NONSMOOTH ANALYSIS ON THE PLANE. Part II

V. F. DEMYANOV

One of the tools used in non-smooth analysis (the quasidifferential) is introduced and discussed. Some elements of quasidifferential calculus – a generalization of the classical differential calculus – are described. Necessary and sufficient conditions for a minimum and a maximum are formulated. Numerical examples illustrate the theory.

Вводится и обсуждается понятие квазидифференциала – одного из понятий негладкого анализа. Описываются элементы квазидифференциального исчисления, являющегося обобщением классического дифференциального исчисления. Формулируются необходимые и достаточные условия минимума и максимума. Приводятся численные примеры.

НЕГЛАДКИЙ АНАЛИЗ НА ПЛОСКОСТИ. Часть II

В. Ф. ДЕМЬЯНОВ

Санкт-Петербургский государственный университет

ВВЕДЕНИЕ

В первой части статьи [1] мы выяснили, что в случае дифференцируемых по направлениям функций производная по направлениям выполняет роль, которую в гладком случае играл градиент. На примере функций максимума мы видели, что производная по направлениям имеет вид

$$f'(z, g) = \max_{\upsilon \in \underline{\partial} f(z)} (\upsilon, g), \tag{1}$$

где $\underline{\partial} f(z)$ – выпуклый многоугольник (в общем случае выпуклое множество). Множество $\underline{\partial} f(z)$ называется субдифференциалом функции f в точке z. Задача нахождения и хранения субдифференциала сводится к разысканию (по определенным правилам) вершин многоугольника. При этом необходимые условия максимума и минимума формулируются в терминах $\underline{\partial} f(z)$. Оказывается, что производная по направлениям имеет вид (1) не только в случае функций максимума, но и для многих других функций. Функция, у которой производная по направлениям имеет вид (1), называется субдифференцируемой. К сожалению, произведение, частное и разность субдифференцируемых функций уже не являются субдифференцируемыми функциями.

Рассмотрим функцию минимума. Пусть $f_i(x, y)$, $i \in I = 1, 2, ..., N$, – непрерывно дифференцируемые функции. Положим

$$f(z) = f(x, y) = \min_{i \in I} f_i(z). \tag{2}$$

Как и в случае функции максимума, получим, что f является дифференцируемой по направлениям, причем

$$f'(z, g) = \min_{i \in Q(z)} (f'(z), g),$$

где $Q(z) = \{i \in I |\ f_i'(z) = f(z)\}$. Нетрудно видеть, что

$$f'(z, g) = \min_{\upsilon \in \bar{\partial} f(z)} (\upsilon, g), \tag{3}$$

где $\bar{\partial} f(z) = \mathrm{co}\{f_i'(z) |\ i \in Q(z)\}$. Напомним, что co$A$ обозначает выпуклую оболочку, натянутую на множество A, следовательно, $\bar{\partial} f(z)$ – выпуклый многоугольник, натянутый на точки $f_i'(z)$. Из (3) и необходимых условий минимума и максимума дифференцируемых по направлениям функций вытекают необходимые условия минимума и максимума функции (2):

Для того чтобы функция (2) достигала своего наименьшего значения в точке z^*, необходимо, чтобы

$$f'_i(z^*) = 0_2 \qquad \forall i \in Q(z). \tag{4}$$

Для того чтобы функция (2) достигала своего наибольшего значения в точке z^{**}, необходимо, чтобы

$$0_2 \in \overline{\partial} f(z^{**}). \tag{5}$$

Изучение суммы функции максимума и функции минимума привело к понятию квазидифференцируемой функции [2].

1. КВАЗИДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ

Функция $f(z) = f(x, y)$ называется квазидифференцируемой в точке z, если функция f дифференцируема в точке z по всем направлениям и если существуют выпуклые ограниченные замкнутые множества $\underline{\partial} f(z)$ и $\overline{\partial} f(z) \subset R^2$ (для простоты будем предполагать, что $\underline{\partial} f(z)$ и $\overline{\partial} f(z)$ – выпуклые многоугольники), такие, что

$$f'(z, g) = \max_{\upsilon \in \underline{\partial} f(z)} (\upsilon, g) + \min_{w \in \overline{\partial} f(z)} (w, g). \tag{6}$$

Пара множеств $Df(z) = [\underline{\partial} f(z), \overline{\partial} f(z)]$ называется квазидифференциалом функции f в точке z.

Оказывается, что множество квазидифференцируемых функций является достаточно богатым.

Из (6) и необходимых условий минимума и максимума для дифференцируемых по направлениям функций можно получить необходимые условия для квазидифференцируемых функций.

Для того чтобы квазидифференцируемая функция f достигала своего наименьшего значения в точке z^*, необходимо, чтобы

$$-\overline{\partial} f(z^*) \subset \underline{\partial} f(z^*). \tag{7}$$

Для того чтобы функция f достигала своего наибольшего значения в точке z^{**}, необходимо, чтобы

$$-\underline{\partial} f(z^{**}) \subset \overline{\partial} f(z^{**}). \tag{8}$$

Точка z^*, удовлетворяющая (7), называется inf-стационарной точкой функции f, а точка z^{**}, удовлетворяющая (8), называется sup-стационарной.

Для негладких функций можно сформулировать и достаточные условия минимума и максимума.

Если функция f липшицева в окрестности точки z^* (мы не обсуждаем здесь понятие липшицевости, это естественное обобщение понятия непрерывности) и при этом оказалось, что

$$-\overline{\partial} f(z^*) \subset \operatorname{int} \underline{\partial} f(z^*) \tag{9}$$

(то есть множество $-\overline{\partial} f(z^*)$ находится строго внутри множества $\underline{\partial} f(z^*)$), то точка z^* является точкой строгого локального минимума функции f, то есть найдется такое $\varepsilon > 0$, что

$$f(z) > f(z^*) \qquad \forall z \neq z^*, \qquad \|z - z^*\| \leq \varepsilon.$$

Аналогично, если функция f липшицева в окрестности точки z^* и при этом

$$-\underline{\partial} f(z^{**}) \subset \operatorname{int} \overline{\partial} f(z^{**}), \tag{10}$$

то точка z^{**} является точкой строгого локального максимума, то есть найдется такое $\varepsilon > 0$, что

$$f(z) < f(z^*) \qquad \forall z \neq z^{**}, \qquad \|z - z^{**}\| \leq \varepsilon.$$

В гладком случае с помощью градиента никаких достаточных условий сформулировать мы не могли, условия (9) и (10) справедливы лишь для негладких функций.

Гладкая функция тоже является квазидифференцируемой. Действительно, если f – дифференцируемая функция, то ее производная по направлению имеет вид

$$f'(z, g) = (f'(z), g).$$

Ясно, что если взять

$$\underline{\partial} f(z) = \{f'(z)\}, \qquad \overline{\partial} f(z) = \{0_2\}, \tag{11}$$

то $f'(z)$ будет представлено в виде (6). Таким образом, гладкая функция – это такая квазидифференцируемая функция, у которой в качестве квазидифференциала можно взять пару множеств, каждое из которых содержит по одной точке. Так как одна точка не может быть строго внутри другой точки, то в гладком случае соотношения (9) и (10) невозможны.

С помощью квазидифференциала мы можем не только проверить необходимые и достаточные условия минимума и максимума, но также и найти направления наискорейшего спуска и подъема. Пусть в точке z_0 (рис. 1)

$$\underline{\partial} f(z_0) = \operatorname{co}\{a_i \mid i \in 1, 2, \dots, m\},$$

$$-\overline{\partial} f(z_0) = \operatorname{co}\{\bar{b}_j \mid j \in 1, 2, \dots, n\}, \qquad \text{где } m, n \geq 1.$$

Для каждого $\bar{b}_j$ найдем ближайшую точку многоугольника $\underline{\partial} f$, то есть найдем

$$\min_{\upsilon \in \underline{\partial} f(z_0)} \|\bar{b}_j - \upsilon\| = c_j. \tag{12}$$

Если $c_j = 0 \quad \forall j \in 1, 2, \dots, n$, то это значит, что $\bar{b}_j \in \underline{\partial} f(z_0) \quad \forall j$, то есть $-\overline{\partial} f(z_0) \subset \underline{\partial} f(z_0)$, и точка z_0 является inf-стационарной. Если при этом все вершины лежат строго внутри многоугольника $\underline{\partial} f(z_0)$, то точка z_0 является точкой строгого локального минимума.

Если же

$$\max_{j \in 1, 2, \dots, n} c_j = c_{j_0} = \|\bar{b}_{j_0} - \upsilon_{j_0}\| > 0, \tag{13}$$

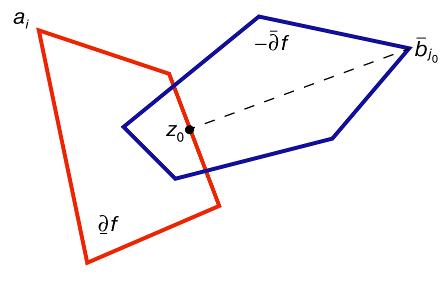

Рис. 1

то направление $g_0 = (\bar{b}_{j_0} - \upsilon_{j_0})/(c_{j_0})$ является направлением наискорейшего спуска функции f в точке z_0.

Конечно, может оказаться, что существует несколько j_0, удовлетворяющих (13), тогда каждому из этих j_0 соответствует свое направление наискорейшего спуска.

Аналогично для проверки выполнения необходимого условия максимума для каждого a_i найдем

$$\min_{w \in [-\bar{\partial} f(z_0)]} \|a_i - w\| = d_i. \tag{14}$$

Если $d_i = 0 \ \forall i \in 1, 2, ..., m$, то $a_i \in [-\bar{\partial} f(z_0)] \quad \forall i$, то есть $\underline{\partial} f(z_0) \subset [-\bar{\partial} f(z_0)]$, или, что то же самое, $-\underline{\partial} f(z_0) \subset \bar{\partial} f(z_0)$, и точка z_0 является sup-стационарной. Если при этом оказалось, что все вершины a_i лежат строго внутри многоугольника $-\bar{\partial} f(z_0)$, то точка z_0 является точкой строгого локального максимума.

Если же

$$\max_{i \in 1, 2, ..., m} d_i = d_{i_0} = \|a_{i_0} - w_{i_0}\| > 0, \tag{15}$$

то направление $g^0 = (a_{i_0} - w_{i_0})/d_{i_0}$ является направлением наискорейшего подъема функции f в точке z_0. Если существует несколько i_0, удовлетворяющих (15), то каждому из них соответствует свое направление наискорейшего подъема.

Замечание 1. Выше требуется уметь решать задачи (12) и (14) (то есть находить точку многоугольника, ближайшую к заданной точке). Эти задачи на плоскости не представляют трудностей.

2. ИСЧИСЛЕНИЕ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛОВ

Для практического применения изложенной в разделе 1 теории надо уметь вычислять вершины многоугольников $\underline{\partial} f(z)$ и $\bar{\partial} f(z)$. К счастью, для этого имеется хорошо разработанное квазидифференциальное исчисление, то есть исчисление квазидифференциалов, к изложению которого мы и переходим.

Нам понадобится ввести операции сложения пар многоугольников и умножение на вещественное число.

Пусть $D_1 = [A_1, B_1]$, $D_2 = [A_2, B_2]$ – пары выпуклых многоугольников, где A_1, A_2, B_1 и B_2 – выпуклые многоугольники. Положим

$$D_1 + D_2 = [A, B],$$

где $A = A_1 + A_2$, $B = B_1 + B_2$. Здесь, как обычно,

$$C_1 + C_2 = \{c = c_1 + c_2 | \ c_1 \in C_1, c_2 \in C_2\}.$$

Если

$$C_1 = \text{co}\{c_{1i} | \ i \in I\}, \qquad C_2 = \text{co}\{c_{2j} | \ j \in J\},$$

то

$$C_1 + C_2 = \text{co}\{c = c_{1i} + c_{2j} | \ i \in I, j \in J\}.$$

Пусть $D = [A, B]$, λ – вещественное число. Положим

$$\lambda D = \begin{cases} [\lambda A, \ \ \lambda B], & \lambda \geq 0, \\ [\lambda B, \ \ \lambda A], & \lambda < 0. \end{cases}$$

Если

$$A = \text{co}\{a_i | \ i \in A\}, \qquad B = \text{co}\{b_j | \ j \in J\},$$

то

$$\lambda D = \begin{cases} [\text{co}\{\lambda a_i | \ i \in I\}, \ \text{co}\{\lambda b_j | \ j \in J\}], & \lambda \geq 0, \\ [\text{co}\{\lambda b_j | \ j \in J\}, \ \text{co}\{\lambda a_i | \ i \in I\}], & \lambda < 0. \end{cases}$$

Теперь мы можем сформулировать основные формулы квазидифференциального исчисления.

1. Если $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ – квазидифференцируемые в точке z_0 функции и $D\varphi_1(z_0)$ и $D\varphi_2(z_0)$ – их квазидифференциалы в этой точке, то и функции

$$f_1(z) = \lambda_1\varphi_1(z) + \lambda_2\varphi_2(z), \qquad f_2(z) = \varphi_1(z)\varphi_2(z),$$

$$f_3(z) = \frac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)} \qquad (\text{если } \varphi_2(z_0) \neq 0)$$

тоже являются квазидифференцируемыми в точке z_0, при этом

$$Df_1(z_0) = \lambda_1 D\varphi_1(z_0) + \lambda_2 D\varphi_2(z_0), \tag{16}$$

$$Df_2(z_0) = \varphi_2(z_0) D\varphi_1(z_0) + \varphi_1(z_0) D\varphi_2(z_0), \tag{17}$$

$$Df_3(z_0) =$$

$$= -\frac{1}{\varphi_2^2(z_0)}[\varphi_1(z_0) D\varphi_2(z_0) - \varphi_2(z_0) D\varphi_1(z_0)]. \tag{18}$$

Формулы (16)–(18) представляют собой обобщение формул дифференциального исчисления (если в (16)–(18) операцию $Df(z_0)$ заменить операцией f', то получим формулы классического математического анализа).

Следующие две формулы не имеют аналога в гладком случае.

2. Если $\varphi_i(z)$, $i \in I$, – квазидифференцируемые в точке z_0 функции, $I = 1, 2, ... n$, $D\varphi_i(z_0)$ – их квазидифференциалы в этой точке, то и функции

$$f_1(z) = \max_{i \in I} \varphi_i(z), \qquad f_2(z) = \min_{i \in I} \varphi_i(z)$$

тоже являются квазидифференцируемыми в точке z_0, при этом

$$Df_1(z_0) = [\underline{\partial} f_1(z_0), \ \ \bar{\partial} f_1(z_0)], \tag{19}$$

$$Df_2(z_0) = [\underline{\partial} f_2(z_0), \ \ \bar{\partial} f_2(z_0)], \tag{20}$$

где

$$\underline{\partial} f_1(z_0) = \text{co}\left\{ \underline{\partial}\varphi_i(z_0) - \sum_{\substack{k \in R(z_0) \\ k \neq i}} \bar{\partial}\varphi_k(z_0) \middle| \ i \in R(z_0) \right\},$$

$$\bar{\partial} f_1(z_0) = \sum_{i \in R(z_0)} \bar{\partial}\varphi_i(z_0), \quad \underline{\partial} f_2(z_0) = \sum_{i \in Q(z_0)} \underline{\partial}\varphi_i(z_0),$$

$$\overline{\partial} f_2(z_0) = \text{co}\left\{ \overline{\partial}\varphi_i(z_0) - \sum_{\substack{k\in Q(z_0)\\ k\neq i}} \underline{\partial}\varphi_k(z_0) \;\middle|\; i\in Q(z_0)\right\}.$$

Здесь

$$R(z_0) = \{i\in I|\ \varphi_i(z_0) = f_1(z_0)\},$$
$$Q(z_0) = \{j\in J|\ \varphi_j(z_0) = f_2(z_0)\}.$$

Тот факт, что операции взятия максимума и минимума сохраняют свойство квазидифференцируемости, является важнейшим свойством квазидифференцируемых функций.

Пример 1. Пусть $f(z) = f(x, y) = |x| - |y|$, $z = [0, 0]$. Положим $f_1(z) = x$, $f_2(z) = -x$, $f_3(z) = y$, $f_4(z) = -y$, $f_5(z) = |x|$, $f_6(z) = |y|$. Функции f_1, f_2, f_3, f_4 гладкие, поэтому по формуле (11)

$$Df_1(z_0) = [\underline{\partial} f_1(z_0),\quad \overline{\partial} f_1(z_0)],$$

где $\underline{\partial} f_1(z_0) = \{[1, 0]\}$, $\overline{\partial} f_1(z_0) = \{[0, 0]\}$,

$$Df_2(z_0) = [\underline{\partial} f_2(z_0),\quad \overline{\partial} f_2(z_0)],$$

где $\underline{\partial} f_2(z_0) = \{[-1, 0]\}$, $\overline{\partial} f_2(z_0) = \{[0, 0]\}$,

$$Df_3(z_0) = [\underline{\partial} f_3(z_0),\quad \overline{\partial} f_3(z_0)],$$

где $\underline{\partial} f_3(z_0) = \{[0, 1]\}$, $\overline{\partial} f_3(z_0) = \{[0, 0]\}$,

$$Df_4(z_0) = [\underline{\partial} f_4(z_0),\quad \overline{\partial} f_4(z_0)],$$

где $\underline{\partial} f_4(z_0) = \{[0, -1]\}$, $\overline{\partial} f_4(z_0) = \{[0, 0]\}$.

Поскольку $f_5(z) = \max\{f_1(z), f_2(z)\} = \max\limits_{i\in 1, 2} f_i(z)$, то по формуле (19)

$$Df_5(z_0) = [\underline{\partial} f_5(z_0),\quad \overline{\partial} f_5(z_0)],$$

где

$$\underline{\partial} f_5(z_0) = \text{co}\{\underline{\partial} f_1(z_0) - \overline{\partial} f_2(z_0), \underline{\partial} f_2(z_0) - \overline{\partial} f_1(z_0)\} =$$
$$= \text{co}\{\{[1, 0]\} - \{[0, 0]\},\quad \{[-1, 0]\} - \{[0, 0]\}\} =$$
$$= \text{co}\{[1, 0],\quad [-1, 0]\},$$

$$\overline{\partial} f_5(z_0) = \overline{\partial} f_1(z_0) + \overline{\partial} f_2(z_0) = \{[0, 0]\}.$$

Аналогично поскольку $f_6(z) = \max\{f_3(z), f_4(z)\}$, то

$$\underline{\partial} f_6(z_0) = \text{co}\{\underline{\partial} f_3(z_0) - \overline{\partial} f_4(z_0), \underline{\partial} f_4(z_0) - \overline{\partial} f_3(z_0)\} =$$
$$= \text{co}\{[0, 1],\quad [0, -1]\},$$

$$\overline{\partial} f_6(z_0) = \overline{\partial} f_3(z_0) + \overline{\partial} f_4(z_0) = \{[0, 0]\}.$$

Так как $f(z) = f_5(z) - f_6(z)$, то по формуле (16)

$$Df(z_0) = [\underline{\partial} f(z_0), \overline{\partial} f(z_0)],$$

где

$$\underline{\partial} f(z_0) = \underline{\partial} f_5(z_0) - \overline{\partial} f_6(z_0) = \text{co}\{[1, 0],\quad [-1, 0]\},$$

$$\overline{\partial} f(z_0) = \overline{\partial} f_5(z_0) - \underline{\partial} f_6(z_0) = \text{co}\{[0, 1],\quad [0, -1]\}.$$

Имеем (рис. 2)

$$\underline{\partial} f(z_0) = \text{co}\{a_1, a_2\},\quad \overline{\partial} f(z_0) = \text{co}\{b_1, b_2\},$$

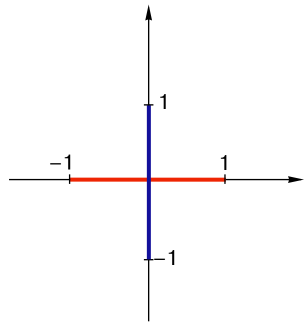

Рис. 2

где $a_1 = [1, 0]$, $a_2 = [-1, 0]$, $b_1 = [0, 1]$, $b_2 = [0, -1]$. Поскольку $-\overline{\partial} f(z_0) = \overline{\partial} f(z_0)$, то

$$\min_{\upsilon\in\underline{\partial} f(z_0)} \|b_1 - \upsilon\| = \|b_1 - \upsilon_1\| = c_1 = 1,$$

$$\min_{\upsilon\in\underline{\partial} f(z_0)} \|b_2 - \upsilon\| = \|b_2 - \upsilon_2\| = c_2 = 1,$$

где $\upsilon_1 = [0, 0]$, $\upsilon_2 = [0, 0]$. Так как $c_1 = c_2 = 1$, то из (13) заключаем, что направления $g_0 = [0, 1]$ и $g_0' = [0, -1]$ являются направлениями наискорейшего спуска функции f в точке z_0.

Аналогично направления $g^0 = [1, 0]$ и $g^{0'} = [-1, 0]$ являются направлениями наискорейшего подъема.

Замечание 2. Этот пример мы уже рассматривали в [1], где непосредственными вычислениями были найдены направления наискорейшего спуска и подъема. Здесь эти же результаты были получены с помощью теории квазидифференциалов.

Пример 2. Пусть $f(z) = f(x, y) = \max\{|x| - |y|, |x + y|\}$, $z = [0, 0]$. Положим $\varphi_1(z) = |x| - |y|$, $\varphi_2(z) = |x + y|$, $\varphi_3(z) = x + y$, $\varphi_4(z) = -x - y$. Тогда $\varphi_2(z) = \max\{\varphi_3(z), \varphi_4(z)\}$, $f(z) = \max\{\varphi_1(z), \varphi_2(z)\}$.

Функция $\varphi_1(z)$ рассматривалась в примере 1. Там было установлено, что

$$D\varphi_1(z_0) = [\underline{\partial}\varphi_1(z_0),\quad \overline{\partial}\varphi_1(z_0)],$$

где $\underline{\partial}\varphi_1(z_0) = \text{co}\{[1, 0],\quad [-1, 0]\}$,

$\overline{\partial}\varphi_1(z_0) = \text{co}\{[0, 1],\quad [0, -1]\}$.

Функции φ_3 и φ_4 гладкие, поэтому можно взять

$$D\varphi_3(z_0) = [\underline{\partial}\varphi_3(z_0),\quad \overline{\partial}\varphi_3(z_0)],$$

$$D\varphi_4(z_0) = [\underline{\partial}\varphi_4(z_0),\quad \overline{\partial}\varphi_4(z_0)],$$

где

$$\underline{\partial}\varphi_3(z_0) = \{[1, 1]\},\quad \overline{\partial}\varphi_3(z_0) = \{[0, 0]\},$$

$$\underline{\partial}\varphi_4(z_0) = \{[-1, -1]\},\quad \overline{\partial}\varphi_4(z_0) = \{[0, 0]\}.$$

Так как $\varphi_2(z) = \max\{\varphi_3(z),\ \varphi_4(z)\}$, то по правилам квазидифференциального исчисления (см. (19))

$$D\varphi_2(z_0) = [\underline{\partial}\varphi_2(z_0),\quad \overline{\partial}\varphi_2(z_0)],$$

где

$$\underline{\partial}\varphi_2(z_0) = \text{co}\{[1, 1], [-1, -1]\},\quad \overline{\partial}\varphi_2(z_0) = \{[0, 0]\}.$$

Поскольку $f(z) = \max\{\varphi_1(z), \varphi_2(z)\}$, то из (19)

$$Df(z_0) = [\underline{\partial} f(z_0), \quad \bar{\partial} f(z_0)],$$

где

$$\underline{\partial} f(z_0) = \mathrm{co}\{\underline{\partial}\varphi_1(z_0) - \bar{\partial}\varphi_2(z_0), \quad \underline{\partial}\varphi_2(z_0) - \bar{\partial}\varphi_1(z_0)\},$$

$$\bar{\partial} f(z_0) = \bar{\partial}\varphi_1(z_0) + \bar{\partial}\varphi_2(z_0).$$

Отсюда

$$\underline{\partial} f(z_0) = \mathrm{co}\{\mathrm{co}\{[1,0], \quad [-1,0]\} - \{[0,0]\},$$
$$\mathrm{co}\{[1,1], \quad [-1,-1]\} - \mathrm{co}\{[0,1], \quad [0,-1]\}\} =$$
$$= \mathrm{co}\{\mathrm{co}\{[1,0], \quad [-1,0]\},$$
$$\mathrm{co}\{[1,1]-[0,1], \quad [1,1]-[0,-1],$$
$$[-1,-1]-[0,1], \quad [-1,-1]-[0,-1]\}\} =$$
$$\mathrm{co}\{\mathrm{co}\{[1,0], \quad [-1,0]\},$$
$$\mathrm{co}\{[1,0], \quad [1,2], \quad [-1,-2], \quad [-1,0]\}\} =$$
$$= \mathrm{co}\{[1,0], \quad [1,2], \quad [-1,-2], \quad [-1,0]\},$$
$$\bar{\partial} f(z_0) = \mathrm{co}\{[0,1], \quad [0,-1]\} - \{[0,0]\} =$$
$$= \mathrm{co}\{[0,1], \quad [0,-1]\}.$$

В данном примере $\bar{\partial} f(z_0) = -\bar{\partial} f(z_0)$.

На рис. 3 видно, что

$$-\bar{\partial} f(z_0) \subset \underline{\partial} f(z_0),$$

то есть точка z_0 является inf-стационарной (в действительности она уже точка минимума, но это не следует из необходимого условия минимума, а достаточное условие (9) в данном случае не выполнено).

Условие максимума не выполнено. Для каждой из вершин многоугольника $\underline{\partial} f(z_0)$ найдем ближайшую точку отрезка $-\bar{\partial} f(z_0)$. Наиболее удаленными от множества $-\bar{\partial} f(z_0)$ вершинами являются $a_2 = [1, 2]$ и $a_3 = [-1, -2]$, при этом

$$\min_{w \in [-\bar{\partial} f(z_0)]} \|a_2 - w\| = \|a_2 - b_1\|,$$
$$\min_{w \in [-\bar{\partial} f(z_0)]} \|a_3 - w\| = \|a_3 - b_2\|,$$

где $b_1 = [0, 1]$ и $b_2 = [0, -1]$. Поэтому (см. (15)) направлениями наискорейшего подъема функции f в точке z_0 являются

$$g^0 = \frac{(a_2 - b_1)}{\|a_2 - b_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$g^{0'} = \frac{(a_3 - b_2)}{\|a_3 - b_2\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

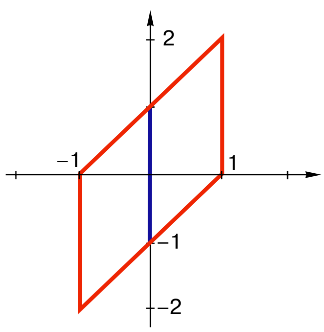

Рис. 3

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из изложенного следует, что если функция является квазидифференцируемой, то исследование этой функции на экстремум можно проводить с помощью квазидифференциала. Существует хорошо разработанное квазидифференциальное исчисление, являющееся обобщением классического дифференциального исчисления (а сам квазидифференциал – обобщением понятия градиента). Все сказанное переносится на случай функций многих переменных.

Мы описали только одно из направлений в негладком анализе, который сейчас находится в стадии становления. Здесь еще остается много интересных и важных нерешенных задач, имеющих не только теоретическое, но и сугубо практическое значение. Мы ставили перед собой следующие цели:

1) показать, что математика (и, в частности, математический анализ) интенсивно развивается в настоящее время;

2) ознакомить с некоторыми результатами в негладком анализе, чтобы даже неспециалист мог при необходимости применить эти результаты в своей деятельности;

3) привлечь пытливого читателя к ведущимся сейчас исследованиям и заинтересовать его.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демьянов В.Ф.* Негладкий анализ на плоскости. Часть I // Соросовский Образовательный Журнал. 1997. № 8. С. 122–127.

2. *Демьянов В.Ф., Васильев Л.В.* Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 384 с.

3. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.

* * *

Владимир Федорович Демьянов, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой факультета прикладной математики – процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: оптимальное управление, математическое программирование, негладкий анализ, недифференцируемая оптимизация. Член редколлегии четырех международных математических журналов, автор более 100 работ, в том числе семи монографий, часть из которых переведена на английский, немецкий, польский и китайский языки.