.

- **Разность** между значением решения $y_0(x_n)$ задачи (2.10), (2.11) и его приближённым значением y_n , полученным по формуле

$$y_n = F(f; h; x_{n-1}; y_{n-1}) \quad (2.13)$$

одношагового метода,

$$\varepsilon_n = y_0(x_n) - y_n \quad (2.14)$$

называется погрешностью метода, или глобальной погрешностью метода.

Но вследствие ошибок округления и приближённого вычисления правой части $f(x, y)$ дифференциального уравнения вычисления значений y_n по формуле (2.13) выполняются неточно. Фактически найденные значения \hat{y}_n удовлетворяют не соотношению (2.13), а условию

$$F(f; h; x_{n-1}; \hat{y}_{n-1}) - \hat{y}_n = \delta_n \quad (2.15)$$

Невязка δ_n называется погрешностью округления на n -ом шаге.

- Разность между точным решением $y(x_n)$ задачи (2.8), (2.9) и приближённым фактически найденным значением \hat{y}_n

$$R_n = y(x_n) - \hat{y}_n \quad (2.16)$$

называется полной погрешностью приближённого решения

- Величина $\eta_n = y_n - \hat{y}_n$ называется вычислительной погрешностью.
- Из соотношений (2), (2.13), (2.16), (2) следует, что

$$R_n = \xi_n + \varepsilon_n + \eta_n \quad (2.17)$$

т.е. полная погрешность приближённого решения равна сумме неустранимой погрешности, погрешности метода и вычислительной погрешности.

Для полной погрешности справедливо представление

$$R_n = \sum_{j=1}^n (\varrho_j + \delta_j) \cdot e^{\int_{x_j}^{x_n} f_y(\psi, \bar{y}_j(\psi)) d\psi} + R_0 \cdot e^{\int_{x_0}^{x_n} f_y(\psi, \bar{y}_0(\psi)) d\psi} \quad (2.18)$$

Здесь $y_j(x)$ – интегральная кривая, проходящая через точку (x_j, \hat{y}_j) .

Из (2.18) следует, что полная погрешность приближённого решения задачи Коши (2.8), (2.9) в точке x_n равна сумме локальных погрешностей на каждом шаге, взятых с коэффициентами

$$e^{\int_{x_j}^{x_n} f_y(\psi, \bar{y}_j(\psi)) d\psi}. \quad (2.19)$$

Характер отклонения приближённого решения от точного, т.е. эволюция полной погрешности, зависит от поведения интегральных кривых уравнения (2.8).

- Если $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, т.е. правая часть уравнения не зависит от y , то полная погрешность равна сумме локальных погрешностей:

$$R_n = R_0 + \sum_{j=1}^n (\varrho_j + \delta_j) \quad (2.20)$$

- Если $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$, т.е. интегральные кривые расходятся, влияние локальных погрешностей, полученных на предыдущих шагах, возрастает и полная погрешность больше суммы локальных погрешностей.
- Если $\frac{\partial f}{\partial y} < 0$, т.е. интегральные кривые сближаются, влияние локальных погрешностей, полученных на предыдущих шагах, ослабевает и полная погрешность меньше суммы локальных погрешностей.

Такое поведение характерно как для полной погрешности, так и для отдельных её частей.

Практическая реализация явных одношаговых методов типа Рунге-Кутты решения задачи Коши.

Полагаем, что в нашем вычислительном процессе погрешностью округления и неустраняемой погрешностью можно пренебречь.

Оценки погрешностей необходимы, с одной стороны, чтобы обеспечить длину шага h , достаточно малую для достижения требуемой точности вычисляемых результатов, а с другой стороны – чтобы гарантировать достаточно большую длину шага во избежание бесполезной вычислительной работы.

Метод Рунге оценки полной погрешности.

Полагаем, что в точке x_n по m -этапному методу (2.3) s -ого порядка точности с постоянным шагом h вычислено приближённое решение \bar{y}_n исходной задачи Коши. Считаем, что для полной погрешности метода Рунге-Кутты s -о порядка справедливо представление:

$$y(x_n) - \bar{y}_n \approx z(x_n)h^s, \quad (2.21)$$

где $z(x_n)h^s$ – главный член асимптотического разложения полной погрешности. Используя ту же расчётную формулу с шагом $\frac{h}{2}$, вычислим в той же точке x_n другое значение решения \tilde{y}_n . Для этого потребуется в два раза больше шагов и погрешность приближённого решения в этом случае может быть представлена

$$y(x_n) - \tilde{y}_n \approx z(x_n) \left(\frac{h}{2}\right)^s. \quad (2.22)$$

Исключим из (2.21), (2.22) точное значение решения $y(x_n)$. И правило Рунге оценки глобальной погрешности может быть записано следующим образом:

$$\bar{R}_n = y(x_n) - \bar{y}_n \approx \frac{(\tilde{y}_n - \bar{y}_n)}{(1 - 2^{-s})}. \quad (2.23)$$

$$\tilde{R}_n = y(x_n) - \tilde{y}_n \approx \frac{(\tilde{y}_n - \bar{y}_n)}{(2^s - 1)}. \quad (2.24)$$

В качестве решения в точке x_n примем значение \tilde{y}_n как более точное по сравнению с \bar{y}_n . Для него имеем оценку погрешности

(2.24). Эта величина может быть как больше, так и меньше некоторого значения ε , являющегося **наперёд заданной допустимой погрешностью**.

Если $|\tilde{R}_n| \leq \varepsilon$, то заданная точность приближённого решения достигается. Полученное приближённое решение можно уточнить, прибавив к нему величину главного члена погрешности, т.е. положив

$$y(x_n) \approx y_n = \tilde{y}_n + \tilde{R}_n.$$

При этом

$$y(x_n) - y_n = O(h^{s+1}).$$

ГЛАВА 2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

§1. Квадратурные формулы

Будем рассматривать задачу о вычислении однократного интеграла

$$J(F) = \int_a^b F(x) dx \quad (1.1)$$

с помощью конечного числа значений интегрируемой функции.

Интервал интегрирования $[a, b]$ есть любой конечный (или бесконечный) отрезок числовой оси. Подынтегральная функция $F(x)$ – любая интегрируемая в смысле Римана функция.

Каждое правило основано на замене интегрируемой функции на какую-либо элементарную функцию – алгебраический многочлен, рациональную функцию, тригонометрический многочлен и др. Чтобы такая замена давала хорошую точность, требуется, чтобы заменяемая функция $F(x)$ обладала высоким порядком гладкости.

Если $F(x)$ имеет какие-нибудь особенности, мы заинтересованы в выделении их. Выделение делается обычно при помощи разложения $F(x)$ на два сомножителя $F(x) = p(x) \cdot f(x)$, где

- $p(x)$ имеет особенности того же типа, что и $F(x)$, и называется **весовой функцией**;
- $f(x)$ – гладкая функция.

Такое разложение приводит (1.1) к виду:

$$J(F) = \int_a^b p(x)f(x) dx. \quad (1.2)$$

Считая вес $p(x)$ фиксированным, а $f(x)$ любой гладкой функцией, будем строить правило интегрирования, рассчитанное на функции, имеющие одинаковые, заранее известные особенности. С учётом

всего вышесказанного будем строить правила вычисления определённого интеграла следующего вида:

$$J(F) = \int_a^b p(x)f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) = S_n, \quad x_k \in [a, b], \quad (1.3)$$

где

- $f(x) \in \Phi(a, b)$ – некоторый класс функций $f(x)$, определённых на $[a, b]$;
- $p(x)$ – **весовая функция** – некоторая фиксированная неотрицательная на $[a, b]$ функция, для которой

$$\int_a^b p(x) dx > 0, \quad (1.4)$$

и для $\forall f(x) \in \mathbb{R}$ существует

$$\int_a^b p(x)|f(x)| dx. \quad (1.5)$$

Определение 1.1. Равенство (1.3) называют формулой механических квадратур или просто квадратурной формулой, а $S_n = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$ – квадратурной суммой; A_k – квадратурными коэффициентами формулы (1.3); x_k – узлами квадратурной формулы (1.3) .

Будем предполагать, что узлы квадратурной формулы (1.3) упорядочены по возрастанию $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $n, x_k, A_k, k = 1, \dots, n$; – являются параметрами квадратурной формулы (1.3) и их следует выбирать так, чтобы достигнуть “возможно лучшего” результата интегрирования для всех функций избранного класса.

Определение 1.2. Величина

$$R_n(f) = \int_a^b p(x)f(x) dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) = J(f) - S_n(f). \quad (1.6)$$

называется методической погрешностью (остаточным членом) квадратурной формулы (1.3).

При этом $R_n(f)$ зависит от свойств функции f и от выбора квадратурной формулы, т. е. от узлов и коэффициентов.

Определение 1.3. Квадратурная формула (1.3) имеет алгебраическую степень точности m , если она верна для любых многочленов степени m и не верна для многочленов степени $m + 1$.

Это равносильно тому, что равенство

$$\int_a^b p(x)x^i dx = \sum_{k=1}^n A_k x_k^i, \quad (1.7)$$

выполняется для $i = 0, 1, \dots, m$ и не выполняется для $i = m + 1$. Или, что то же самое,

$$R_n(x^i) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m; \quad R_n(x^{m+1}) \neq 0. \quad (1.8)$$

§2. Квадратурная формула Симпсона

Трёхточечная квадратурная формула – формула Симпсона – имеет вид :

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{(b-a)}{6} \left[f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]. \quad (2.1)$$

Она является точной для всех многочленов третьей степени, т.е. ее алгебраическая степень точности равна трем.

В классе $C_{(a,b)}^4$ остаточный член квадратурной формулы (2.1)

$$\begin{aligned} R_3(f) &= \int_a^b \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!} (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b) dx = \\ &= -\frac{1}{90} \left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\eta), \quad \eta \in [a, b]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Составные квадратурные формулы. Основная идея метода заключается в том, что для повышения точности интегрирования отрезок $[a, b]$ делят на несколько частей. Применяют избранную квадратурную формулу к каждой отдельной части и результаты складывают.

Для большинства квадратурных формул методическая погрешность $R_n(f)$ зависит от величины отрезка интегрирования и может быть представлена в виде:

$$R_n(f) = (b - a)^k C(a, b), \quad (2.3)$$

где $C(a, b)$ есть медленно меняющаяся функция от a , b и k . Эта зависимость показывает, что если уменьшить отрезок интегрирования в p раз, то $R_n(f)$ уменьшится в p^k раз. Чем больше k , тем значительнее будет уменьшение.

Разобьём исходный интервал интегрирования на частичные отрезки:

$$[a, b] : a = z_0 < z_1 < z_2 < \dots < z_k = b.$$

В самом общем случае $z_{i+1} - z_i = h_i > 0$ и h_i предполагаются различными.

Теперь применим на каждом из частичных отрезков $[z_i, z_{i+1}]$ квадратурное правило (в общем случае своё) для вычисления интеграла:

$$\begin{aligned} J^{(i)}(f) &= \int_{z_i}^{z_{i+1}} p(x)f(x) dx = \sum_{j=1}^{n_i} A_{ij}f(x_{ij}) + R_{n_i}(f) = \\ &= S_{n_i}^i(f) + R_{n_i}(f), \quad i = \overline{0, k-1}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Просуммируем по i левые и правые части (2.4):

$$\begin{aligned} J(f) &= \int_a^b p(x)f(x) dx = \sum_{i=0}^{k-1} J^{(i)} = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{z_i}^{z_{i+1}} p(x)f(x) dx \approx \\ &\approx \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=1}^{n_i} A_{ij}f(x_{ij}) = \sum_{i=0}^{k-1} S_{n_i}^i(f) = S_N(f), \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$N = \sum_{i=0}^{k-1} n_i; \quad R_N = J(f) - S_N(f) = \sum_{i=0}^{k-1} R_{n_i}(f),$$

$$R_{n_i}(f) = J^i(f) - S_{n_i}^i(f).$$

В качестве квадратурных формул (2.4) могут быть использованы квадратурные формулы всех существующих типов. Причём как в

смешанном составе – в составной квадратурной формуле используется несколько типов, так и в однородном – в составной квадратурной формуле используются только квадратурные формулы одного типа. То же самое можно сказать и о числе узлов квадратурной формулы используемой на каждом из частичных отрезков - их число может зависеть от номера отрезка. Такой подход увеличения точности применим к простейшим формулам Ньютона-Котеса (здесь – Симпсона).

Составная квадратурная формула Симпсона. Разобьём интервал интегрирования $[a, b]$ на $k = 2m$ частичных отрезков, $z_i = a + iH, i = \overline{0, k}$ $H = \frac{b-a}{k}$ и будем применять квадратурное правило на сдвоенном частичном отрезке $[a + (2j - 2)H, a + (2j)H]$ $j = \overline{1, m}$. В качестве квадратурного правила используемого на каждом из сдвоенных частичных отрезков будет использоваться квадратурное правило Симпсона (2.1):

$$J^{(j)}(f) = \int_{z_{2j-2}}^{z_{2j}} f(x) dx \approx \frac{z_{2j} - z_{2j-2}}{6} [f(z_{2j-2}) + 4f(z_{2j-1}) + f(z_{2j})] = \frac{H}{3} [f(z_{2j-2}) + 4f(z_{2j-1}) + f(z_{2j})], \quad j = \overline{1, m}. \quad (2.6)$$

Просуммировав по всем сдвоенным частичным отрезкам $[a, a + 2H], [a + 2H, a + 4H], \dots$ выпишем составную квадратурную формулу парабол

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{3k} [f(z_0) + f(z_k) + 2(f(z_2) + f(z_4) + \dots + f(z_{k-2})) + 4(f(z_1) + f(z_3) + \dots + f(z_{k-1}))] + R_k(f). \quad (2.7)$$

Воспользуемся результатами оценки методической погрешности для квадратурной формулы парабол (2.2):

$$R_{k+1}(f) = -\frac{H^4}{180} \int_a^b f^{(4)}(x) dx + o(H^4) = \quad (2.8)$$

$$= C_4 H^4 + o(H^4); \quad \frac{o(H^4)}{H^4} \rightarrow 0, \quad H \rightarrow 0,$$

где $C_4 \equiv C_4(f) \equiv -\frac{1}{180} \int_a^b f^{(4)}(x) dx$.

Практические способы оценки погрешности составных квадратурных формул. Оказывается, что подобно представлению (2.3) для погрешности составной квадратурной формулы (2.5) для широкого класса функций $f(\cdot)$ можно написать:

$$R_k(f) = C_m H^m + o(H^m). \quad (2.9)$$

где m – натуральное число, $C_m = C_m(f)$ – некоторая константа, зависящая лишь от $f(\cdot)$ и типа формулы, но не зависящая от H , $\frac{o(H^4)}{H^4} \rightarrow 0$, $H \rightarrow 0$. Формула (2.9) даёт асимптотическое представление (разложение) погрешности (2.5) по параметру H – шагу равномерного разбиения интервала интегрирования. Она справедлива, в частности, когда **малые** квадратурные формулы (2.1) (Симпсона, например,) имеют алгебраическую степень точности $m - 1$, а функция $f(\cdot)$ – непрерывную (интегрируемую) на $[a, b]$ производную $f^m(\cdot)$.

Практическая оценка константы C_m проводится следующим образом. Фиксируем два значения шага разбиения – $H_1 = H$ и $H_2 = H/L$, $L > 1$, и проводим расчёты на двух равномерных сетках с шагом H_1 и H_2 соответственно по исследуемой квадратурной формуле. Предполагаем, что для её методической погрешности верно асимптотическое разложение (2.9), т.е.

$$R_k^{(H_1)}(f) = J(f) - S_k^{(H_1)} = C_m H^m + o(H^m) \quad (2.10)$$

и

$$R_k^{(H_2)}(f) = J(f) - S_k^{(H_2)} = C_m \left(\frac{H}{L}\right)^m + o\left(\frac{H}{L}\right)^m. \quad (2.11)$$

Исключая из (2.10), (2.11) неизвестное значение интеграла J , найдём

$$S_k^{(H_2)} - S_k^{(H_1)} = C_m \left(H^m - \left(\frac{H}{L}\right)^m \right) + o(H^m) \quad (2.12)$$

а отсюда

$$C_m = \frac{S_k^{(H_2)} - S_k^{(H_1)}}{H^m(1 - L^{-m})} + \frac{o(H^m)}{H^m}. \quad (2.13)$$

Подставляя это выражение для C_m в равенства (2.10), (2.11) и отбрасывая бесконечно малые $o(H^m)$, найдём приближённые представления погрешностей $R_k^{(H_1)}$, $R_k^{(H_2)}$ составной квадратурной формулы на двух равномерных сетках :

$$R_k^{(H_1)}(f) = J(f) - S_k^{(H_1)} \approx \frac{S_k^{(H_2)} - S_k^{(H_1)}}{1 - L^{-m}} \quad (2.14)$$

$$R_k^{(H_2)}(f) = J(f) - S_k^{(H_2)} \approx \frac{S_k^{(H_2)} - S_k^{(H_1)}}{L^m - 1}. \quad (2.15)$$

Этот способ оценивания методической погрешности называется **правилом Рунге**. Так при $L = 2$, т.е. шаг дробления уменьшается в два раза, погрешность составной квадратурной формулы $R_k^{(H_2)}(f)$ с шагом H_2 меньше погрешности $R_k^{(H_1)}(f)$ составной квадратурной формулы с шагом H_1 почти в 2^m раз.

Используя правило Рунге можно решить вопрос о нахождении оптимального шага разбиения H_o интервала интегрирования, обеспечивающего (в первом приближении) вычисление интеграла с заданной точностью ε .

$$\varepsilon = |R_k^{(H_o)}(f)| \approx |C_m H_o^m| = \frac{|S_k^{(H_2)} - S_k^{(H_1)}|}{H^m(1 - L^{-m})} H_o^m, \quad (2.16)$$

а отсюда и получаем порядок оптимального шага разбиения

$$H_o \approx H \left(\frac{\varepsilon(1 - L^{-m})}{|S_k^{(H_2)} - S_k^{(H_1)}|} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (2.17)$$

ГЛАВА 3. МЕТОД НЬЮТОНА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

§1. Основы метода

Рассмотрим вопрос о решении скалярного уравнения

$$f(x) = 0, \quad x \in [\alpha, \beta] \quad (1.1)$$

с использованием метода Ньютона в предположении, что решение \bar{x} уравнения существует и $\bar{x} \in [\alpha, \beta]$. При условии, что функция $f(\cdot)$ дифференцируема на рассматриваемом интервале и при наличии хорошего приближения x_k к корню \bar{x} функции можно использовать метод Ньютона, называемый также методом *линейризации* или методом *касательных*. Его расчётные формулы могут быть получены заменой исходного уравнения (1.1) в окрестности корня линейным уравнением (здесь x_k – приближение корня \bar{x})

$$f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) = 0. \quad (1.2)$$

Решение этого уравнения принимается за очередное приближение x_{k+1} к искомому корню \bar{x} исходного уравнения (1.1):

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \quad (1.3)$$

Метод Ньютона имеет простую геометрическую интерпретацию: график функции заменяется касательной к нему в точке $(x_k, f(x_k))$ и за очередное приближение x_{k+1} принимается абсцисса точки пересечения этой касательной с осью Ox . Используя эту интерпретацию, легко получить расчётные формулы (1.3) метода Ньютона и вследствие этой интерпретации он именуется, как указано выше, методом касательных.

Ясно, что сходимость последовательности $\{x_k\}$ к корню зависит от свойств функции $f(\cdot)$ и не всегда имеет место. Пусть выбрано начальное приближение x_0 . Легко представить, что уже приближение x_1 не попадает на исходный интервал определения функции и процесс итераций останавливается.

Приведём полезную теорему, гарантирующую сходимость метода Ньютона.

Теорема 1.1. Если для функции $f(\cdot) \in C^2[\alpha, \beta]$ выполнены условия

- $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$,
- $f'(x) \neq 0$ и $f''(x) \neq 0$ на $[\alpha, \beta]$ (и, следовательно, сохраняют определённые знаки при $x \in [\alpha, \beta]$),

то исходя из начального приближения $x_0 \in [\alpha, \beta]$, для которого $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$, по формуле (1.3) можно вычислить единственный корень \bar{x} уравнения (1.1) с любой степенью точности. ♣

Замечание. Практическим критерием окончания вычислений является выполнение условия $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$, где ε – требуемая точность вычисления корня. ♣

Если же условия теоремы 1.1 не выполняются или проверка их затруднительна, то очередное “приближение” x_{k+1} может оказаться вне интервала, на котором расположен корень \bar{x} . В этом случае x_{k+1} строится либо методом половинного деления либо методом хорд. В первом случае полагают

$$x_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2}, \quad (1.4)$$

во втором –

$$x_{k+1} = a_k - \frac{b_k - a_k}{f(b_k) - f(a_k)} \cdot f(a_k). \quad (1.5)$$

Здесь a_k, b_k – левый и правый конец интервала, которому принадлежит корень \bar{x} на предыдущем шаге.

На начальном этапе полагаем $a_0 = \alpha$, $b_0 = \beta$. Пусть для определённости $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Если $x_1 \in [\alpha, \beta]$, то вычислив $c = f(x_1)$, полагаем $a_1 = c$, $b_1 = b_0$ при $c < 0$, и $a_1 = a_0$, $b_1 = c$ при $c > 0$ и повторяем вычисления.

Если же приближение $x_1 \notin [\alpha, \beta]$, то применяем формулы (1.4) либо (1.5) и поступаем как и выше: вычисляя $c = f(x_1)$, полагаем $a_1 = c$, $b_1 = b_0$ при $c < 0$, и $a_1 = a_0$, $b_1 = c$ при $c > 0$ и применяем метод Ньютона.

Комментарии к выполнению задания

Формула (1.3) для функции, заданной уравнением (1), запишется в виде

$$x_{k+1} = x_k - \frac{y(x_k)}{y'(x_k)} = x_k - \frac{y(x_k)}{\varphi(x_k) - ay(x_k)}. \quad (1.6)$$

Следовательно, для её использования достаточно проинтегрировать уравнение (1) на отрезке $[0, x_k]$, либо вычислить интеграл (2) в пределах от 0 до x_k . Можно также использовать аналитическое представление для решения уравнения (1), которое имеет вид

$$y(x) = \frac{a \cdot \sin kx - k \cdot \cos kx + ke^{-ax}}{a^2 + k^2}. \quad (1.7)$$

Начальное приближение для использования формулы (1.6) может быть найдено, например, графическим методом, т.к. к моменту решения этой задачи уравнение (1) уже проинтегрировано. ♣

ГЛАВА 4. ЗАДАЧА АППРОКСИМАЦИИ

Для решения поставленной в пункте 4 задачи используется *метод наименьших квадратов*. Он состоит в следующем.

§1. Линейная задача метода наименьших квадратов

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана некоторая функция $f(\cdot)$, причём её значения $\{y_i = f(x_i)\}$ в узлах сетки $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ известны с погрешностями $\{\varepsilon_i\}$, то есть вместо набора значений $\{y_i\}$ имеем набор $\{\tilde{y}_i = y_i + \varepsilon_i\}$. (Далее под $\{y_i\}$ будем понимать заданные значения функции, т.е. с погрешностями, вводя обозначение \tilde{y}_i лишь в случае необходимости). Пусть, кроме того, на $[a, b]$ определены функции $\varphi_j(\cdot) \in \Phi$, $j = \overline{0, m}$.

Введём в рассмотрение обобщённый полином

$$P_m(x) = \sum_{j=0}^m a_j \varphi_j(x).$$

Пусть a – вектор коэффициентов полинома $P_m(\cdot)$, y – вектор значений функции $f(\cdot)$ и, наконец, $\varphi(\cdot)$ – вектор-функция, составленная из значений $\{\varphi_i(x)\}$:

$$\begin{aligned} a &= (a_0, a_1, \dots, a_m)^T, \\ y &= (y_0, y_1, \dots, y_n)^T, \\ \varphi(x) &= (\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))^T, \end{aligned}$$

Введём также функции

$$\sigma(a, y) = \sum_{i=0}^n (P_m(x_i) - y_i)^2, \quad \delta(a, y) = \sqrt{\frac{\sigma(a, y)}{n+1}}.$$

Функцию $\delta(a, y)$ назовём *среднеквадратичным уклонением* обобщённого полинома $P_m(\cdot)$ от функции $f(\cdot)$ на системе узлов $\{x_i\}$. Отказываясь теперь от условия $P_m(x_i) = y_i$, $i = \overline{0, n}$, поставим задачу так: *найти обобщённый полином $\bar{P}_m(\cdot) = \bar{a}^T \varphi(\cdot)$, для которого среднеквадратичное уклонение минимально:*

$$\delta(\bar{a}, y) = \min_a \delta(a, y).$$

Поставленную здесь задачу называют *линейной задачей метода наименьших квадратов* или просто методом наименьших квадратов (МНК). Если искомый полином существует, то будем называть его *многочленом наилучшего среднеквадратичного приближения*.

Отметим, что минимум функций $\sigma(\cdot)$ и $\delta(\cdot)$ достигается *на одном и том же векторе \bar{a}* , поэтому фактически будем вести минимизацию функции $\sigma(a, y)$, а не $\delta(\cdot)$.

Простейший подход к решению задачи – использование необходимых условий в задаче поиска экстремума для дифференцируемой функции:

$$\frac{\partial \sigma(a, y)}{\partial a_k} \Big|_{a=\bar{a}} = 0, \quad k = \overline{0, m}. \quad (1.1)$$

В дополнение к уже введённым ранее обозначениям примем также следующее:

$$Q = \begin{pmatrix} \varphi_0(x_0), & \varphi_1(x_0), & \dots & \varphi_m(x_0), \\ \varphi_0(x_1), & \varphi_1(x_1), & \dots & \varphi_m(x_1), \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0(x_n), & \varphi_1(x_n), & \dots & \varphi_m(x_n) \end{pmatrix}.$$

Кроме того будем считать, что под скалярным произведением двух векторов $u, v \in \mathbb{R}^k$ понимается число

$$(u, v) = u^T v = u \cdot v = \sum_{i=1}^k u_i v_i,$$

а под нормой векторов – евклидова норма $\|y\|^2 = (y, y)$. Тогда в новых обозначениях

$$\begin{aligned} \sigma(a, y) &= \|Qa - y\|^2 = (Qa - y, Qa - y) = \\ &= (Qa, Qa) - 2(Qa, y) + (y, y) = \\ &= (a, Q^T Q a) - 2(a, Q^T y) + \|y\|^2. \end{aligned}$$

Для определения параметров искомого полинома в соответствии с формулой (1.1) имеем СЛАУ:

$$Ha = b, \quad \text{где } H = Q^T Q, \quad b = Q^T y. \quad (1.2)$$

В предложенной в пункте 4 задаче её параметры соотносятся с использованными выше параметрами следующим образом:

$$a = (a_0, a_1, \dots, a_5)^T, \quad y = z = (z_0, z_1, \dots, z_{10})^T, \quad \varphi(x) = (1, x, \dots, x^5)^T,$$

$$\sigma(a, y) = \sigma(a, z) = \sum_{i=0}^{10} (Q_5(x_i) - z_i)^2, \quad \delta(a, z) = \sqrt{\frac{\sigma(a, z)}{5}},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1, & x_0, & \dots & x_0^5, \\ 1, & x_1, & \dots & x_1^5, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1, & x_5, & \dots & x_5^5 \end{pmatrix}.$$

Остаётся для определения параметров полинома $\bar{Q}_5(x)$ решить систему линейных алгебраических уравнений (1.2). В предложенном варианте матрица H системы (1.2) неособая и задача имеет единственное решение.

Выполняя вторую часть задания из п.4, Вы должны получить так называемый интерполяционный полином $\tilde{Q}_5(x)$, обладающим свойством: $\tilde{Q}_5(i) = y(i)$, $i = \overline{0, 5}$. (Построив полином – убедиться!)

§2. Методы Гаусса

Метод Гаусса относится к *точным методам решения систем линейных алгебраических уравнений* (СЛАУ). Под точными методами решения СЛАУ понимают методы, которые позволяют за конечное число арифметических операций при отсутствии округлений получить точное решение СЛАУ при точно заданной правой части СЛАУ и и точно заданных элементах её матрицы. Перечислим здесь некоторые из них с указанием алгоритмов их использования.

Методы Гаусса (или методы исключения неизвестных) оптимальны для решения СЛАУ общего вида по количеству арифметических операций, необходимых для нахождения решения этой системы. Пусть СЛАУ записана в виде

$$Ax = b. \tag{2.1}$$

Простой метод Гаусса состоит в следующем: в СЛАУ (2.1), записанной в координатной форме, производится деление первого уравнения системы на коэффициент при первом неизвестном, после че-

го это преобразованное уравнение, будучи умноженным последовательно на все коэффициенты при первом неизвестном из всех нижележащих уравнениях системы, вычитается из соответствующих уравнений. Тем самым первое неизвестное оказывается “исключенным” из всех уравнений системы, кроме первого. Оставив на время в покое первое уравнение, таким же образом исключаем из системы уравнений с номерами 2– n второе неизвестное и так далее. Результатом проделанной работы явится уравнение, содержащее лишь последнее неизвестное системы (2.1), из которого оно и находится. Этот этап преобразований СЛАУ носит название прямого хода метода Гаусса. Вслед за найденным неизвестным находятся поочередно и остальные. Этот этап называется обратным ходом метода Гаусса.

Отметим очевидный недостаток простого метода Гаусса – возможное обращение в нуль *ведущих* элементов, т.е. тех элементов, на которые приходится делить в прямом ходе метода Гаусса. Легко указать и способ избавления от этого недостатка простого метода Гаусса – перестановка уравнений системы, которая, очевидно, не меняет решения СЛАУ. Ввиду того, что решается СЛАУ с неособой матрицей, при исключении первого неизвестного в первом столбце матрицы A найдётся ненулевой элемент и строка, содержащая этот элемент, переставляется на место первого уравнения. С целью минимизации погрешности округления обычно выбирают не просто ненулевой элемент в столбце, а элемент, максимальный по модулю и этот процесс повторяется на каждом этапе прямого хода метода Гаусса. Данная модификация называется методом Гаусса с выбором максимального элемента по столбцу. Можно обобщить этот подход и выбирать максимальный элемент по всей матрице, что приводит к необходимости переобозначения неизвестных и потому используется значительно реже.

Отметим здесь, что если матрица A системы (2.1) обладает свойством диагонального преобладания (т.е. для всех строк матрицы $A = \{a_{ij}\}$ выполняются неравенства $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$), то обращение в нуль ведущих элементов в методе Гаусса не происходит.

В подробной записи метод Гаусса выглядит так: имеется

ОГЛАВЛЕНИЕ

Курсовая работа по численным методам	2
Глава 1. Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений	3
§ 1. Постановка задачи.....	3
§ 2. Одношаговые методы.....	3
Глава 2. Вычисление определенного интеграла	10
§ 1. Квадратурные формулы.....	10
§ 2. Квадратурная формула Симпсона.....	12
Глава 3. Метод Ньютона решения уравнений	17
§ 1. Основы метода.....	17
Глава 4. Задача аппроксимации	20
§ 1. Линейная задача метода наименьших квадратов.....	20
§ 2. Методы Гаусса.....	22