ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2008, том 419, № 4, с. 471–474

МАТЕМАТИКА

УДК 514.177.2

# НАХОЖДЕНИЕ РАССТОЯНИЯ ОТ ЭЛЛИПСОИДА ДО ПЛОСКОСТИ И КВАДРИКИ В $\mathbb{R}^n$

© 2008 г. А. Ю. Утешев, М. В. Яшина

Представлено академиком Н.Ф. Морозовым 25.10.2006 г.

Поступило 27.11.2007 г.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Найти расстояние $d$ от эллипсоида

$$X^T\mathbf{A}_1X + 2B_1^TX - 1 = 0 \tag{1}$$

а) до $(n-k)$-мерной плоскости, заданной системой уравнений

$$C_1^TX = 0,\ C_2^TX = 0,\ \ldots,\ C_k^TX = 0, \tag{2}$$

б) до квадрики

$$X^T\mathbf{A}_2X + 2B_2^TTX - 1 = 0. \tag{3}$$

Здесь $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ – столбец переменных, $\{B_1, B_2, C_1, \ldots, C_k\} \subset \mathbb{R}^n$ – заданные столбцы, причем $C_1, C_2, \ldots, C_k$ $(k \le n)$ предполагаются линейно-независимыми, $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ – вещественные симметричные матрицы, причем матрица $\mathbf{A}_1$ знакоопределенная.

Подобные задачи возникают в вычислительной геометрии [4], например в задаче распознавания образов, когда требуется оценить близость между объектами, заданными в $n$-мерном параметрическом пространстве. Будучи задачами поиска условного экстремума

$$\min\sqrt{(X-Y)^T(X-Y)}$$

$$\text{при } \begin{cases} X \in (1),\ Y \in (2) \text{ в случае а)}, \\ X \in (1),\ Y \in (3) \text{ в случае б)}, \end{cases}$$

они традиционным методом множителей Лагранжа сводятся к задаче решения системы алгебраических уравнений. Так, например, в случае б) имеем

$$\begin{gathered} z - (X-Y)^T(X-Y) = 0, \\ X - Y - \lambda_1(\mathbf{A}_1X + B_1) = \mathbb{O}, \\ -X + Y - \lambda_2(\mathbf{A}_2Y + B_2) = \mathbb{O}, \\ X^T\mathbf{A}_1X + 2B_1^TX = 1, \quad Y^T\mathbf{A}_2T + 2B_2^TY = 1. \end{gathered} \tag{4}$$

Целью настоящего сообщения мы ставим алгебраическое исключение из этой системы всех переменных, кроме $z$, т.е. нахождение алгебраического уравнения $\mathcal{F}(z) = 0$, среди корней которого находится квадрат искомого расстояния. Если величина квадрата расстояния установлена, то через него – как правило, рационально – можно выразить координаты соответствующих ближайших точек поверхностей [5].

## 2. ТЕОРИЯ ИСКЛЮЧЕНИЯ

Фактическую реализацию заявленной процедуры возможно осуществить либо посредством построения базиса Грёбнера, либо же методами классической теории исключения [1, 6]. В последней наиболее существенным объектом для нашей задачи является дискриминант. Формально для полинома $g(X)$ (одной или нескольких переменных) дискриминант с точностью до множителя определяется как

$$\mathcal{D}_X(g) \overset{\text{def}}{=} \prod_{j=1}^{N} g(\Lambda_j),$$

где $\{\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_N\}$ – набор решений системы уравнений $\nabla g = \mathbb{O}$. Дискриминант может быть выражен в виде рациональной функции коэффициентов полинома $g(X)$ с помощью различных детерминантных представлений. Например, по методу Безу

$$\mathcal{D}_X(g) = \det[b_{lj}]_{l,j=0}^{N-1}. \tag{5}$$

Здесь $b_{lj}$ для случая полинома $g(X)$ одной переменной представляют собой коэффициенты остатка от деления полинома $X^lg(X)$ на $g'(X)$:

$$\begin{gathered} X^lg(X) \equiv q_l(X)g'(X) + b_{l0} + b_{l1}X + \ldots \\ \ldots + b_{l,N-1}X^{N-1} \text{ при } l \in \{0, 1, \ldots, N-1\}. \end{gathered}$$

Для случая же полинома $g(X)$ нескольких переменных $b_{lj}$ – коэффициенты редукции полинома

*Санкт-Петербургский государственный университет*

$\mathcal{M}_l(X)g(X)$ по модулю идеала, порожденного полиномами $\frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial x_n}$:

$$\mathcal{M}_l(X)g(X) \equiv b_{l0}\mathcal{M}_0(X) + b_{l1}\mathcal{M}_1(X) + \ldots$$
$$\ldots + b_{l,N-1}\mathcal{M}_{N-1}(X) \left(\mathrm{mod}\left\langle\frac{\partial g}{\partial x_1}\right\rangle, \left\langle\frac{\partial g}{\partial x_2}\right\rangle, \ldots, \left\langle\frac{\partial g}{\partial x_n}\right\rangle\right).$$

Здесь $\{\mathcal{M}_l(X)\}_{l=0}^{N-1}$ – множество определенным образом подобранных мономов по $X$. Для частного случая полинома двух переменных, стоящего под знаком дискриминанта в теореме 3, будем иметь: $N = (n+1)^2$, а

$$\{\mathcal{M}_l(X)\}_{l=0}^{N-1} =$$
$$= \{x_1^{j_1}x_2^{j_2} \mid 0 \le j_1 < n+1,\ 0 \le j_2 \le 2(n-j_1)\}. \quad (6)$$

Если $\mathcal{D}_X(g) = 0$, то полином $g(X)$ имеет кратный нуль, который в случае его единственности может быть рационально выражен через коэффициенты полинома. Такое выражение может быть конструктивно получено с помощью миноров определителя (5). Для случая полинома двух переменных из теоремы 3 пронумеруем мономы множества (6) так, чтобы было $\mathcal{M}_0 = 1$, $\mathcal{M}_1 = x_1$, $\mathcal{M}_2 = x_2$, и обозначим через $\mathfrak{B}_{Nj}$ алгебраические дополнения элементов последней строки соответствующего определителя (5). Компоненты кратного нуля тогда найдутся по формулам

$$x_1 = \mathfrak{B}_{N2}/\mathfrak{B}_{N1}, \quad x_2 = \mathfrak{B}_{N3}/\mathfrak{B}_{N1}. \quad (7)$$

## 3. РАССТОЯНИЕ ДО ПЛОСКОСТИ

Теорема 1. *Составим матрицы* $\mathbf{C} \overset{\text{def}}{=} [C_1, C_2, \ldots, C_k]$ *и* $\mathfrak{G} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{C}^T\mathbf{C}$ (*т.е.* $\mathfrak{G}$ – *матрица Грама столбцов* $C_1, C_2, \ldots, C_k$). *Условие*

$$0 \le \begin{vmatrix} \mathbf{A}_1 & B_1 & \mathbf{C} \\ B_1^T & -1 & \mathbb{O} \\ \mathbf{C}^T & \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{vmatrix} \times \begin{cases} (-1)^{k-1}, \text{ если } \mathbf{A}_1 \\ \text{положительно определена}, \\ (-1)^n, \text{ если } \mathbf{A}_1 \\ \text{отрицательно определена}, \end{cases}$$

*необходимо и достаточно для того, чтобы плоскость* (2) *пересекала эллипсоид* (1); *в этом случае* $d = 0$. *Если условие пересечения не выполняется, то величина* $d^2$ *совпадает с минимальным положительным корнем уравнения*

$$\mathcal{F}(z) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{D}_\mu\left(\mu^k \begin{vmatrix} \mathbf{A}_1 & B_1 & \mathbf{C} \\ B_1^T & -1+\mu z & \mathbb{O} \\ \mathbf{C}^T & \mathbb{O} & \frac{1}{\mu}\mathfrak{G} \end{vmatrix}\right) = 0 \quad (8)$$

*в предположении, что этот корень не является кратным.*

Следствие 1. *Если столбцы* $C_1, C_2, \ldots, C_k$ *ортонормированны, то преобразованием определителя в* (8) *можно понизить его порядок: выражение под знаком дискриминанта можно преобразовать в следующее*:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A}_1 - \mu\mathbf{C}\mathbf{C}^T & B_1 \\ B_1^T & -1+\mu z \end{vmatrix}.$$

Следствие 2. *Квадрат расстояния от начала координат* $X = \mathbb{O}$ *до эллипсоида* (1) *совпадает с минимальным положительным корнем уравнения*

$$\mathcal{F}(z) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{D}_\mu(f(\mu)(\mu z - 1) - B_1^T q(\mathbf{A}_1, \mu)B_1) = 0 \quad (9)$$

*в предположении, что этот корень не является кратным. Здесь* $f(\mu) \overset{\text{def}}{=} \det(\mathbf{A}_1 - \mu\mathbf{E})$ – *характеристический полином матрицы* $\mathbf{A}_1$, *а* $q(\mathbf{A}_1, \mu)$ – *матрица, взаимная к матрице* $\mathbf{A}_1 - \mu\mathbf{E}$. *В случае больших n для одновременного вычисления* $f(\mu)$ *и* $q(\mathbf{A}_1, \mu)$ *удобно применять метод Леверье–Фаддеева* [2].

Воспользуемся последним результатом для пояснения существенности условия простоты минимального положительного корня полинома $\mathcal{F}(z)$; это условие будет проявляться и в последующих результатах.

Пример 1. Найти расстояние от начала координат до эллипса

$$\frac{5}{4}x_1^2 + \frac{5}{4}x_2^2 - \frac{3}{2}x_1x_2 - \alpha x_1 - \alpha x_2 + \alpha^2 - 1 = 0.$$

Здесь $\alpha > 0$ – параметр.

Заметим, что данный эллипс получается из центрального сдвигом вдоль его главной оси на вектор $[\alpha, \alpha]^T$. Будем исследовать зависимость расстояния от параметра $\alpha$.

Полином (9)

$$\mathcal{F}(z) = \frac{1}{16}\frac{(z - 2\alpha^2 + 4\alpha - 2)(z - 2\alpha^2 - 4\alpha - 2)(6z + 4\alpha^2 - 3)^2}{(\alpha-1)^6(\alpha+1)^6}$$

имеет корни

$$z_1 = 2\alpha^2 + 4\alpha + 2, \quad z_2 = 2\alpha^2 - 4\alpha + 2,$$
$$z_3 = -\frac{2}{3}\alpha^2 + \frac{1}{2},$$

и при любом значении параметра $\alpha$ искомая величина $d^2$ всегда находится среди этих величин.

Далее $z_3 = \min\{z_1, z_2, z_3\}$ при $\alpha \in \left]0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$. Тем не менее при $\alpha \in \left]\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ квадрат расстояния вычисляется по формуле $d^2 = z_2$.

Объяснение этому феномену следующее. Кратному корню $z_3$ будут соответствовать две точки $[x_1, x_2]^T$. При $\alpha \le \frac{3}{4}$ обе эти точки эллипса вещественны, но при $\alpha > \frac{3}{4}$ они становятся мнимыми (комплексно-сопряженными).

## 4. РАССТОЯНИЕ ДО КВАДРИКИ

Рассмотрим сначала случай центральных квадрик: $B_1 = \mathbb{O}$, $B_2 = \mathbb{O}$.

Т е о р е м а 2. *Квадрики* $X^T\mathbf{A}_1X = 1$ *и* $X^T\mathbf{A}_2X = 1$ *пересекаются тогда и только тогда, когда матрица* $\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2$ *не является знакоопределенной. Если это условие не выполняется, то величина* $d^2$ *совпадает с минимальным положительным корнем уравнения*

$$\mathcal{F}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}_\lambda(\det(\lambda\mathbf{A}_1 + (z-\lambda)\mathbf{A}_2 - \lambda(z-\lambda)\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)) = 0 \qquad (10)$$

*в предположении, что этот корень не является кратным.*

Т е о р е м а 3. *Квадрики* (1) *и* (3) *пересекаются тогда и только тогда, когда среди вещественных корней уравнения*

$$\Phi(z) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}_\lambda\left(\det\left(\begin{bmatrix}\mathbf{A}_2 & B_2\\ B_2^T & -1-z\end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1 & B_1\\ B_1^T & -1\end{bmatrix}\right)\right) = 0$$

*имеются числа разных знаков или нуль. Если это условие не выполняется, то величина* $d^2$ *совпадает с минимальным положительным корнем уравнения*

$$\mathcal{F}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}_{\mu_1,\mu_2}\left(\det\left(\mu_1\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1 & B_1\\ B_1^T & -1\end{bmatrix} + \mu_2\begin{bmatrix}\mathbf{A}_2 & B_2\\ B_2^T & -1\end{bmatrix} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \begin{bmatrix}\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2B_1\\ B_2^T\mathbf{A}_1 & B_2^TB_1 - \mu_1\mu_2 z\end{bmatrix}\right)\right) = 0 \qquad (11)$$

*в предположении, что этот корень не является кратным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие пересечения квадрик (1) и (3) вытекает из следующих соображений. Экстремумы функции $X^T\mathbf{A}_2X + 2B_2^TX - 1$ на эллипсоиде (1) будут одного знака тогда и только тогда, когда квадрики (1) и (3) не пересекаются. Формулируем задачу об условном экстремуме функции $X^T\mathbf{A}_2X + 2B_2^TX - 1 - z$ на эллипсоиде (1), применяем метод множителей Лагранжа и исключаем из получающейся системы алгебраических уравнений все переменные, кроме $z$.

Для доказательства второй части теоремы обозначим

$$\mathbf{M} = \mathbf{E} - \frac{1}{\lambda_1}\mathbf{A}_1^{-1} - \frac{1}{\lambda_2}\mathbf{A}_2^{-1},$$
$$Q \stackrel{\text{def}}{=} -\mathbf{A}_1^{-1}B_1 + \mathbf{A}_2^{-1}B_2$$

и преобразуем уравнения системы (4):

$$X = -\mathbf{A}_1^{-1}B_1 + \frac{1}{\lambda_1}\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{M}^{-1}Q,$$
$$Y = -\mathbf{A}_2^{-1}B_2 - \frac{1}{\lambda_2}\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{M}^{-1}Q, \qquad (12)$$

$$-B_j^T\mathbf{A}_j^{-1}B_j + \frac{1}{\lambda_j^2}Q^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}_j^{-1}\mathbf{M}^{-1}Q - 1 = 0 \quad \text{при } j \in \{1, 2\}, \qquad (13)$$

$$z - Q^T\mathbf{M}^{-2}Q = 0. \qquad (14)$$

Домножив уравнения (13) на $\lambda_j$ и комбинируя с (14), получим представление

$$-\lambda_1B_1^T\mathbf{A}_1^{-1}B_1 - \lambda_2B_2^T\mathbf{A}_2^{-1}B_2 - Q^T\mathbf{M}^{-1}Q - \lambda_1 - \lambda_2 + z = 0. \qquad (15)$$

Можно проверить, что производная левой части (15) по $\lambda_j$ совпадает с левой частью (13). Замена переменных $\mu_1 = \frac{1}{\lambda_2}$, $\mu_2 = \frac{1}{\lambda_1}$ и использование формулы Шура [3] вычисления определителя блочной матрицы позволяет привести (15) к виду (11).

Пример 2. Найти расстояние между эллипсоидами

$$7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 - 37x_1 - \\ - 12x_2 + 3x_3 + 54 = 0$$

и

$$189x_1^2 + x_2^2 + 189x_3^2 + 2x_1x_3 - x_2x_3 - 27 = 0$$

и координаты их ближайших точек.

Условие пересечения из теоремы 3 не выполнено: полином $\Phi(z)$ шестой степени имеет все свои вещественные корни положительными. Представив дискриминант (11) в виде определителя (5) порядка $N = 16$, вычислим его. Полином $\mathcal{F}(z)$ с целочисленными коэффициентами порядков до $10^{188}$ обладает восемью положительными корнями $z_1 \approx \approx 1.35377$, …, $z_8 \approx 111.74803$. Итак, расстояние между эллипсоидами $\sqrt{z_1} \approx 1.16351$.

Для полученного значения $z_1$ полином по $\mu_1$ и $\mu_2$ из (11) имеет кратный нуль, который может быть рационально выражен через $z_1$ с помощью миноров определителя (5) по формулам (7). Полученные величины $\lambda_1 \approx 5.75593$ и $\lambda_2 \approx -0.45858$ подставляем в (12) и определяем координаты ближайших точек эллипсоидов:

$$X \approx [1.52039,\ 1.50986,\ 0.12623]^T,$$

$$Y \approx [0.36100,\ 0.48490,\ 0.03152]^T.$$

Замечание. Как правило, имеют место следующие оценки степени полинома $\mathcal{F}(z)$:

| Формула | (8) | (9) | (10) | (11) |
|---|---|---|---|---|
| $\deg \mathcal{F}(z)$ | $2k$ | $2n$ | $n(n+1)$ | $2n(n+1)$ |

В третьем и четвертом столбцах оценки приведены с учетом исключения из $\mathcal{F}(z)$ постороннего множителя (в случае четвертого столбца этот множитель отвечает за эквивалентность перехода от представления (15) к представлению (11)).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Калинина Е.А., Утешев А.Ю.* Теория исключения. СПб.: НИИ химии СПбГУ, 2002.
2. *Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз, 1963.
3. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
4. *Schneider P.J., Eberly D.H.* Geometric Tools for Computer Graphics. San Francisco: Elsevier, 2003.
5. *Uteshev A.Yu., Yashina M.V.* // Lect. Notes Comput. Sci. 2007. V. 4770. P. 392.
6. *Bikker P., Uteshev A.Yu.* // J. Symb. Comput. 1999. V. 28. № 1. P. 45