ЕЩЕ ОДИН БЫСТРЫЙ АЛГОРИТМ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ТОЧКИ НА СТАНДАРТНЫЙ СИМПЛЕКС*

В. Н. Малоземов — malv@math.spbu.ru

Г. Ш. Тамасян — g.tamasyan@spbu.ru

5 сентября 2013 г.

1°. Задача ортогонального проектирования точки $c = (c_1, \ldots, c_n)$ на стандартный симплекс $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$, определяемый условиями

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1; \quad x_i \geqslant 0,\ i \in 1:n,$$

ставится следующим образом:

$$Q(x) := \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - c_i)^2 \to \min_{x \in \Lambda}. \tag{1}$$

Решение этой задачи существует и единственно. Обозначим его x^*.

В докладе [1] был описан быстрый алгоритм нахождения x^*. Идея алгоритма основана на чисто алгебраическом анализе условий оптимальности в форме Куна-Таккера для задачи (1). Этот анализ был выполнен в работе [2], опубликованной в 1992 г.

Ранее, в 1986 г., появилась работа [3], в которой также предлагался конечный алгоритм решения задачи (1). Этот алгоритм имеет геометрический характер, что подчеркивается в недавней работе [4].

В данном докладе мы даем усовершенствованный вариант описания и обоснования алгоритма из [3] и приводим результаты численных экспериментов по сравнению двух быстрых алгоритмов решения задачи (1).

---

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: http://www.dha.spb.ru/

2°. Начнем с описания алгоритма, идея которого предложена в [3].

Напомним, что $c = (c_1, \dots, c_n)$. Обозначим $N = 1 : n$.

Предварительный шаг. В качестве начального приближения возьмем вектор $x^{(0)}$ с компонентами

$$x_i^{(0)} = c_i + \lambda, \quad i \in N, \tag{2}$$

где

$$\lambda = \frac{1}{n}\Bigl(1 - \sum_{i \in N} c_i\Bigr). \tag{3}$$

Общий шаг. Пусть имеется k-е приближение $x^{(k)}$. Если все компоненты вектора $x^{(k)}$ неотрицательны, то есть $x^{(k)} \geqslant \mathbb{O}$, то $x^{(k)}$ — искомая проекция точки c на стандартный симплекс Λ. Процесс заканчивается.

В противном случае, когда у вектора $x^{(k)}$ существует хотя бы одна отрицательная компонента, формируем индексное множество

$$I_k = \{i \in N \mid x_i^{(k)} \leqslant 0\}$$

и вычисляем

$$\lambda^{(k)} = \frac{1}{n_k}\Bigl(1 - \sum_{i \in N \setminus I_k} x_i^{(k)}\Bigr), \tag{4}$$

где $n_k = |N \setminus I_k|$. В качестве очередного приближения берем вектор $x^{(k+1)}$ с компонентами

$$x_i^{(k+1)} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \in I_k; \\ x_i^{(k)} + \lambda^{(k)} & \text{при } i \in N \setminus I_k. \end{cases} \tag{5}$$

После этого возвращаемся к общему шагу.

Если у вектора $x^{(k+1)}$ имеется отрицательная компонента, то будет формироваться индексное множество $I_{k+1} = \{i \in N \mid x_i^{(k+1)} \leqslant 0\}$. Из определения $x^{(k+1)}$ следует, что множество I_{k+1} содержит I_k и те индексы $i \in N \setminus I_k$, на которых $x_i^{(k+1)} < 0$. Возможно, найдутся индексы $i \in N \setminus I_k$, на которых $x_i^{(k+1)} = 0$. Они тоже войдут в I_{k+1}.

Понятно, что I_k является собственным подмножеством множества I_{k+1}. Значит, по ходу процесса индексные множества I_k строго расширяются. Это гарантирует конечность процесса.

Остается проверить оптимальность точки $x^{(k)}$ при выполнении условия $x^{(k)} \geqslant \mathbb{O}$. Это мы сделаем позже, а пока приведем пример.

ПРИМЕР 1. Возьмем точку $c = (-1,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ \frac{2}{3})$ в $\mathbb{R}^6$ и найдем её проекцию на стандартный симплекс $\Lambda \subset \mathbb{R}^6$.

Предварительный шаг. Вычисляем $\lambda = \frac{1}{6}\bigl(1 + \frac{1}{3}\bigr) = \frac{2}{9}$. Имеем

$$x^{(0)} = \bigl(-\tfrac{7}{9},\ \tfrac{11}{9},\ \tfrac{2}{9},\ -\tfrac{7}{9},\ \tfrac{2}{9},\ \tfrac{8}{9}\bigr).$$

Первый шаг. Формируем множество $I_0 = \{1,\ 4\}$ и вычисляем

$$\lambda^{(0)} = \tfrac{1}{4}\bigl(1 - \tfrac{23}{9}\bigr) = -\tfrac{7}{18}.$$

Имеем

$$x^{(1)} = \bigl(0,\ \tfrac{15}{18},\ -\tfrac{3}{18},\ 0,\ -\tfrac{3}{18},\ \tfrac{9}{18}\bigr).$$

Второй шаг. Формируем множество $I_1 = \{1,\ 3,\ 4,\ 5\}$ и вычисляем

$$\lambda^{(1)} = \tfrac{1}{2}\bigl(1 - \tfrac{24}{18}\bigr) = -\tfrac{1}{6}.$$

Имеем

$$x^{(2)} = \bigl(0,\ \tfrac{2}{3},\ 0,\ 0,\ 0,\ \tfrac{1}{3}\bigr).$$

Выполняется условие $x^{(2)} \geqslant \mathbb{O}$, поэтому $x^{(2)}$ — искомая проекция.

3°. В общем случае строится конечная последовательность $x^{(0)},\ x^{(1)}, \ldots$ точек из $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{i \in N} x_i^{(k)} = 1, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{6}$$

Равенство (6) следует из (2) и (5). Вычисления заканчиваются, когда у очередной точки $x^{(k)}$ все компоненты будут неотрицательными.

ТЕОРЕМА. *Если $x^{(k)} \geqslant \mathbb{O}$, то $x^{(k)} = x^*$.*

Отдельно рассмотрим случай $k = 0$.

ЛЕММА 1. *Если $x^{(0)} \geqslant \mathbb{O}$, то $x^{(0)} = x^*$.*

Доказательство. Запишем критерий оптимальности для задачи (1) (см. [1]):

$$\begin{gathered} x_i - c_i = \lambda + u_i, \quad i \in N; \\ x_i u_i = 0, \quad u_i \geqslant 0, \quad x_i \geqslant 0, \quad i \in N; \\ \sum_{i \in N} x_i = 1. \end{gathered} \tag{7}$$

Согласно (6) и условию леммы имеем $x^{(0)} \in \Lambda$. Нетрудно проверить, что условия (7) выполняются при $x = x^{(0)}$, $u_i \equiv 0$ и λ вида (3). Значит, $x^{(0)} = x^*$.

Лемма доказана. $\square$

Нам потребуется еще одно предварительное утверждение. Обозначим проекцию точки c на симплекс Λ через $\mathrm{Pr}_\Lambda(c)$.

ЛЕММА 2. *Справедливо равенство*

$$\mathrm{Pr}_\Lambda(x^{(0)}) = \mathrm{Pr}_\Lambda(c).$$

Доказательство. Пусть $y^{(0)} = \mathrm{Pr}_\Lambda(x^{(0)})$. По критерию оптимальности выполняются соотношения

$$\begin{gathered} y_i^{(0)} - x_i^{(0)} = \lambda^{(0)} + u_i^{(0)}, \quad i \in N; \\ y_i^{(0)} u_i^{(0)} = 0, \quad u_i^{(0)} \geqslant 0, \quad y_i^{(0)} \geqslant 0, \quad i \in N; \\ \sum_{i \in N} y_i^{(0)} = 1. \end{gathered}$$

Учитывая (2), получаем

$$\begin{gathered} y_i^{(0)} - c_i = \big(\lambda + \lambda^{(0)}\big) + u_i^{(0)}, \quad i \in N; \\ y_i^{(0)} u_i^{(0)} = 0, \quad u_i^{(0)} \geqslant 0, \quad y_i^{(0)} \geqslant 0, \quad i \in N; \\ \sum_{i \in N} y_i^{(0)} = 1. \end{gathered}$$

Значит, $y^{(0)} = \mathrm{Pr}_\Lambda(c)$.

Лемма доказана. $\square$

4°. Переходим к доказательству теоремы. При $k = 0$ справедливость теоремы установлена в лемме 1.

Пусть $x^{(k+1)} \geqslant \mathbb{O}$ при некотором целом неотрицательном k. Согласно (6), $x^{(k+1)} \in \Lambda$. Перепишем формулу (5) в виде

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \lambda^{(k)} + u_i^{(k)}, \quad i \in N, \tag{8}$$

где

$$u_i^{(k)} = \begin{cases} -x_i^{(k)} - \lambda^{(k)} & \text{при } i \in I_k; \\ 0 & \text{при } i \in N \setminus I_k. \end{cases} \tag{9}$$

По определению I_k имеем $x_i^{(k)} \leqslant 0$ при $i \in I_k$, причем одна из этих компонент строго отрицательна. Учитывая определение $\lambda^{(k)}$ и формулы (6) и (9), получаем

$$\lambda^{(k)} = \frac{1}{n_k} \sum_{i \in I_k} x_i^{(k)} < 0;$$

$$u_i^{(k)} > 0 \text{ при } i \in I_k, \qquad u_i^{(k)} = 0 \text{ при } i \in N \setminus I_k. \tag{10}$$

Формулы, аналогичные (8)–(10), справедливы и при меньших k, точнее

$$x_i^{(k-\nu+1)} = x_i^{(k-\nu)} + \lambda^{(k-\nu)} + u_i^{(k-\nu)}, \quad i \in N; \tag{11}$$

$$u_i^{(k-\nu)} = \begin{cases} -x_i^{(k-\nu)} - \lambda^{(k-\nu)} & \text{при } i \in I_{k-\nu}; \\ 0 & \text{при } i \in N \setminus I_{k-\nu}; \end{cases}$$

$$u_i^{(k-\nu)} > 0 \ \text{ при } \ i \in I_{k-\nu}, \qquad u_i^{(k-\nu)} = 0 \ \text{ при } \ i \in N \setminus I_{k-\nu}. \tag{12}$$

Здесь $\nu = 0, 1, \ldots, k$. Как отмечалось, $I_{k-\nu} \subset I_k$, поэтому $N \setminus I_k \subset N \setminus I_{k-\nu}$. Как следствие,

$$u_i^{(k-\nu)} = 0 \ \text{ при } \ i \in N \setminus I_k \ \text{ и всех } \ \nu = 0, 1, \ldots, k. \tag{13}$$

На основании (5) и (13) приходим к соотношению

$$x_i^{(k+1)} u_i^{(k-\nu)} = 0 \ \text{ при } \ i \in N \ \text{ и всех } \ \nu = 0, 1, \ldots, k. \tag{14}$$

Вернемся к формуле (8). Входящий в нее вектор $x^{(k)}$ согласно (11) можно выразить через $x^{(k-1)}$. В свою очередь $x^{(k-1)}$ можно выразить через $x^{(k-2)}$ и т. д. Наконец, $x^{(1)}$ можно выразить через $x^{(0)}$. В результате получим

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(0)} + \sum_{\nu=0}^{k} \lambda^{(k-\nu)} + \sum_{\nu=0}^{k} u_i^{(k-\nu)}, \quad i \in N.$$

Обозначим

$$\lambda^* = \sum_{\nu=0}^{k} \lambda^{(k-\nu)}, \quad u_i^* = \sum_{\nu=0}^{k} u_i^{(k-\nu)}$$

и перепишем последнюю формулу в виде

$$x_i^{(k+1)} - x_i^{(0)} = \lambda^* + u_i^*, \quad i \in N.$$

Отметим, что в силу (14)

$$x_i^{(k+1)} u_i^* = 0 \quad \forall\, i \in N.$$

В силу (12), $u_i^* \geqslant 0$ при всех $i \in N$ и по построению $x^{(k+1)} \in \Lambda$. Таким образом, выполнены все условия критерия оптимальности (7) при $x = x^{(k+1)}$, $c = x^{(0)}$, $\lambda = \lambda^*$ и $u = u^*$. Это гарантирует, что $x^{(k+1)} = \mathrm{Pr}_\Lambda(x^{(0)})$.

По лемме 2, $\mathrm{Pr}_\Lambda(x^{(0)}) = \mathrm{Pr}_\Lambda(c)$. Значит, $x^{(k+1)} = \mathrm{Pr}_\Lambda(c)$.

Теорема доказана. $\square$

5°. В докладе [1] рассматривался другой метод проектирования точки $c = (c_1, \ldots, c_n)$ на стандартный симплекс. Напомним его описание.

1) Меняем знаки у компонент c_j точки c и числа $\{-c_j\}$ упорядочиваем по неубыванию. Получаем последовательность $a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$.

2) Проводим последовательные вычисления по рекуррентной формуле
$$\begin{gathered} \varphi_1 = 0, \\ \varphi_{k+1} = \varphi_k + k(a_{k+1} - a_k), \quad k = 1, \ldots, n-1, \end{gathered} \tag{15}$$
пока не встретим индекс k_0, на котором
$$\varphi_{k_0} < 1 \leqslant \varphi_{k_0+1}.$$
Если и $\varphi_n < 1$, то полагаем $k_0 = n$.

3) Вычисляем λ^* по формуле
$$\lambda^* = a_{k_0} + \tfrac{1}{k_0}(1 - \varphi_{k_0}). \tag{16}$$
Компоненты x_i^* проекции точки c на стандартный симплекс имеют вид
$$x_i^* = (\lambda^* + c_i)_+, \quad i \in 1:n, \tag{17}$$
где $(u)_+ = \max\{0, u\}$.

Найдем с помощью этого метода проекцию на стандартный симплекс точки c из разобранного в п. 2° примера 1. Напомним, что
$$c = (-1,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ \tfrac{2}{3}).$$
Имеем
$$-c = (1,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -\tfrac{2}{3}), \quad a = (-1,\ -\tfrac{2}{3},\ 0,\ 0,\ 1,\ 1).$$
Составим таблицу

k	1	2	3	4	5	6
a_k	-1	$-\frac{2}{3}$	0	0	1	1

Проведем вычисления по формуле (15):
$$\begin{gathered} \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = a_2 - a_1 = \tfrac{1}{3}, \\ \varphi_3 = \varphi_2 + 2(a_3 - a_2) = \tfrac{5}{3} > 1. \end{gathered}$$
Значит, $k_0 = 2$. На основании (16) и (17) получаем
$$\begin{gathered} \lambda^* = a_2 + \tfrac{1}{2}(1 - \varphi_2) = -\tfrac{1}{3}, \\ x^* = (0,\ \tfrac{2}{3},\ 0,\ 0,\ 0,\ \tfrac{1}{3}). \end{gathered}$$

Пришли к тому же результату, что и в п. 2°.

6°. С точки зрения трудоемкости второй алгоритм выглядит предпочтительней, поскольку в его основе лежит рекуррентное соотношение (15) для скалярных величин, в то время как в основе первого алгоритма лежит рекуррентное соотношение (5) для векторных величин.

Максимальная трудоемкость второго алгоритма достигается тогда, когда $\varphi_n < 1$. Можно описать все такие ситуации. Возьмем произвольную последовательность

$$0 = \varphi_1 \leqslant \varphi_2 \leqslant \ldots \leqslant \varphi_n < 1$$

и любое число a_n. Рекуррентное соотношение (15) обратимо. Положим

$$a_k = a_{k+1} - \tfrac{1}{k}(\varphi_{k+1} - \varphi_k), \quad k = n-1, n-2, \ldots, 1. \tag{18}$$

В качестве координат проектируемой точки c можно взять числа $\{-a_k\}$ в любом порядке.

ПРИМЕР 2. При $n = 4$ рассмотрим последовательность

$$\varphi_1 = 0, \;\; \varphi_2 = 0, \;\; \varphi_3 = \tfrac{2}{9}, \;\; \varphi_4 = \tfrac{5}{9},$$

и пусть $a_4 = \frac{2}{9}$. Согласно (18) имеем

$$\begin{aligned} &a_3 = a_4 - \tfrac{1}{3}(\varphi_4 - \varphi_3) = \tfrac{1}{9}, \\ &a_2 = a_3 - \tfrac{1}{2}(\varphi_3 - \varphi_2) = 0, \\ &a_1 = a_2 - \varphi_2 = 0. \end{aligned}$$

В качестве проектируемой возьмем следующую точку:

$$c = (-\tfrac{2}{9}, \, 0, \, 0, \, -\tfrac{1}{9}). \tag{19}$$

С помощью второго алгоритма найдем ее проекцию на стандартный симплекс. Получим

$$x^* = (\tfrac{1}{9}, \, \tfrac{1}{3}, \, \tfrac{1}{3}, \, \tfrac{2}{9}).$$

В общем случае второй алгоритм требует одну перестановку элементов массива длиной n и не более $4n-2$ арифметических операций, где n – размерность пространства.

7°. Максимальная трудоемкость первого алгоритма достигается тогда, когда у всех членов последовательности $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots$ имеется только по одной отрицательной компоненте. В этом случае $x^{(n-1)}$ совпадает с одним из ортов пространства $\mathbb{R}^n$.

Приведем пример построения такой последовательности.

ПРИМЕР 3. Пусть $n = 4$ и $x^{(3)} = (0,\,0,\,0,\,1)$. Это возможно, когда $x^{(2)} = (0,\,0,\,x_3^{(2)},\,x_4^{(2)})$, где

$$x_3^{(2)} < 0, \quad x_4^{(2)} > 0, \quad x_3^{(2)} + x_4^{(2)} = 1. \tag{20}$$

Действительно, по алгоритму

$$\lambda^{(2)} = 1 - x_4^{(2)}, \quad x_4^{(3)} = x_4^{(2)} + \lambda^{(2)} = 1.$$

Условиям (20) удовлетворяют, например, числа $x_3^{(2)} = -1$, $x_4^{(2)} = 2$. Таким образом,

$$x^{(2)} = (0,\,0,\,-1,\,2).$$

Вектор $x^{(1)} = (0,\,x_2^{(1)},\,x_3^{(1)},\,x_4^{(1)})$ должен удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{gathered} x_2^{(1)} < 0, \quad x_3^{(1)} > 0, \quad x_4^{(1)} > 0, \quad x_2^{(1)} + x_3^{(1)} + x_4^{(1)} = 1, \\ x_3^{(1)} + \lambda^{(1)} = -1, \quad x_4^{(1)} + \lambda^{(1)} = 2, \end{gathered} \tag{21}$$

где $\lambda^{(1)} = \frac{1}{2}(1 - x_3^{(1)} - x_4^{(1)})$. В частности,

$$\begin{aligned} x_2^{(1)} + x_3^{(1)} + x_4^{(1)} &= 1, \\ \tfrac{1}{2}x_3^{(1)} - \tfrac{1}{2}x_4^{(1)} &= -\tfrac{3}{2}, \\ -\tfrac{1}{2}x_3^{(1)} + \tfrac{1}{2}x_4^{(1)} &= \tfrac{3}{2}, \end{aligned}$$

что равносильно системе уравнений

$$\begin{aligned} x_2^{(1)} + x_3^{(1)} + x_4^{(1)} &= 1, \\ x_3^{(1)} - x_4^{(1)} &= -3. \end{aligned}$$

Этой системе (и остальным условиям (21)) удовлетворяют, например, числа $x_3^{(1)} = 1$, $x_4^{(1)} = 4$, $x_2^{(1)} = -4$. Положим

$$x^{(1)} = (0,\,-4,\,1,\,4).$$

Запишем условия для компонент вектора $x^{(0)} = (x_1^{(0)},\,x_2^{(0)},\,x_3^{(0)},\,x_4^{(0)})$:

$$\begin{gathered} x_1^{(0)} < 0, \quad x_2^{(0)} > 0, \quad x_3^{(0)} > 0, \quad x_4^{(0)} > 0, \\ x_1^{(0)} + x_2^{(0)} + x_3^{(0)} + x_4^{(0)} = 1, \\ x_2^{(0)} + \lambda^{(0)} = -4, \quad x_3^{(0)} + \lambda^{(0)} = 1, \quad x_4^{(0)} + \lambda^{(0)} = 4, \end{gathered} \tag{22}$$

где $\lambda^{(0)} = \frac{1}{3}(1 - x_2^{(0)} - x_3^{(0)} - x_4^{(0)})$. Приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned}
x_1^{(0)} + x_2^{(0)} + x_3^{(0)} + x_4^{(0)} &= 1, \\
\tfrac{2}{3}x_2^{(0)} - \tfrac{1}{3}x_3^{(0)} - \tfrac{1}{3}x_4^{(0)} &= -\tfrac{13}{3}, \\
-\tfrac{1}{3}x_2^{(0)} + \tfrac{2}{3}x_3^{(0)} - \tfrac{1}{3}x_4^{(0)} &= \tfrac{2}{3}, \\
-\tfrac{1}{3}x_2^{(0)} - \tfrac{1}{3}x_3^{(0)} + \tfrac{2}{3}x_4^{(0)} &= \tfrac{11}{3},
\end{aligned}$$

которая преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
x_1^{(0)} + x_2^{(0)} + x_3^{(0)} + x_4^{(0)} &= 1, \\
(x_2^{(0)} - x_3^{(0)}) + (x_2^{(0)} - x_4^{(0)}) &= -13, \\
-(x_2^{(0)} - x_3^{(0)}) + (x_3^{(0)} - x_4^{(0)}) &= 2.
\end{aligned}$$

Обозначим $y = x_2^{(0)} - x_3^{(0)}$, $z = x_3^{(0)} - x_4^{(0)}$. Тогда $x_2^{(0)} - x_4^{(0)} = y + z$ и

$$\begin{aligned}
2y + z &= -13, \\
-y + z &= 2.
\end{aligned}$$

Получаем $y = -5$, $z = -3$, так что

$$x_2^{(0)} - x_3^{(0)} = -5, \quad x_3^{(0)} - x_4^{(0)} = -3.$$

Положим $x_2^{(0)} = 1$. Всем условиям (22) удовлетворяют числа

$$x_2^{(0)} = 1, \quad x_3^{(0)} = 6, \quad x_4^{(0)} = 9, \quad x_1^{(0)} = -15.$$

Значит,

$$x^{(0)} = (-15,\, 1,\, 6,\, 9).$$

В качестве компонент проектируемой точки $c = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ можно взять числа $c_i = x_i^{(0)} + \lambda$, $i \in 1 : 4$, где λ — произвольное вещественное число. При $\lambda = 16$ получим

$$c = (1,\, 17,\, 22,\, 25). \tag{23}$$

Нетрудно проверить, что при проектировании данной точки на стандартный симплекс первый алгоритм будет генерировать точки $x^{(0)}$, $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$. У точки $x^{(3)} = (0, 0, 0, 1)$ все компоненты неотрицательные. Это гарантирует, что $x^{(3)} = \mathrm{Pr}_\Lambda(c)$.

В общем случае первый алгоритм требует не более $n^2 + 2n - 1$ арифметических операций.

8°. В примере 2 при проектировании точки c вида (19) на стандартный симплекс с помощью второго алгоритма потребовался максимально возможный объем вычислений. Воспользуемся для той же цели первым алгоритмом. Получим

$$\lambda = \frac{1}{4}\left(1 - \sum_{i=1}^{n} c_i\right) = \frac{1}{3},$$
$$x^{(0)} = \left(\tfrac{1}{9},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{2}{9}\right) = x^*,$$

то есть уже на предварительном шаге найдена искомая проекция.

В примере 3 при проектировании точки c вида (23) на стандартный симплекс с помощью первого алгоритма также потребовался максимально возможны объем вычислений. Воспользуемся вторым алгоритмом. Получим

$$a = (-25,\ -22,\ -17,\ -1),$$
$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = a_2 - a_1 = 3 > 1,$$

так что $k_0 = 1$. Далее,

$$\lambda^* = a_1 + (1 - \varphi_1) = -24,$$
$$x^* = (0,\ 0,\ 0,\ 1).$$

Второй алгоритм приводит к требуемой проекции уже при $k_0 = 1$.

Таким образом, примеры показывают, что в случае, когда один из двух алгоритмов проектирования имеет максимальную трудоемкость, у второго алгоритма трудоемкость минимальна.

Мы провели массовые вычисления по сравнению эффективности двух алгоритмов проектирования точки на стандартный симплекс. Брались $m = 10000$ точек в n-мерном евклидовом пространстве при n, равном 100, 500, 1000 и 5000. Координаты точек формировались с помощью функции генерирования чисел по непрерывному равномерному распределению на интервале $(-m, m)$. Вычисления проводились на персональном компьютере с четырехъядерным процессором Intel Core 2 Quad с тактовой частотой 2.50 ГГц и оперативной памятью объемом 4 Гб.

В приводимых ниже таблицах указано время проектирования T (в сек.) всех $m = 10000$ точек в пространствах различных размерностей n.

Таблица 1 (первый алгоритм):

n	100	500	1000	5000
T	0.47	1.32	2.57	12.35

Таблица 2 (второй алгоритм):

n	100	500	1000	5000
T	0.34	0.96	1.75	8.93

ЛИТЕРАТУРА

1. Малоземов В. Н. *Проектирование точки на подпространство и на стандартный симплекс* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 28 февраля 2013 г.
(`http://dha.spb.ru/reps13.shtml#0228`)

2. Малоземов В. Н., Певный А. Б. *Быстрый алгоритм проектирования точки на симплекс* // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 1992. Вып. 1 (№ 1). С. 112–113.

3. Michelot C. *A finite algorithm for finding the projection of a point onto the canonical simplex of* $\mathbb{R}^n$ // JOTA. 1986. Vol. 50. No 1. P. 195—200.

4. Causa A., Raciti F. *A purely geometric approach to the problem of computing the projection of a point on a simplex* //JOTA. 2013. Vol. 156. No 2. P. 524—528.