УДК 517.9 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 3
MSC 26B25

О сильной непрерывности выпуклых функций

В. Н. Малозёмов, А. В. Плоткин, Г. Ш. Тамасян

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Малозёмов В. Н., Плоткин А. В., Тамасян Г. Ш.* О сильной непрерывности выпуклых функций // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 3. С. 411–416. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.305

Известно, что выпуклая функция, заданная на открытом выпуклом множестве конечномерного пространства, непрерывна в каждой точке этого множества. На самом деле выпуклая функция обладает усиленным свойством непрерывности. В данной статье вводится понятие сильной непрерывности и показывается, что выпуклая функция обладает этим свойством. Доказательство опирается только на определение выпуклости и неравенство Йенсена. В определение сильной непрерывности входит некоторая константа (константа сильной непрерывности). В случае выпуклых функций для этой константы указано неулучшаемое значение. Константа сильной непрерывности зависит, в частности, от вида нормы, введенной в пространстве аргументов выпуклой функции. Особый интерес представляет полиэдральная норма. При ее использовании константу сильной непрерывности можно легко вычислить. Для этого потребуется конечное число значений выпуклой функции.

Ключевые слова: выпуклая функция, сильная непрерывность, константа сильной непрерывности.

1. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^n$ с базисными ортами $e_1, \ldots, e_n$ и произвольной нормой $\|\cdot\|$. Обозначим

$$B(x_0;\beta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leqslant \beta\}.$$

Определение. Будем говорить, что функция $f(x)$, заданная на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$, *сильно непрерывна* в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$, если найдутся число $\beta > 0$ и константа $L \geqslant 0$ такие, что $B(x_0;\beta) \subset U$ и

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant L\,\|x - x_0\| \quad \forall\, x \in B(x_0;\beta). \tag{1}$$

Покажем, что выпуклая функция обладает свойством сильной непрерывности.

В силу эквивалентности всех норм в пространстве $\mathbb{R}^n$ неравенство (1) достаточно доказывать для какой-то одной нормы. В этом пункте мы выбираем ℓ_1-норму $\|\cdot\|_1$. Обозначим

$$B_1(x_0;\beta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\|_1 \leqslant \beta\}.$$

Теорема 1. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое выпуклое множество и $f(x)$ — выпуклая на U функция. Возьмем точку $x_0 \in U$ и произвольное $\beta > 0$ такое, что $x_0 \pm \beta e_k \in U$ при $k \in 1:n$. Тогда $B_1(x_0;\beta) \subset U$ и для всех $x \in B_1(x_0;\beta)$ выполняется неравенство*

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant L\,\|x - x_0\|_1, \tag{2}$$

где

$$L = \max_{k \in 1:n} \left\{ \frac{f(x_0 \pm \beta e_k) - f(x_0)}{\beta} \right\}. \tag{3}$$

Константа L неулучшаема.

Доказательство. Обозначим $h_k = \beta e_k$. Любой вектор $x \in \mathbb{R}^n$ допускает представление

$$x = x_0 + \sum_{k=1}^{n} w_k h_k. \tag{4}$$

Найдем u_k, v_k из условий

$$\begin{aligned} w_k \ &= u_k - v_k, \\ |w_k| &= u_k + v_k. \end{aligned}$$

Получим

$$u_k = \tfrac{1}{2}\left(|w_k| + w_k\right), \quad v_k = \tfrac{1}{2}(|w_k| - w_k).$$

Очевидно, что $u_k \geqslant 0$ и $v_k \geqslant 0$. При этом имеем

$$|(x - x_0)_k| = \beta |w_k| = \beta(u_k + v_k).$$

Как следствие, получаем

$$\|x - x_0\|_1 = \beta \sum_{k=1}^{n} (u_k + v_k). \tag{5}$$

Перепишем формулу (4) в виде

$$x - x_0 = \sum_{k=1}^{n} u_k h_k + \sum_{k=1}^{n} v_k(-h_k).$$

Обозначим $u_{n+k} = v_k$, $h_{n+k} = -h_k$. Тогда будем иметь

$$x - x_0 = \sum_{k=1}^{2n} u_k h_k, \tag{6}$$

где все коэффициенты u_k неотрицательные.

Зафиксируем точку $x \in B_1(x_0; \beta)$. Согласно (5) справедливо соотношение

$$\sum_{k=1}^{2n} u_k = \sum_{k=1}^{n} (u_k + v_k) \leqslant 1. \tag{7}$$

Из (6) следует равенство

$$x = \left(1 - \sum_{k=1}^{2n} u_k\right) x_0 + \sum_{k=1}^{2n} u_k (x_0 + h_k).$$

Все коэффициенты в этом представлении неотрицательны и в сумме равны единице. По условию теоремы точки x_0, $x_0 + h_1$, $\ldots$, $x_0 + h_{2n}$ принадлежат выпуклому множеству U. Значит, и $x \in U$. Тем самым установлено включение $B_1(x_0; \beta) \subset U$.

Напомним, что функция f выпукла на U. По неравенству Йенсена можем записать

$$f(x) \leqslant \left(1 - \sum_{k=1}^{2n} u_k\right) f(x_0) + \sum_{k=1}^{2n} u_k f(x_0 + h_k)$$

или

$$f(x) - f(x_0) \leqslant \sum_{k=1}^{2n} u_k \big[f(x_0 + h_k) - f(x_0)\big] \leqslant L\beta \sum_{k=1}^{2n} u_k,$$

где константа L определяется формулой (3). В силу (5) получаем

$$\beta \sum_{k=1}^{2n} u_k = \beta \sum_{k=1}^{n} (u_k + v_k) = \|x - x_0\|_1 , \tag{8}$$

так что

$$f(x) - f(x_0) \leqslant L \|x - x_0\|_1 . \tag{9}$$

Оценим разность $f(x_0) - f(x)$. Введем точку $y = 2x_0 - x$. Имеем

$$y - x_0 = x_0 - x = \sum_{k=1}^{n} u_k(-h_k) + \sum_{k=1}^{n} v_k h_k.$$

Положив $v_{n+k} = u_k$, $h_{n+k} = -h_k$, запишем

$$y - x_0 = \sum_{k=1}^{2n} v_k h_k.$$

При этом согласно (7)

$$\sum_{k=1}^{2n} v_k = \sum_{k=1}^{n} (v_k + u_k) \leqslant 1.$$

Как и раньше, воспользуемся представлением

$$y = \left(1 - \sum_{k=1}^{2n} v_k\right) x_0 + \sum_{k=1}^{2n} v_k (x_0 + h_k).$$

Ясно, что $y \in U$. По неравенству Йенсена

$$f(y) - f(x_0) \leqslant \sum_{k=1}^{2n} v_k \big[f(x_0 + h_k) - f(x_0)\big] \leqslant L\beta \sum_{k=1}^{2n} v_k.$$

Согласно (8) имеем

$$\beta \sum_{k=1}^{2n} v_k = \beta \sum_{k=1}^{n} (v_k + u_k) = \|x - x_0\|_1 ,$$

так что

$$f(y) - f(x_0) \leqslant L \|x - x_0\|_1 . \tag{10}$$

Теперь отметим, что $x_0 = \frac{1}{2}(y + x)$. В силу выпуклости функции f справедливо неравенство

$$f(x_0) \leqslant \tfrac{1}{2}\big[f(y) + f(x)\big]$$

или

$$f(y) \geqslant 2f(x_0) - f(x). \tag{11}$$

Объединив (10) и (11), получаем

$$f(x_0) - f(x) \leqslant L\,\|x - x_0\|_1\,. \tag{12}$$

Из (9) и (12) следует (2).

Приведем пример, когда неравенство (2) с константой L вида (3) выполняется как равенство. Именно в таком смысле понимается неулучшаемость константы L.

Возьмем выпуклую на $U = \mathbb{R}^n$ функцию $f(x) = \|x\|_1$ и вычислим L при $x_0 = \mathbb{0}$ и произвольном $\beta > 0$. Получим $L = 1$. В данном случае неравенство (2) выполняется как равенство при всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Теорема доказана. $\square$

Теорема 1 гарантирует, в частности, обычную непрерывность выпуклой функции $f(x)$ на открытом выпуклом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$.

2. Как отмечалось выше, из справедливости неравенства (1) для ℓ_1-нормы следует его справедливость для произвольной нормы в $\mathbb{R}^n$. Однако при таком подходе константа L получается грубой. Мы приведем простое независимое доказательство неравенства (1) для произвольной нормы $\|\cdot\|$ с неулучшаемой константой L.

Теорема 2. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое выпуклое множество и $f(x)$ — выпуклая на U функция. Возьмем точку $x_0 \in U$ и произвольное $\beta > 0$ такое, что $B(x_0;\beta) \subset U$. Тогда справедливо неравенство* (1), *где*

$$L = \max_{\|g\|=1} \left\{ \frac{f(x_0 + \beta g) - f(x_0)}{\beta} \right\}. \tag{13}$$

Константа L неулучшаема.

Доказательство. Прежде всего отметим, что максимум в формуле (13) достигается. Это следует из обычной непрерывности выпуклой функции $f(x)$ на открытом выпуклом множестве U и того факта, что аргумент $x = x_0 + \beta g$ функции f при $\|g\| = 1$ пробегает компактную сферу

$$S(x_0;\beta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| = \beta\}\,,$$

которая по условию теоремы содержится в множестве U.

Обратимся к доказательству неравенства (1). Зафиксируем $x \in B(x_0;\beta)$, $x \neq x_0$, и положим $g = \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}$. Очевидно, что $\|g\| = 1$. Введем функцию

$$\varphi(t) = f(x_0 + t\beta g).$$

Эта функция выпукла на отрезке $[-1, 1]$.

Точка $x \in B(x_0;\beta)$, $x \neq x_0$, допускает представление

$$x = x_0 + \beta \frac{\|x - x_0\|}{\beta} \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}.$$

Обозначим $\alpha = \|x - x_0\| / \beta$. Тогда $x = x_0 + \alpha\beta g$, причем $\alpha \in (0, 1]$.

В силу выпуклости функции φ имеем

$$f(x) = f(x_0 + \alpha\beta g) = \varphi(\alpha) = \varphi\big(\alpha \cdot 1 + (1-\alpha)\cdot 0\big) \leqslant \\ \leqslant \alpha\varphi(1) + (1-\alpha)\varphi(0) = \alpha f(x_0 + \beta g) + (1-\alpha) f(x_0).$$

Отсюда следует соотношение

$$f(x) - f(x_0) \leqslant \alpha\big[f(x_0+\beta g) - f(x_0)\big] = \\ = \|x - x_0\| \, \frac{f(x_0+\beta g) - f(x_0)}{\beta} \leqslant L \, \|x - x_0\| \,, \quad (14)$$

где константа L определяется формулой (13).

Теперь возьмем точку $y = x_0 - \alpha\beta g$. Запишем

$$f(y) = \varphi(-\alpha) = \varphi\big(\alpha\cdot(-1) + (1-\alpha)\cdot 0\big) \leqslant \alpha\varphi(-1) + (1-\alpha)\varphi(0) = \\ = \alpha f\big(x_0 + \beta(-g)\big) + (1-\alpha) f(x_0).$$

Отсюда следует, что

$$f(y) - f(x_0) \leqslant \alpha\Big[f\big(x_0+\beta(-g)\big) - f(x_0)\Big] = \\ = \|x - x_0\| \, \frac{f\big(x_0+\beta(-g)\big) - f(x_0)}{\beta} \leqslant L \, \|x - x_0\| \,. \quad (15)$$

Далее, поскольку $x_0 = \frac{1}{2}(x+y)$, то $f(x_0) \leqslant \frac{1}{2}\big[f(x) + f(y)\big]$ или

$$f(y) \geqslant 2f(x_0) - f(x). \quad (16)$$

Объединив (15) и (16), придем к неравенству

$$f(x_0) - f(x) \leqslant L \, \|x - x_0\| \,. \quad (17)$$

Чтобы получить требуемое неравенство (1), остается объединить (14) и (17).

Приведем пример, когда неравенство (1) с константой L вида (13) выполняется как равенство. Возьмем функцию $f(x) = \|x\|$, выпуклую на $U = \mathbb{R}^n$, и вычислим для нее константу L при $x_0 = \mathbb{O}$ и произвольном $\beta > 0$. Получим $L = 1$. В данном случае неравенство (1) выполняется как равенство при всех $x \in \mathbb{R}^n$. Это дает нам основание говорить о неулучшаемости константы L.

Теорема доказана. □

3. Теорема 1 имеет конструктивный характер: подходящее $\beta > 0$ можно найти за конечное число испытаний; для вычисления константы L вида (3) требуется конечное число значений функции $f(x)$. При доказательстве используется только определение выпуклой функции. Следствием теоремы 1 является обычная непрерывность выпуклой функции на открытом выпуклом множестве.

В теореме 2 установлена сильная непрерывность выпуклой функции с точной константой L в случае, когда в $\mathbb{R}^n$ задана произвольная норма. В доказательстве используется обычная непрерывность выпуклой функции. Вычисление константы L

вида (13) связано с решением задачи максимизации выпуклой функции на единичной сфере пространства $\mathbb{R}^n$.

Вопрос о справедливости неравенства (1) в случае евклидовой нормы без анализа точности константы L изучался ранее в работах [1–3].

Литература

1. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. Перевод с англ. М.: Мир, 1973. 470 с.

2. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 320 с.

3. *Половинкин Е. С., Балашов М. В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2004. 416 с.

Статья поступила в редакцию 7 июля 2017 г.; рекомендована в печать 22 марта 2018 г.

Контактная информация:

Малозёмов Василий Николаевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; v.malozemov@spbu.ru
Плоткин Артём Владимирович — магистр; avplotkin@gmail.com
Тамасян Григорий Шаликович — канд. физ.-мат. наук, доц.; g.tamasyan@spbu.ru

On the strong continuity of convex functions

V. N. Malozemov, A. V. Plotkin, G. Sh. Tamasyan

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Malozemov V. N., Plotkin A. V., Tamasyan G. Sh. On the strong continuity of convex functions. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 3, pp. 411–416. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.305

A convex function defined on an open convex set is known to be continuous at every point of this set. In actuality, a convex function has a strengthened continuity property. In this paper, we introduce the notion of strong continuity and demonstrate that a convex function possesses this property. The proof is based only on the definition of convexity and the Jensen's inequality. A distinct constant (constant of strong continuity) is included in the definition of strong continuity. In the article, we give an unimprovable value for this constant in the case of convex functions. The constant of strong continuity depends, in particular, on the form of the norm introduced in the space of the arguments of a convex function. Polyhedral norm is of particular interest. With its use the constant of strong continuity can be easily calculated. This requires a finite number of values of the convex function.

Keywords: convex function, strong continuity, constant of strong continuity.

References

1. Rockafellar R. T., *Convex Analysis* (Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970, 472 p.).

2. Pshenichny B. N. *Convex analysis and extremal problems* (Nauka, Moscow, 1980, 320 p.) [in Russian].

3. Polovinkin E. S., Balashov M. V. *Elements of convex and strongly convex analysis* (Fizmatlit, Moscow, 2004, 416 p.) [in Russian].

Author's information:

Vassili N. Malozemov — v.malozemov@spbu.ru
Artem V. Plotkin — avplotkin@gmail.com
Grigoriy Sh. Tamasyan — g.tamasyan@spbu.ru