

УДК 519.65

## СИНТЕЗ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНОГО ФИЛЬТРА ПРИ НАЛИЧИИ ПОЛНОГО АЛЬТЕРНАНСА<sup>1)</sup>

© 2017 г. В. Н. Малозёмов, Г. Ш. Тамасян

(199034 С.-Петербург, Университетская наб., 7/9, С.-Пб гос. ун-т)

e-mail: v.malozetov@spbu.ru; g.tamasyan@spbu.ru

Поступила в редакцию 02.06.2016 г.

Рассматривается задача построения дробно-рациональной функции, неотрицательной на двух промежутках, один из которых бесконечный, со следующим свойством: максимальное отклонение дроби от нуля на бесконечном промежутке принимает наименьшее возможное значение при условии, что значения дроби на конечном промежутке не выходят за данные границы. Предполагается, что оптимальная дробь обладает полным альтернансом. В этом случае исходная задача сводится к решению системы нелинейных уравнений. Для решения данной системы предлагается двухэтапный метод. На первом этапе выделяется подсистема, с помощью которой находится хорошее начальное приближение для полной системы. На втором этапе решается полная система нелинейных уравнений. Подробно показывается, как это делается, когда порядок дроби изменяется от единицы до четырех. Приводятся результаты вычислений для дроби 10-го порядка. Библ. 5. Фиг. 9.

**Ключевые слова:** дробно-рациональные функции, фильтровые задачи, полный альтернанс, нелинейные системы уравнений.

**DOI:** 10.7868/S0044466917060114

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Обозначим через  $\mathcal{H}_n^n$  семейство дробно-рациональных функций вида

$$H(x, u) = \frac{x_0 u^n + x_1 u^{n-1} + \dots + x_n}{u^n + x_{n+1} u^{n-1} + \dots + x_{2n}}.$$

При фиксированном векторе коэффициентов  $x = (x_0, x_1, \dots, x_{2n})$  функция  $H(x, u)$  определена на расширенной прямой  $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , причем

$$H(x, \infty) = x_0. \quad (1)$$

Рассмотрим экстремальную задачу фильтрового типа: минимизировать величину

$$\varphi(x) = \sup_{|u| \geq \frac{1}{\tau}} H(x, u)$$

при ограничениях

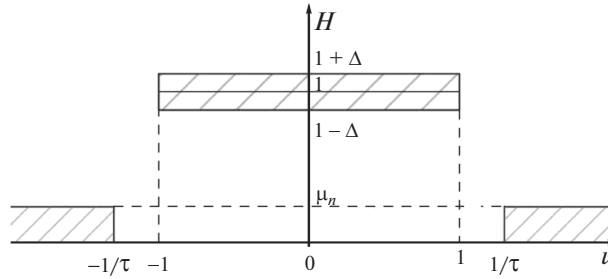
$$|H(x, u) - 1| \leq \Delta, \quad u \in [-1, 1], \quad (2)$$

$$H(x, u) \geq 0, \quad |u| \geq \frac{1}{\tau}, \quad (3)$$

где  $\tau$  и  $\Delta$  – параметры. Они берутся из интервала  $(0, 1)$ .

В [1] установлено, что при любом натуральном  $n$  задача (1)–(3) имеет ровно два решения, каждое из которых характеризуется наличием полного  $(2n + 2)$ -точечного альтернанса. Оказывается, этой информации достаточно, чтобы найти оба решения. Мы покажем, как это делается при  $n$  от 1 до 4 и при  $n = 10$ .

<sup>1)</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке гранта СПбГУ (9.38.205.2014).



Фиг. 1. Множество, содержащее контролируемую часть графиков двух оптимальных дробей.

### 2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Напомним, что означает наличие полного альтернанса у дроби  $H \in \mathcal{H}_n^n$ . Пусть

$$\mu_n = \inf \varphi(x),$$

где инфимум берется по всем  $x$  таким, что дробь  $H(x, u)$  удовлетворяет ограничениям (2), (3). Полный альтернанс состоит из  $2n + 2$  точек

$$u_1 < u_2 < \dots < u_{2n+2}, \tag{4}$$

расположенных на расширенной прямой  $\bar{\mathbb{R}}$ . Каждая точка альтернанса  $u_k$  принадлежит одному из трех множеств:

- 1)  $|u_k| \geq \frac{1}{\tau}$  и  $H(x, u_k) = \mu_n$ ;
- 2)  $u_k \in [-1, 1]$  и  $|H(x, u_k) - 1| = \Delta$ ;
- 3)  $|u_k| \geq \frac{1}{\tau}$  и  $H(x, u_k) = 0$ .

Точка альтернанса  $u_k$  называется (+)-точкой альтернанса, если

$$H(x, u_k) = \mu_n \quad \text{или} \quad H(x, u_k) - 1 = \Delta,$$

и (-)-точкой альтернанса, если

$$H(x, u_k) = 0 \quad \text{или} \quad H(x, u_k) - 1 = -\Delta.$$

В полном альтернансе (4) (+)-точки и (-)-точки альтернанса чередуются.

Мы будем строить дроби, обладающие полным альтернансом. На фиг. 1 штрихами выделено множество, содержащее контролируемую часть графиков таких дробей.

Теория дает дополнительную информацию о расположении точек альтернанса (см. [1]–[5]). А именно,

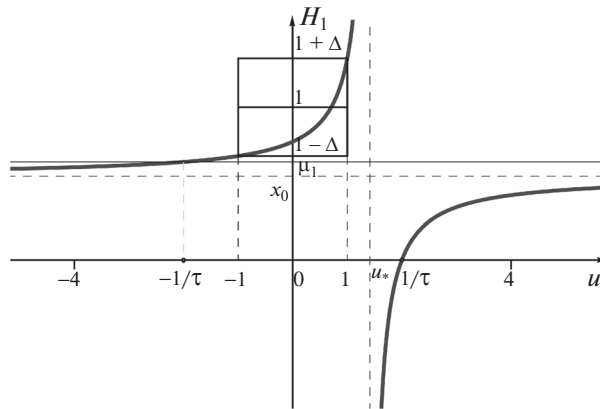
- (а) при фиксированном  $x$  обе оптимальные дроби имеют одинаковые точки альтернанса;
- (б) точки альтернанса расположены на  $\bar{\mathbb{R}}$  симметрично относительно начала координат;
- (в) отрезок  $[-1, 1]$  содержит ровно  $n + 1$  точек альтернанса, включая концы отрезка;
- (г) остальные  $n + 1$  точек альтернанса по модулю не меньше  $1/\tau$ , причем граничные точки  $1/\tau$  и  $-1/\tau$  являются точками альтернанса.

Свойство (б) позволяет искать только неотрицательные точки альтернанса. Согласно свойствам (б) и (г) при четном  $n$  точками альтернанса будут  $u = 0$  и  $u = \infty$ .

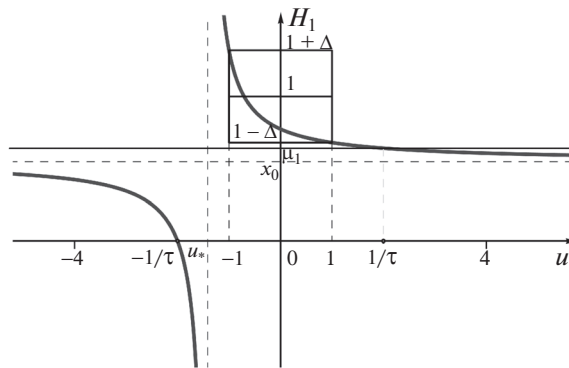
### 3. СЛУЧАЙ $n = 1$

Обратимся к случаю  $n = 1$ . График дроби из семейства  $\mathcal{H}_1^1$ , обладающей полным альтернансом, изображен на фиг. 2.

Точками альтернанса будут  $u_1 = -\frac{1}{\tau}$ ,  $u_2 = -1$ ,  $u_3 = 1$ ,  $u_4 = \frac{1}{\tau}$ .



Фиг. 2. График дроби из семейства  $\mathcal{H}_1^1$ , обладающей полным альтернансом.



Фиг. 3. График второй дроби из семейства  $\mathcal{H}_1^1$ , обладающей полным альтернансом.

Альтернансные условия для дроби

$$H_1(u) := H(x, u) = \frac{x_0 u + x_1}{u + x_2}$$

имеют вид

$$H_1\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \mu_1, \quad H_1(-1) = 1 - \Delta, \quad H_1(1) = 1 + \Delta, \quad H_1\left(\frac{1}{\tau}\right) = 0.$$

Из последних трех условий находим коэффициенты дроби

$$x_0 = \frac{\tau(1 - \Delta^2)}{\tau + \Delta}, \quad x_1 = -\frac{1 - \Delta^2}{\tau + \Delta}, \quad x_2 = -\frac{1 + \tau\Delta}{\tau + \Delta}.$$

Первое условие приводит к формуле для наименьшего уклонения от нуля

$$\mu_1 = H_1\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{2\tau(1 - \Delta^2)}{2\tau + \Delta(1 + \tau^2)}.$$

Дробь  $H_1(u)$  имеет полюс

$$u_* = (1 + \tau\Delta)/(\tau + \Delta).$$

Нетрудно проверить, что  $1 < u_* < \frac{1}{\tau}$ .

Второе решение задачи (1)–(3) при  $n = 1$  определяется формулой (см. фиг. 3)

$$\hat{H}_1(u) = H_1(-u).$$

4. СЛУЧАЙ  $n = 2$

Переходим к случаю  $n = 2$ . На фиг. 4 представлен график дроби из семейства  $\mathcal{H}_2^2$ , обладающей полным альтернансом. Точками альтернанса являются

$$u_1 = -\frac{1}{\tau}, \quad u_2 = -1, \quad u_3 = 0, \quad u_4 = 1, \quad u_5 = \frac{1}{\tau}, \quad u_6 = \infty.$$

Оптимальную дробь будем искать в виде

$$H_2(u) = x_2/(u^2 + x_4).$$

Запишем альтернансные условия

$$H_2(0) = 1 + \Delta, \quad H_2(1) = 1 - \Delta. \tag{5}$$

Остальные альтернансные условия выполняются автоматически (включая  $H_2(\infty) = 0$ ).

Решая систему (5), получаем

$$x_2 = \frac{1 - \Delta^2}{2\Delta}, \quad x_4 = \frac{1 - \Delta}{2\Delta}.$$

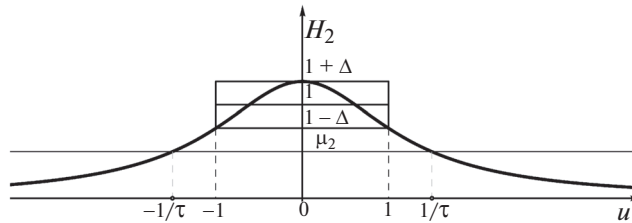
При этом

$$\mu_2 := H_2\left(\frac{1}{\tau}\right) = \frac{\tau^2(1 - \Delta^2)}{2\Delta + \tau^2(1 - \Delta)}. \tag{6}$$

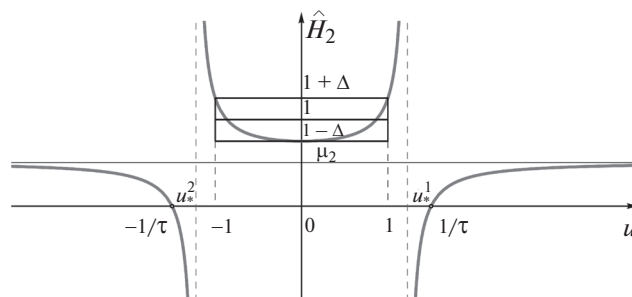
Второе решение  $\hat{H}_2(u)$  имеет те же точки альтернанса, но другую альтернансную картину (см. фиг. 5).

Дробь  $\hat{H}_2(u)$  будем искать в виде

$$\hat{H}_2(u) = (x_0 u^2 + x_2)/(u^2 + x_4).$$



Фиг. 4. График дроби из семейства  $\mathcal{H}_2^2$ , обладающей полным альтернансом.



Фиг. 5. График второй дроби из семейства  $\mathcal{H}_2^2$ , обладающей полным альтернансом.

Запишем альтернансные условия

$$\hat{H}_2(0) = 1 - \Delta, \quad \hat{H}_2(1) = 1 + \Delta, \quad \hat{H}_2\left(\frac{1}{\tau}\right) = 0. \tag{7}$$

Остальные альтернансные условия выполняются автоматически (включая  $\hat{H}_2(\infty) = \mu_2$ ). Решая систему (7), получаем

$$x_0 = \frac{\tau^2(1 - \Delta^2)}{2\Delta + \tau^2(1 - \Delta)}, \quad x_2 = -\frac{1 - \Delta^2}{2\Delta + \tau^2(1 - \Delta)}, \quad x_4 = -\frac{1 + \Delta}{2\Delta + \tau^2(1 - \Delta)}.$$

При этом для  $\mu_2 = \hat{H}_2(\infty)$  справедлива формула (6).

Дробь  $\hat{H}_2(u)$  имеет два полюса  $u_*^1$  и  $u_*^2$ , определяемых условием

$$(u_*^k)^2 = \frac{1 + \Delta}{2\Delta + \tau^2(1 - \Delta)}, \quad k = 1, 2.$$

Нетрудно проверить, что  $1 < (u_*^k)^2 < \frac{1}{\tau^2}$  при  $k = 1, 2$ .

### 5. СЛУЧАЙ $n = 3$

Возьмем  $n = 3$ . График дроби из семейства  $\mathcal{H}_3^3$ , обладающей полным альтернансом, изображен на фиг. 6.

Среди восьми точек альтернанса  $u_1 < u_2 < \dots < u_8$  четыре известны — это

$$u_2 = -\frac{1}{\tau}, \quad u_3 = -1, \quad u_6 = 1, \quad u_7 = \frac{1}{\tau}.$$

Четыре точки альтернанса  $u_1, u_4, u_5, u_8$  неизвестны. По теории

$$u_1 = -u_8, \quad u_4 = -u_5,$$

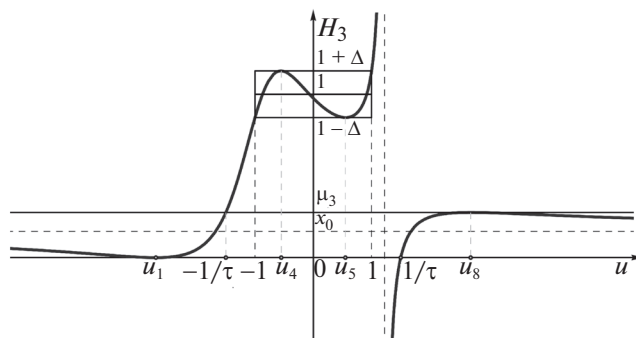
причем  $u_8 > \frac{1}{\tau}$  и  $u_5 \in (0, 1)$ .

Альтернансные условия для дроби

$$H_3(u) = H(x, u) = \frac{x_0 u^3 + x_1 u^2 + x_2 u + x_3}{u^3 + x_4 u^2 + x_5 u + x_6}$$

имеют вид

$$\begin{aligned} H_3(u_1) = 0, \quad H_3(u_8) = \mu_3, \quad H_3\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \mu_3, \quad H_3\left(\frac{1}{\tau}\right) = 0, \\ H_3(-1) = 1 - \Delta, \quad H_3(1) = 1 + \Delta, \quad H_3(u_4) = 1 + \Delta, \quad H_3(u_5) = 1 - \Delta, \\ H_3'(u_k) = 0, \quad k \in \{1, 4, 5, 8\}. \end{aligned} \tag{8}$$



Фиг. 6. График дроби из семейства  $\mathcal{H}_3^3$ , обладающей полным альтернансом.

Имеем систему нелинейных уравнений 12-го порядка относительно 12 неизвестных: коэффициентов дроби  $x_0, x_1, \dots, x_6$ , точек альтернанса  $u_1, u_4, u_5, u_8$  и величины наименьшего уклонения от нуля  $\mu_3$ .

Преобразуем эту систему. Для этого положим

$$H_3(u) = P_3(u)/Q_3(u).$$

У полинома  $Q_3(u)$  старший коэффициент равен единице. Напомним, что

$$H'_u(u) = \frac{P'_3(u)Q_3(u) - P_3(u)Q'_3(u)}{Q_3^2(u)} = \frac{P'_3(u) - H_3(u)Q'_3(u)}{Q_3(u)}.$$

Переставив уравнения в (8), придем к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} P'_3(u_1) &= 0, & P_3(u_1) &= 0, & P_3\left(\frac{1}{\tau}\right) &= 0, \\ P'_3(u_4) &= (1 + \Delta)Q'_3(u_4), & P'_3(u_5) &= (1 - \Delta)Q'_3(u_5), \\ P_3(-1) &= (1 - \Delta)Q_3(-1), & P_3(1) &= (1 + \Delta)Q_3(1), \end{aligned} \tag{9}$$

$$P_3\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \mu_3 Q_3\left(-\frac{1}{\tau}\right), \tag{10}$$

$$P_3(u_4) = (1 + \Delta)Q_3(u_4), \quad P_3(u_5) = (1 - \Delta)Q_3(u_5), \tag{11}$$

$$P_3(u_8) = \mu_3 Q_3(u_8), \quad P'_3(u_8) = \mu_3 Q'_3(u_8).$$

Нелинейную систему (9)–(11) будем решать численным методом. Для этого нужно иметь хорошее начальное приближение. Построение хорошего начального приближения часто представляет основную трудность. В данном случае поступим так:

(а) возьмем приближенные значения для точек альтернанса  $u_5$  и  $u_8$ ; положим  $u_1 = -u_8$ ,  $u_4 = -u_5$ ;

(б) найдем решение линейной системы уравнений (9), неизвестными в которой являются коэффициенты дроби  $x_0, x_1, \dots, x_6$ ;

(в) вычислим  $\mu_3$  по формуле (10),  $\mu_3 = H_3\left(-\frac{1}{\tau}\right)$ .

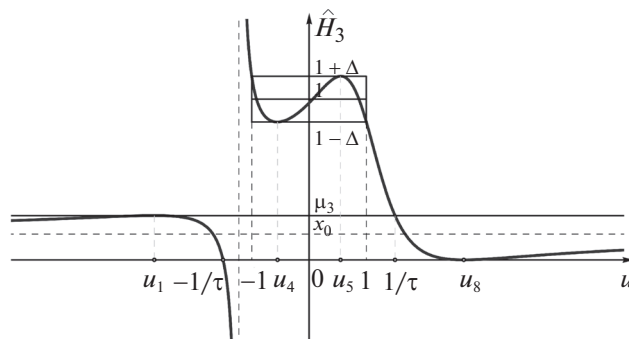
Построив начальное приближение, решение системы (9)–(11) получим с помощью процедуры `fsolve` из математического пакета `MatLab`.

Для наглядности распишем систему линейных уравнений (9) в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 3u_1^2 & 2u_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_1^3 & u_1^2 & u_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\tau^3} & \frac{1}{\tau^2} & \frac{1}{\tau} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3u_4^2 & 2u_4 & 1 & 0 & -2(1 + \Delta)u_4 & -(1 + \Delta) & 0 \\ 3u_5^2 & 2u_5 & 1 & 0 & -2(1 - \Delta)u_5 & -(1 - \Delta) & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -(1 - \Delta) & (1 - \Delta) & -(1 - \Delta) \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -(1 + \Delta) & -(1 + \Delta) & -(1 + \Delta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3u_4^2(1 + \Delta) \\ 3u_5^2(1 - \Delta) \\ -(1 - \Delta) \\ 1 + \Delta \end{pmatrix}.$$

**Пример 1.** Пусть  $\tau = \frac{2}{3}$ ,  $\Delta = 0.14$ . Возьмем

$$u_5 = \frac{1}{2}, \quad u_8 = \frac{7}{2}, \quad u_1 = -u_8, \quad u_4 = -u_5.$$



Фиг. 7. График второй дроби из семейства  $\mathcal{H}_3^3$ , обладающей полным альтернансом.

Решая систему (9), получаем

$$x_0 = 0.1911, \quad x_1 = 1.0511, \quad x_2 = 0.3344, \quad x_3 = -3.5117, \\ x_4 = 1.1404, \quad x_5 = -0.1126, \quad x_6 = -3.7251.$$

По формуле (10),  $\mu_3 = 0.5253$ .

Построено начальное приближение. Теперь можно подключить процедуру fsolve. Результаты вычислений следующие:

$$x_0 = 0.1638, \quad x_1 = 0.6400, \quad x_2 = -0.1313, \quad x_3 = -1.7957, \\ x_4 = 0.6553, \quad x_5 = -0.8018, \quad x_6 = -1.8388, \\ \mu_3 = 0.2806, \\ u_5 = 0.5549, \quad u_8 = 2.7034.$$

При фиксированном  $\tau$  параметр  $\Delta$  мы выбрали так, чтобы выполнялось приближенное равенство  $\mu_3 \approx 2\Delta$ .

Вторая дробь из семейства  $\mathcal{H}_3^3$ , обладающая полным альтернансом, имеет вид (см. фиг. 7)

$$\hat{H}_3(u) = H_3(-u).$$

### 6. СЛУЧАЙ $n = 4$

Наконец, рассмотрим случай  $n = 4$ . На фиг. 8 представлен график дроби  $H_4(u)$  из семейства  $\mathcal{H}_4^4$ , обладающей полным 10-точечным альтернансом.

Дробь  $H_4(u)$  будем искать в виде

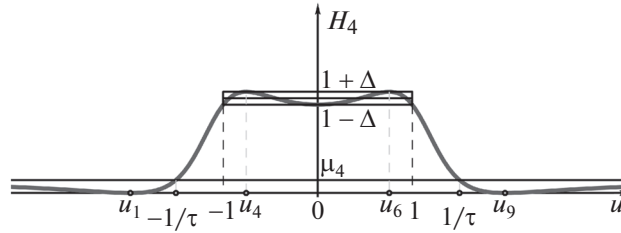
$$H_4(u) = \frac{P_4(u)}{Q_4(u)} = \frac{\mu_4 u^4 + x_2 u^2 + x_4}{u^4 + x_6 u^2 + \frac{x_4}{1-\Delta}}.$$

Как отмечалось, при четном  $n$  бесконечность является точкой альтернанса. Мы учли это, положив  $x_0 = \mu_4$ . Точкой альтернанса будет  $u = 0$  (см. фиг. 8), поэтому  $x_8 = x_4/(1 - \Delta)$ . Известны еще 4 точки альтернанса:

$$u_2 = -\frac{1}{\tau}, \quad u_3 = -1, \quad u_7 = 1, \quad u_8 = \frac{1}{\tau}.$$

Запишем следующие альтернансные условия:

$$H_4(1) = 1 - \Delta, \quad H_4\left(\frac{1}{\tau}\right) = \mu_4, \quad H_4(u_6) = 1 + \Delta, \\ H_4(u_9) = 0, \quad H_4'(u_6) = 0, \quad H_4'(u_9) = 0. \tag{12}$$



Фиг. 8. График дроби из семейства  $\mathcal{H}_4^4$ , обладающей полным альтернансом.

Это нелинейная система уравнений 6-го порядка относительно 6 неизвестных: коэффициентов дроби  $x_2, x_4, x_6$ , точек альтернанса  $u_6 \in (0, 1), u_9 > \frac{1}{\tau}$  и величины наименьшего уклонения от нуля  $\mu_4 \in (0, 1 - \Delta)$ .

Переставив уравнения в (12), приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} P_4'(u_9) = 0, \quad P_4(u_9) = 0, \\ P_4'(u_6) = (1 + \Delta)Q_4'(u_6), \quad P_4(1) = (1 - \Delta)Q_4(1), \end{aligned} \tag{13}$$

$$P_4(u_6) = (1 + \Delta)Q_4(u_6), \quad P_4\left(\frac{1}{\tau}\right) = \mu_4 Q_4\left(\frac{1}{\tau}\right). \tag{14}$$

В матричной форме подсистема (13) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2u_9^2 & 1 & 0 & 0 \\ u_9^4 & u_9^2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -(1 - \Delta) \\ 2u_6^2 & 1 & 0 & -(1 + \Delta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_4 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 - \Delta \\ 2(1 + \Delta)u_6^2 \end{pmatrix}.$$

При фиксированных  $u_6$  и  $u_9$  эта система линейна относительно  $\mu_4, x_2, x_4, x_6$ . Ее решение можно указать в явной форме:

$$\begin{aligned} x_2 = -2u_9^2\mu_4, \quad x_4 = u_9^4\mu_4, \quad x_6 = \frac{1 - 2u_9^2}{1 - \Delta}\mu_4 - 1, \\ \mu_4 = \frac{(1 - \Delta^2)(2u_6^2 - 1)}{4\Delta u_9^2 + 2(1 - \Delta)u_6^2 - (1 + \Delta)}. \end{aligned} \tag{15}$$

Дальнейшие действия очевидны. Возьмем приближенные значения для точек альтернанса  $u_6$  и  $u_9$ . По формулам (15) найдем начальное приближение для решения нелинейной системы (13), (14). С помощью процедуры fsolve решим эту систему.

**Пример 2.** Пусть  $n = 4, \tau = 2/3, \Delta = 0.068$ . Возьмем  $u_6 = 0.8, u_9 = 1.5$ .

По формулам (15) получаем

$$\begin{aligned} x_2 = -1.7018, \quad x_4 = 1.9145, \quad x_6 = -2.4202, \\ \mu_4 = 0.3782. \end{aligned}$$

Построено начальное приближение. Для решения системы (13), (14) подключим процедуру fsolve. Результаты вычислений имеют вид

$$\begin{aligned} x_2 = -1.0678, \quad x_4 = 2.0967, \quad x_6 = -2.000, \\ \mu_4 = 0.1360, \\ u_6 = 0.7569, \quad u_9 = 1.9817. \end{aligned}$$



При фиксированном  $\tau$  параметр  $\Delta$  мы выбрали так, чтобы выполнялось приближенное равенство  $\mu_4 \approx 2\Delta$ .

6.1. Второе решение при  $n = 4$

График второй дроби  $\hat{H}_4(u)$  из семейства  $\mathcal{H}_4^4$ , обладающей полным альтернансом, изображен на фиг. 9. Точки альтернанса остаются те же, включая  $u_5 = 0$  и  $u_{10} = \infty$ .

Дробь  $\hat{H}_4(u)$  будем искать в виде

$$\hat{H}_4(u) = \frac{\hat{P}_4(u)}{\hat{Q}_4(u)} = \frac{x_2 u^2 + x_4}{u^4 + x_6 u^2 + \frac{x_4}{1 + \Delta}}.$$

Запишем альтернансные условия в виде

$$\begin{aligned} \hat{H}_4(1) = 1 + \Delta, \quad \hat{H}_4\left(\frac{1}{\tau}\right) = 0, \quad \hat{H}_4(u_6) = 1 - \Delta, \\ \hat{H}_4(u_9) = \mu_4, \quad \hat{H}'_4(u_6) = 0, \quad \hat{H}'_4(u_9) = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Переставив уравнения в (16), придем к следующей системе уравнений:

$$\hat{P}_4(1) = (1 + \Delta)\hat{Q}_4(1), \quad \hat{P}_4\left(\frac{1}{\tau}\right) = 0, \quad \hat{P}'_4(u_6) = (1 - \Delta)\hat{Q}'_4(u_6), \tag{17}$$

$$\hat{P}'_4(u_9) = \mu_4 \hat{Q}'_4(u_9), \tag{18}$$

$$\hat{P}_4(u_6) = (1 - \Delta)\hat{Q}_4(u_6), \quad \hat{P}_4(u_9) = \mu_4 \hat{Q}_4(u_9). \tag{19}$$

Распишем подсистему (17) подробно:

$$\frac{x_2}{1 + \Delta} - x_6 = 1, \quad \frac{x_2}{\tau^2} + x_4 = 0, \quad \frac{x_2}{1 - \Delta} - x_6 = 2u_6^2.$$

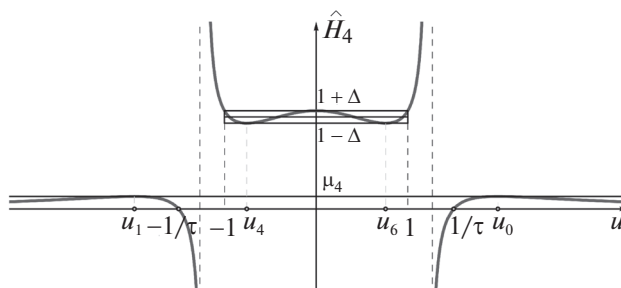
Отсюда следует, что

$$x_2 = \frac{(1 - \Delta^2)(2u_6^2 - 1)}{2\Delta}, \quad x_4 = -\frac{x_2}{\tau^2}, \quad x_6 = \frac{x_2}{1 + \Delta} - 1. \tag{20}$$

Согласно (18) имеем

$$\mu_4 = \frac{(1 - \Delta^2)(2u_6^2 - 1)}{4\Delta u_9^2 + 2(1 - \Delta)u_6^2 - (1 + \Delta)}. \tag{21}$$

Выражение для  $\mu_4$  совпадает с тем, что появилось ранее в (15).



Фиг. 9. График второй дроби из семейства  $\mathcal{H}_4^4$ , обладающей полным альтернансом.

Теперь можно записать алгоритм для построения дроби  $\hat{H}_4(u)$ . Возьмем приближенные значения для точек альтернанса  $u_6$  и  $u_9$ . По формулам (20) и (21) найдем начальное приближение для решения нелинейной системы уравнений (17)–(19). С помощью процедуры `fsolve` решим эту систему.

**Пример 3.** Пусть  $n = 4$ ,  $\tau = 2/3$ ,  $\Delta = 0.068$ . Возьмем  $u_6 = 0.8$ ,  $u_9 = 1.5$ . По формулам (20), (21) получим

$$x_2 = 2.0493, \quad x_4 = -4.6109, \quad x_6 = 0.9188, \\ \mu_4 = 0.3782.$$

Построено начальное приближение. Для решения системы (17)–(19) подключаем процедуру `fsolve`. Результаты вычислений следующие:

$$x_2 = 1.0678, \quad x_4 = -2.0967, \quad x_6 = -0.0002, \\ \mu_4 = 0.1360, \\ u_6 = 0.7569, \quad u_9 = 1.9817.$$

## 7. ДАЛЬНЕЙШИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Описанный выше подход к построению дробно-рационального фильтра был реализован до  $n = 15$  включительно (при фиксированном  $\tau$ ; параметр  $\Delta$  подбирался так, чтобы выполнялось приближенное равенство  $\mu_n \approx 2\Delta$ ). В ходе численных экспериментов наблюдались некоторые закономерности. Чтобы описать их, перенумеруем точки альтернанса. С учетом информации из разд. 2 запишем следующее: при  $n = 2s - 1$  имеем

$$u_1 < u_2 < \dots < u_s = -\frac{1}{\tau}, \\ -1 = u_{s+1} < \dots < u_{n+s+1} = 1, \\ \frac{1}{\tau} = u_{n+s+2} < \dots < u_{2n+2};$$

при  $n = 2s$  имеем

$$u_1 < u_2 < \dots < u_s = -\frac{1}{\tau}, \\ -1 = u_{s+1} < \dots < u_{n+1} = 0 < u_{n+2} < \dots < u_{n+s+1} = 1, \\ \frac{1}{\tau} = u_{n+s+2} < \dots < u_{2n+1} < u_{2n+2} = \infty.$$

Установлено следующее.

1. При  $n = 2s - 1$  справедливы соотношения

$$u_j u_{n+2-j} = \frac{1}{\tau}, \quad j \in 1 : s; \\ u_{n+1+j} u_{2n+3-j} = \frac{1}{\tau}, \quad j \in 1 : s.$$

При  $n = 2s$  имеем

$$u_j u_{n+1-j} = \frac{1}{\tau}, \quad j \in 1 : s; \\ u_{n+1+j} u_{2n+2-j} = \frac{1}{\tau}, \quad j \in 1 : s.$$

2. Порядок  $N$  полной нелинейной системы уравнений (см., например, системы (8), (12)) равен:

$$N = \begin{cases} 4n & \text{при нечетном } n, \\ 2(n-1) & \text{при четном } n. \end{cases}$$

3. При нечетном  $n$  у оптимальной дроби

$$H_n(x, u) = \frac{P_n(x, u)}{Q_n(x, u)}$$

коэффициенты полиномов  $P_n$  и  $Q_n$  при одинаковых степенях  $u$  имеют одинаковые знаки. Кроме того, имеем

$$|x_{2j-1}| < |x_{n+2j-1}|, \quad j \in 1 : s,$$

и с возрастанием  $n$  получим

$$\frac{x_{2j-1}}{x_{n+2j-1}} \rightarrow 1 \quad \forall j \in 1 : s; \quad H_n(x, 0) \rightarrow 1.$$

Здесь  $s = \frac{1}{2}(n + 1)$ .

4. Все точки альтернанса, найденные при  $n = k$ , являются точками альтернанса и при  $n = 2k$ ,  $k \in 1 : 7$ . Все точки альтернанса, найденные при  $n = 3$ , являются точками альтернанса и при  $n = 3k$ ,  $k \in 1 : 5$ .

5. При поиске хорошего начального приближения для полной системы уравнений необходимо указать приближенные значения для точек альтернанса. Наиболее трудоемкий случай возникает при простом  $n$ .

### 8. СЛУЧАЙ $n = 10$

Дробь  $H_{10}(u)$  будем искать в виде

$$H_{10}(u) = \frac{P_{10}(u)}{Q_{10}(u)} = \frac{x_2 u^8 + x_4 u^6 + x_6 u^4 + x_8 u^2 + x_{10}}{u^{10} + x_{12} u^8 + x_{14} u^6 + x_{16} u^4 + x_{18} u^2 + \frac{x_{10}}{1 + \Delta}}$$

Здесь  $x_0 = 0$ , так как бесконечность является точкой альтернанса. Точкой альтернанса будет также  $u = 0$ , поэтому  $x_{20} = x_{10}/(1 + \Delta)$ . Известны еще 4 точки альтернанса:  $u_5 = -\frac{1}{\tau}$ ,  $u_6 = -1$ ,  $u_{16} = 1$ ,  $u_{17} = \frac{1}{\tau}$ .

Запишем альтернансные условия

$$\begin{aligned} H_{10}(1) &= 1 - \Delta, & H_{10}\left(\frac{1}{\tau}\right) &= \mu_{10}, \\ H_{10}(u_{12}) &= 1 - \Delta, & H_{10}(u_{13}) &= 1 + \Delta, & H_{10}(u_{14}) &= 1 - \Delta, & H_{10}(u_{15}) &= 1 + \Delta, \\ H_{10}(u_{18}) &= 0, & H_{10}(u_{19}) &= \mu_{10}, & H_{10}(u_{20}) &= 0, & H_{10}(u_{21}) &= \mu_{10}, \\ H'_{10}(u_k) &= 0, & k &= \{2, 13, 14, 15, 18, 19, 20, 21\}. \end{aligned} \tag{22}$$

Это нелинейная система уравнений 18-го порядка относительно 18 неизвестных: коэффициентов дроби  $x_{2k}$ ,  $k = 1 : 9$ , точек альтернанса  $0 < u_{12} < u_{13} < u_{14} < u_{15} < 1, \frac{1}{\tau} < u_{18} < u_{19} < u_{20} < u_{21}$  и величины наименьшего уклонения от нуля  $\mu_{10} \in (0, 1 - \Delta)$ .

Переставив уравнения в (22), придем к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} P_{10}(1) &= (1 - \Delta)Q_{10}(1), \\ P'_{10}(u_{18}) &= 0, & P_{10}(u_{18}) &= 0, \\ P'_{10}(u_{20}) &= 0, & P_{10}(u_{20}) &= 0, \\ P'_{10}(u_{12}) &= (1 - \Delta)Q'_{10}(u_{12}), & P'_{10}(u_{13}) &= (1 + \Delta)Q'_{10}(u_{13}), \\ P'_{10}(u_{14}) &= (1 - \Delta)Q'_{10}(u_{14}), & P'_{10}(u_{15}) &= (1 + \Delta)Q'_{10}(u_{15}), \end{aligned} \tag{23}$$

$$P_{10}\left(\frac{1}{\tau}\right) = \mu_{10}Q_{10}\left(\frac{1}{\tau}\right), \quad (24)$$

$$\begin{aligned} P_{10}(u_{12}) &= (1 - \Delta)Q_{10}(u_{12}), & P_{10}(u_{13}) &= (1 + \Delta)Q_{10}(u_{13}), \\ P_{10}(u_{14}) &= (1 - \Delta)Q_{10}(u_{14}), & P_{10}(u_{15}) &= (1 + \Delta)Q_{10}(u_{15}), \\ P_{10}(u_{19}) &= \mu_{10}Q_{10}(u_{19}), & P'_{10}(u_{19}) &= \mu_{10}Q'_{10}(u_{19}), \\ P_{10}(u_{21}) &= \mu_{10}Q_{10}(u_{21}), & P'_{10}(u_{21}) &= \mu_{10}Q'_{10}(u_{21}). \end{aligned} \quad (25)$$

При фиксированных  $u_k$ ,  $k = \{12, 13, 14, 15, 18, 19, 20, 21\}$ , подсистема (23) линейна относительно  $x_{2k}$ ,  $k = 1 : 9$ .

Дальнейшие действия для построения дроби  $H_{10}(u)$  такие же, как и при  $n = 4$ . Возьмем приближенные значения для точек альтернанса  $u_k$ ,  $k = \{12, 13, 14, 15, 18, 19, 20, 21\}$ . Находим  $x_{2k}$ ,  $k = 1 : 9$ , из системы линейных уравнений (23). Вычислим  $\mu_{10}$  по формуле (24),  $\mu_{10} = H_{10}\left(\frac{1}{\tau}\right)$ . Таким образом, будет построено начальное приближение для решения нелинейной системы (23)–(25). Далее следует воспользоваться процедурой `fsolve`.

**Замечание.** Согласно свойству 4 из разд. 7, точные значения для точек альтернанса  $u_k$ ,  $k = \{12, 14, 19, 21\}$ , известны. Они являются точками альтернанса при  $n = 5$ .

С учетом того, что (+)-точки и (-)-точки альтернанса чередуются, положим

$$u_{13} = \frac{1}{2}(u_{12} + u_{14}), \quad u_{15} = \frac{1}{2}(u_{14} + u_{16}), \quad (26)$$

где  $u_{16} = 1$ . Пользуясь свойством 1 из разд. 7, вычислим оставшиеся две точки альтернанса  $u_{18}$  и  $u_{20}$  по формулам

$$u_{18} = \frac{1}{\tau u_{15}}, \quad u_{20} = \frac{1}{\tau u_{13}}. \quad (27)$$

**Пример 4.** Пусть  $n = 10$ ,  $\tau = \frac{2}{3}$ ,  $\Delta = 0.0029$ . Ранее при  $n = 5$  были найдены четыре точки альтернанса:

$$u_{12} = 0.3946, \quad u_{14} = 0.8811, \quad u_{19} = 1.3618, \quad u_{21} = 3.0414.$$

В силу (26) и (27) имеем

$$\begin{aligned} u_{13} &= 0.6378, & u_{15} &= 0.9406, \\ u_{18} &= \frac{1}{\tau u_{15}} \approx 1.2758, & u_{20} &= \frac{1}{\tau u_{13}} \approx 1.8798. \end{aligned}$$

Решая систему (23), получаем

$$\begin{aligned} x_2 &= 0.3339, & x_4 &= -3.4519, & x_6 &= 12.768, & x_8 &= -19.891, & x_{10} &= 11.090, \\ x_{12} &= -1.9083, & x_{14} &= -1.8433, & x_{16} &= 12.437, & x_{18} &= -19.921. \end{aligned}$$

По формуле (24) находим  $\mu_{10} = 0.0807$ .

Построено начальное приближение. Для решения системы (23)–(25) подключим процедуру `fsolve`. Результаты вычислений следующие:

$$\begin{aligned} x_2 &= 0.1236, & x_4 &= -1.1095, & x_6 &= 3.6063, & x_8 &= -5.0095, & x_{10} &= 2.5191, \\ x_{12} &= -2.7404, & x_{14} &= 1.8622, & x_{16} &= 2.2808, & x_{18} &= -4.7841, \\ \mu_{10} &= 0.0059, \\ u_{12} &= 0.3946, & u_{13} &= 0.6965, & u_{14} &= 0.8811, & u_{15} &= 0.9729, \\ u_{18} &= 1.2333, & u_{19} &= 1.3618, & u_{20} &= 1.7229, & u_{21} &= 3.0414. \end{aligned}$$

Отметим, что начальное значение  $\mu_{10}$  уменьшилось более чем в 10 раз.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гхашиш М., Малозёмов В.Н.* Эквивалентность в задачах наилучшей дробно-рациональной аппроксимации // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 1992. Вып. 2. С. 3–8.
2. *Золотарёв Е.И.* Полное собрание сочинений. Вып. второй. Л.: Изд-во АН СССР, 1932. С. 1–59.
3. *Ахиезер Н.И.* Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970. С. 193–207.
4. *Гхашиш М., Малозёмов В.Н.* Инвариант одной фильтровой задачи // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 1992. Вып. 3. С. 89–91.
5. *Ахиезер Н.И.* Об одной задаче Е.И. Золотарёва // Известия АН СССР. Отдел физ.-матем. наук. 1929. Вып. 10. С. 919–931.