Задачи по теории функций комплексного переменного
Часть 2

На дневном, на вечернем и на заочном отделениях факультета прикладной математики-процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета читается годовой курс по Теории функций комплексного переменого (ТФКП). Программа этого курса приведена на сайте факультета http://www.apmath.spbu.ru/ru/staff/starkov/. Там же помещена первая часть курса.

При составлении методических указаний использовались различные источники, список которых приведен. В каждом пункте даются краткие сведения теоретического характера с целью сделать читателя менее зависимым от наличия или отсутствия у него соответствующей литературы. Для некоторых задач решение доведено до конца, для других даются указания к решению, для всех задач приведены ответы.

Содержание

1. Интегрирование функций комплексного переменного
    1.1. Вычисление интегралов по формуле Ньютона-Лейбница
    1.2. Интеграл по контуру
    1.3. Интегральная формула Коши

2. Ряды
    2.1. Степенные ряды и ряд Тейлора
    2.2. Ряд Лорана

3. Изолированные особые точки и вычеты функций
    3.1. Классификация особых точек
    3.2. Вычеты функций

4. Применение вычетов к вычислению интегралов
    4.1. Вычисление интегралов на основе теоремы Коши
    4.2. Вычисление определенных интегралов с помощью вычетов
    4.3. Несобственные интегралы от действительной переменной

5. Тестирование по пройденному материалу

6. Литература

1. Интегрирование функций комплексного переменного

1.1. Вычисление интегралов по формуле Ньютона-Лейбница

Функция $F(z)$ называется первообразной функцией для $f(z)$, если $F'(z)=f(z)$. Если функция $f(z)$ является аналитической в односвязной области *D,* то интеграл от $f(z)$ по любому пути, соединяющему точки z_1 и z_2 этой области и лежащему в ней, равен разности значений первообразной в точках z_2 и z_1, т.е. вычисляется по известной формуле Ньютона-Лейбница. Интегралы от элементарных функций комплексного переменного вычисляются с помощью тех же формул, что и для функций вещественной переменной.

1. Вычислить интегралы: а) $\int\limits_0^i z\cos z dz$, б) $\int\limits_0^{1+\pi i} ze^{-z}dz$, в) $\int\limits_0^{1+i} z^2 dz$.

Ответ: а) $\frac{1}{e}-1$, б) $\frac{1}{e}(2+\pi i)$, в) $\frac{2}{3}(-1+i)$.

2. Вычислить интегралы: а) $\int_0^i ze^z dz$, б) $\int_1^{1+i} \frac{dz}{z}$, в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}+i} \sin zdz$.

Ответ: а) $(1-\cos 1-\sin 1)+i(\cos 1-\sin 1)$, б) $\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}i$, в) $1+\frac{i}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$.

1.2. Интеграл по контуру

Если $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, то интеграл по дуге *AB,* лежащей в плоскости z, вычисляется по формуле $\int_{\cup AB} f(z)dz = \int_{\cup AB} udx - vdy + i\int_{\cup AB} vdx+udy$, т. е. представляется как сумма криволинейных интегралов от вещественной переменной.

При параметрическом задании дуги *AB:* $z(t)=x(t)+iy(t)$, $t_1<t<t_2$ имеем

$\int_{\cup AB} f(z)dz = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t))z'(t)dt$. Это удобно для случая, когда дуга является частью окружности, а параметром служит полярный угол.

Если функция $f(z)$ аналитична в некоторой односвязной области *D,* то интеграл по любому контуру в этой области не зависит от пути интегрирования, а вдоль *замкнутого* контура равен нулю (теорема Коши для односвязной области).

Если функция $f(z)$ есть аналитическая функция в замкнутой многосвязной области, то интеграл по внешнему контуру равен сумме интегралов по внутренним контурам (теорема Коши для многосвязной области). Везде интегрирование как по внешнему, так и по внутренним контурам совершается в положительном направлении, т.е. так, что область остается все время слева.

3. Вычислить $\int_C \operatorname{Im} zdz$, где *C* — прямолинейный отрезок, соединяющий точку 0 с точкой 2 + *i*.

Ответ: 1 + 0, 5*i*.

4. Вычислить $\oint_C \frac{dz}{z}$, где *C* — окружность $|z|=1$.

Ответ: $2\pi i$.

5. Вычислить $\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}}$, где *C* — верхняя половина окружности $|z|=1$, направление обхода: от точки (1,0) до точки (—1,0) ($\sqrt{z}$ взять из общей формулы при *k* = 0).

Ответ: 2(*i* – 1).

6. Вычислить $\oint_C \frac{dz}{\bar{z}}$, где *C* — граница области $1<|z|<2$.

Ответ: $\frac{4}{3}$.

7. Вычислить $\int_C z^3 dz$, где *C* — четверть окружности $|z|=1$, $0\le \arg z\le \frac{\pi}{2}$.

Ответ: 0.

8. Вычислить $\int_{-i}^{i} |z| dz$ вдоль полуокружности $|z|=1$, $\operatorname{Re} z\ge 0$.

Ответ: 2*i*.

9. Вычислить интегралы вдоль кривой *C* — части окружности $|z|=2$, лежащей в полуплоскости $\operatorname{Im} z\le 0$ и пробегаемой от точки $z_1=-2$ до точки $z_2=2$ в случаях:

а) $\int\limits_C |z|dz$ б) $\int\limits_C z|z|dz$ в) $\int\limits_C (2x-3iy)dz$

Ответ: а) $4\pi i$, б) 0; в) $10\pi i$.

10. Вычислить интегралы вдоль C — отрезка прямой с началом в $z_1 = 1$ и концом в $z_2 = i$ от следующих функций: а) $\bar{z}$, б) $\operatorname{Im} z$, в) $|z|^{-1}$.

Ответ: а) i, б) 0,5(–1 + i); в) $\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\ln(3+2\sqrt{2})$.

11. Вычислить интегралы по замкнутому контуру: а) $\oint\limits_{|\text{я}|=1} z\bar{z}dz$, б) $\oint\limits_{|\text{я}|=2} z\operatorname{Im}(z^2)dz$, в) $\oint\limits_{|\text{я}-1|=1} \operatorname{Re} zdz$.

Ответ: а) 0; б) -16π, в) πi.

12. Вычислить интеграл $\int\limits_{-i}^{i} \dfrac{dz}{z}$, вдоль дуги параболы $y^2 = x+1$.

Ответ: $-\pi i$.

13. Вычислить $\int\limits_C (y+xi)dz$, где C — ломаная OAB с вершинами в точках $z_O = 0$, $z_A = i$, $z_B = 1+i$.

Ответ: 0,5 + i.

14. Вычислить интеграл $\int\limits_C z^{10}dz$, где С — эллипс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Ответ: 0.

1.3 Интегральная формула Коши

Пусть функция $f(z)$ аналитична в замкнутой области D (односвязной или многосвязной) и Г — граница области D. Оказывается, что тогда значения функции $f(z)$ в любой точке области D можно вычислить, зная только значения $f(z)$ на границе области по интегральной формуле Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}.$$

Заметим, что формула Коши остается в силе и для многосвязной области, но под интегралом подразумевается сумма интегралов по всем кривым, составляющим контур (обходимые области остаются слева).

Известно, что аналитическая в данной области функция $f(z)$ имеет в этой области производную любого порядка. Производная определяется по формуле

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z)^{n+1}}.$$

С помощью этих формул можно вычислять некоторые криволинейные интегралы по замкнутым контурам для подынтегральной функции специального вида. Формулы следует записать в обратном порядке

$$\oint\limits_{\Gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} = 2\pi i f(z),\quad \oint\limits_{\Gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z).$$

Пример 1. Вычислить интеграл $\oint\limits_C \dfrac{e^z dz}{z(z-3)}$, где C — окружность с радиусом 3/2 и центром в точке 2.

Решение. В качестве числителя подынтегрального выражения в интегральной формуле Коши следует взять функцию $f(z)=\dfrac{e^z}{z}$, которая аналитична в круге, ограниченном *C*. Применяя интегральную формулу Коши, получим $\oint\limits_C \dfrac{e^z dz}{z(z-3)} = \oint\limits_C \dfrac{f(z)dz}{z-3} = 2\pi i f(3) = \dfrac{2\pi e^3 i}{3}$.

Пример 2. Вычислить $\oint\limits_C \dfrac{e^z dz}{(z-i)^3}$.

где *C* — произвольный замкнутый контур, однократно обходящий точку i в положительном направлении.

Решение. Функция $f(z)=e^z$ аналитична в области, ограниченной контуром C и в силу формулы для производной, находим $\oint\limits_C \dfrac{e^z dz}{(z-i)^3} = \dfrac{2\pi i}{2!} f''(i) = -\pi\sin 1 + i\pi\cos 1$.

15. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z-2|=2} \dfrac{2z^3+1}{(z-1)^4}dz$.

Ответ: $4\pi i$.

16. Вычислить $\oint\limits_C \dfrac{dz}{z^2+9}$, если: а) точка $3i$ лежит внутри контура С, а точка $-3i$ — вне его, б) точка $-3i$ лежит внутри контура С, а точка $3i$ — вне его.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{3}$, б) $-\dfrac{\pi}{3}$.

17. Применяя формулу Коши, вычислить интегралы: а) $\oint\limits_C \dfrac{z^3 dz}{z-1}$, б) $\oint\limits_C \dfrac{zdz}{z^4-1}$, где С— окружность с центром в точке 2 и радиусом 2.

Ответ: а) $2\pi i$; б) $\dfrac{\pi}{2}i$.

18. Вычислить интегралы по окружностям: а) $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{z^2 dz}{z+i}$, б) $\oint\limits_{|z-1|=2} \dfrac{\sin z}{z}dz$, в) $\oint\limits_{|z+2|=2} \dfrac{zdz}{z^2-1}$.

Ответ: а) $-2\pi i$, б) 0; в) πi.

2 Ряды

2.1 Степенные ряды и ряд Тейлора

Различают числовые и функциональные ряды. Из всевозможных функциональных рядов большое распространение имеют степенные ряды:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots$$

Радиус сходимости *К* можно определить, пользуясь признаками Даламбера или Коши: $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|$,

$R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$.

Ряд сходится при $|z|<R$, т.е. в круге радиусом R. Более общий вид степенного ряда — ряд Тейлора

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n\,,\; c_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)\,.$$

Кругом сходимости этого ряда является круг $|z-z_0|<R$.

Пример 1. Рассмотрим геометрическую прогрессию $\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n=1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots$

Ее круг сходимости $|z|<1$. Внутри этого круга прогрессия сходится абсолютно, а во всяком замкнутом круге $|z|\le q<1$–равномерно. Как и в действительном анализе, сумма прогрессии внутри ее круга сходимости равна функции $\dfrac{1}{1-z}$. Эта функция и ее представление рядом очень полезно в задачах разложения в ряды.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-1)^n}{n!}=1+\dfrac{z-1}{1!}+\dfrac{(z-1)^2}{2!}+\ldots$

Его радиус сходимости равен $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)=\infty$.

Следовательно, кругом сходимости данного ряда будет вся плоскость z.
Как и в действительном анализе, имеют место разложения при $z_0=0$ следующих функций:

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots,\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,$$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots,$$

$$(1+z)^n=1+nz+\frac{n(n-1)}{2!}z^2+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}z^k+\ldots,$$

$$\ln(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{n}=\frac{z}{1}-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\ldots+(-1)^n\frac{z^n}{n}+\ldots$$

Радиус сходимости первых трех рядов $R=\infty$, а последних двух $R=1$.

19. Определить радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_nz^n$, если: а) $c_n=n^n$, б) $c_n=\dfrac{1}{n!}$,

в) $c_n=\dfrac{n}{2^n}$, г) $c_n=\cos(in)$.

Ответ: а) 0; б) ∞, в) 2; г) $\dfrac{1}{e}$.

20. Найти круг сходимости рядов: а) $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n!}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\,z^n$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-i)^n}{n^2(1+i)^n}$.

Ответ: а) $R=\infty$, вся плоскость, б) $R=0$, точка $z=0$, в) $R=\sqrt{2},\quad |z-i|<\sqrt{2}$.

21. Найти радиус сходимости степенного рядов: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!\,z^n}{n^n}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(1+i)^n}{(n+1)(n+2)}(z-2)^n$.

Ответ: а) $R=e$, б) $R=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

22. Найти круг сходимости следующих степенных рядов: а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+i)^n}{1+in}$, б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[2+(-1)^n\right]z^n$,

в) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1+i)^n}{[3+4\cdot(-1)^n]^n}$, г) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sin(in))z^n$.

Ответ: а) $|z+i|<1$, б) $|z|<1$, в) $|z+1+i|<1$, г) $|z|<\frac{1}{e}$.

23. Определить область сходимости рядов: а) $\sum_{n=2}^{\infty}e^{z\ln n}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nz}{n}$, в) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z+n}$.

Ответ: а) Полуплоскость $\operatorname{Re} z<-1$, б) действительная ось; в) вся плоскость, кроме точек $z=0,\pm1,\pm2,...$

24. Найти область сходимости данных рядов: а) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(z^n+\frac{1}{2^n z^n}\right)$, б) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{n!}+\frac{n^2}{z^n}\right)$,

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{z(z+n)}{n}\right]^n$.

Ответ: а) Кольцо $\frac{1}{2}<|z|<1$, б) внешность единичного круга $|z|>1$, в) $|z|<1$.

25. Найти область сходимости данных рядов: а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{2^n}+1}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{1-z^n}$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{1-z^{2n}}$.

Ответ: а) $|z|>1$, б) $|z|<1$, в) вся плоскость, кроме окружности $|z|=1$.

26. Разложить в ряд Тейлора по степеням $z-i$ функцию $f(z)=z^5$.

Ответ: $f(z)=i+5(z-i)-10i(z-i)^2-10(z-i)^3+5i(z-i)^4+(z-i)^5$.

27. Разложить функции в ряд Тейлора в окрестности точки z_0 и указать область сходимости:

а) $\ln z$, $z_0=1$, б) $(1-z)e^z$, $z_0=0$, в) $\sin 2z-2\sin z$, $z_0=0$.

Ответ: а) $\ln z=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(z-1)^n}{n}, |z-1|<1$, б) $1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nz^{n+1}}{(n+1)!}, |z|<\infty$,

в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2-2^{2n+1}}{(2n+1)!}z^{2n+2}, |z|<\infty$.

28. Разложить функции в степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ и найти радиус сходимости: а) $\frac{1}{az+b}, b\neq 0$,

б) $\frac{z}{z^2-4z+13}$, в) $\frac{z^2}{(z+1)^2}$.

Ответ: а) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{a^n z^n}{b^{n+1}}, R=\left|\frac{b}{a}\right|$, б) $\frac{i}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(2-3i)^n-(2+3i)^n\right]\frac{z^n}{13^n}, R=\sqrt{13}$,

в) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(n-1)z^n, R=1$.

29. Разложить указанные функции в степенные ряды $\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$, используя известные разложения:

а) $\ln(z^2-3z+2)$, б) $\ln\frac{1+z}{1-z}$, в) $\int_0^z\frac{\sin z}{z}dz$.

Ответ: а) $\ln 2-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+2^{-n})\dfrac{z^n}{n},\ R=1$, б) $2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{2n+1}}{2n+1},\ R=1$, в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)},\ R=\infty$.

30. Разложить указанные функции в ряд по степеням $z-1$ и найти радиус сходимости: а) $\dfrac{z}{z+2}$, б) $\dfrac{z}{z^2-2z+5}$, в) $\dfrac{z^2}{(z+1)^2}$.

Ответ: а) $\dfrac{1}{3}+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{(z-1)^n}{3^n+1},\ R=3$, б) $\dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-1)^n}{2^{n+\frac{1}{2}\left[1+(-1)^{n+1}\right]}},\ R=2$,

в) $\dfrac{1}{4}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(n-3)(z-1)^n}{2^{n+2}},\ R=2$.

31. Функцию $\sin(2z-z^2)$ разложить в ряд по степеням $z-1$, найти радиус сходимости ряда.

Ответ: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}\sin\left(1+\dfrac{n\pi}{2}\right)(z-1)^{2n},\ R=\infty$.

32. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(z)=\ln z$ в окрестности $z_0=2$.

Ответ: $\ln 2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(z-2)^n}{n2^n},\ R=2$.

2.2. Ряд Лорана

Ряд, содержащий, кроме положительных степеней $z-z_0$, также и отрицательные степени $z-z_0$, называется рядом Лорана и имеет вид

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n=\ldots+\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}+\ldots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+\ldots+a_n(z-z_0)^n+\ldots$$

Областью сходимости ряда Лорана является круговое кольцо $R_1<|z-z_0|<R_2$ (кольцо может выродиться в кольцо с выколотым центром: $0<|z-z_0|<R_2$ или во внешность круга с выколотой точкой $z=\infty$: $R_1<|z-z_0|<\infty$, а также во всю плоскость с двумя выколотыми точками: $0<|z-z_0|<\infty$). Часть ряда Лорана с коэффициентами a_{-n} называется главной частью ряда Лорана, а с коэффициентами a_n — правильной частью.

Всякая аналитическая функция $f(z)$ внутри кругового кольца $R_1<|z-z_0|<R_2$ может быть разложена внутри этого кольца в ряд Лорана и притом единственным образом. Коэффициенты ряда Лорана вычисляются при помощи формулы

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,\quad n=0,\pm1,\pm2,\ldots,$$

где C — любой замкнутый контур, расположенный внутри кольца и окружающий точку z_0.

Однако на практике для вычисления коэффициентов иногда удобнее использовать представление разлагаемой функции в виде суммы функций, каждую из которых можно непосредственно представить в виде разложения по отрицательным или положительным степеням $z-z_0$.

Пример. Рассмотрим функцию $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$. Она имеет две особые точки $z=1$ и $z=2$ и, значит, в кольце $1<|z|<2$ является аналитической и разлагается в ряд Лорана. Найдем это разложение, представив функцию в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}.$$

Дробь $\frac{1}{z-2}$ является аналитической функцией в круге $|z|<2$ и разлагается по положительным степеням аналогично *ряду геометрической прогрессии:*

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\right)=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\ldots+\frac{z^n}{2^n}+\ldots\right)=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n.$$

Дробь $-\frac{1}{z-1}$ является аналитической вне круга $|z|>1$ и разлагается по степеням $\frac{1}{z}$ также как сумма геометрической прогрессии: $-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots+\frac{1}{z^n}+\ldots\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}$

Окончательно имеем $f(z)=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}=-\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{z^n}{2^n}+\frac{1}{z^n}\right]$

Для этой функции можно получить и другие разложения в других областях. Так, например, в области $|z|<1$ она аналитична и разлагается в ряд Тейлора:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-2}=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=$$

$$=1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\ldots+\frac{z^n}{2^n}+\ldots\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n,\ |z|<1.$$

Разложим ее в кольце $0<|z-1|<1$ (окрестность точки $z_0=1$) по степеням $z-1$:

$$f(z)=-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{z-1}-\frac{1}{1-(z-1)}=$$

$$=-\frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n=-\sum_{n=-1}^{\infty}(z-1)^n,\ 0<|z-1|<1.$$

Таким образом, для одной и той же функции можно получить различные разложения. Это не противоречит единственности разложения, ибо полученные ряды имеют место в различных областях.

33. Разложить функцию $f(z)=\frac{1}{z(z-1)}$ в ряд Лорана в кольце $0<|z-1|<1$.

Ответ: $f(z)=-\sum_{n=-1}^{\infty}z^n$

34. Разложить в ряд Лорана по степеням $z-2$ функцию $f(z)=\frac{z^4}{(z-2)^2}$.

Ответ: $f(z)=\frac{16}{(z-2)^2}+\frac{32}{z-2}+24+8(z-2)+(z-2)^2$.

35. Разложить в ряд Лорана следующие функции в указанных областях: а) $\dfrac{z}{(z^2-1)(z^2-4)}$ при $1<|z|<2$, б) $\dfrac{1}{(z^2-1)(z^2-4)^2}$ при $1<|z|<2$, в) $\dfrac{1}{(z^2-1)(z^2-4)^2}$ при $|z|>2$.

Ответ: а) $\dfrac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{z^{2n+1}}-\dfrac{1}{12}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{2n+1}}{4^n}$, б) $\dfrac{1}{9}\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n z^{2n}$, $a_n=1$ при $n<0$, $a_n=\dfrac{3n+7}{4^{n+2}}$ при $n>0$,

в) $\dfrac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}\left[1+(3n-7)4^{n-2}\right]z^{-2n}$.

3. Изолированные особые точки и вычеты функций

3.1. Классификация особых точек

Точки, в которых функция $f(z)$ перестает быть аналитической, называются особыми. Если в достаточно малой окрестности особой точки нет других особых точек, то данная особая точка называется изолированной. Изолированные особые точки бывают трех типов: устранимая особая точка, полюс, существенно особая точка.

Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ называется устранимой (или правильной), если существует конечный предел $\lim f(z)$ при $z\to z_0$ (этот предел не совпадает с $f(z_0)$). Для того чтобы изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ была устранимой, необходимо и достаточно, чтобы лорановское разложение $f(z)$ в окрестности z_0 не содержало главной части, т.е. представляло бы ряд Тейлора:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n=a_0+a_1(z-z_0)+\ldots+a_n(z-z_0)^n+\ldots$$

Данная функция совпадает с суммой ряда, если $z\neq z_0$ Функция будет аналитической и в точке z_0, если положить $f(z_0)=a_0$, что обычно и делают.

Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ называется полюсом, если $\lim f(z)=\infty$ при $z\to z_0$.

Для того чтобы изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ была полюсом, необходимо и достаточно, чтобы главная часть лорановского разложения $f(z)$ в окрестности z_0 содержала бы лишь конечное число членов:

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}}+\ldots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

$m>0$, $a_{-m}\neq 0$, -*m* называется порядком полюса, при $m=1$ полюс, называется *простым.*

Если для $f(z)$ точка z_0 есть полюс порядка *m,* то для функции $\dfrac{1}{f(z)}$ точка z_0 есть *нуль* порядка *m* (точка z_0 называется нулем порядка *m,* если разложение в степенной ряд аналитической функции $w(z)$ имеет вид $w(z)=\sum_{k=m}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$, $a_{-m}\neq 0$, $k\geq 1$).

Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ называется *существенно особой,* если $\lim f(z)$ при $z\to z_0$ не существует.

Например*,* $z = 0$ для функции $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ является существенно особой, так как $\lim\limits_{z\to 0-}e^{\frac{1}{z}}=0$, $\lim\limits_{z\to 0+}e^{\frac{1}{z}}=\infty$.

Для того чтобы изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ была существенно особой, необходимо и достаточно, чтобы главная часть лорановского разложения функции $f(z)$ в окрестности z_0 содержала бы бесконечное число членов: $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$.

Теперь о точке $z=\infty$. Точка $z=\infty$ называется бесконечно удаленной изолированной особой точкой, если все другие особые точки находятся на конечном расстоянии от начала координат.

Точку $z=\infty$ будем называть устранимой особой точкой функции $f(z)$, если ее разложение в ряд Лорана имеет вид $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ или существует предел $\lim f(z)=a_0$ при $z\to\infty$, т.е. функция ограничена в окрестности бесконечно удаленной точки. Пусть в разложении $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ будут равны нулю $a_0=a_1=...=a_{m-1}=0$, но $a_m\neq 0$. В этом случае говорят, что точка $z=\infty$ является нулем кратности m функции $f(z)$.

Точка $z=\infty$ называется полюсом порядка m функции $f(z)$, если разложение в ряд Лорана в окрестности этой точки имеет вид $f(z)=\sum_{n=-m}^{\infty} a_n z^{-n}$, где $a_{-m}\neq 0$. Видно, что в этом случае $\lim f(z)=\infty$ при $z\to\infty$.

Бесконечно удаленная точка называется существенно особой точкой функции $f(z)$, если разложение в ряд Лорана для нее имеет вид $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$, причем главная часть состоит из бесконечного числа членов.

36. Определить характер точки z_0 для следующих функций: а) $\sin z+3\sin^2 z,\ z_0=k\pi,\ k\in Z$,

б) $\sin(z-1)\cos^3\frac{\pi}{2}z,\ z_0=1$, в) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{2}z}{\sin^2(z-1)},\ z_0=1$, г) $\dfrac{\sin z}{z-\pi},\ z_0=\pi$.

Ответ: а) $z=k\pi$ — простые нули функции; б) $z=1$ — нуль четвертого порядка; в) $z=1$ — полюс первого порядка; г) $z=\pi$ — устранимая особая точка.

37. Определить порядки полюсов z_0 для следующих функций:

а) $\dfrac{z}{\sin^3 z},\ z_0=k\pi,\ k\in Z$, б) $\dfrac{z^2-3z+2}{(z^2-4)^2(z-1)^3},\ z_0=2,\ z_0=1$, в) $\dfrac{\cos\pi z+1}{(z^2-z-2)^3},\ z_0=-1,\ z_0=2$.

Ответ: а) $z=0$ — полюс второго порядка, $z=k\pi$ — полюсы 3 порядка (k = 0, ±1, ±2, . . .); б) $z=2$ — полюс 1 порядка, $z=1$ — полюс 2 порядка, в) $z=-1$ — простой полюс, $z=2$ –полюс 3 порядка.

38. Найти особые точки функций и определить их тип (для полюсов указать порядок):

а) $\dfrac{z+2}{z(z+1)(z-1)^3}$, б) $\mathrm{ctg}z$, в) $\dfrac{1}{(z^2+i)^3}$, г) $e^{\frac{1}{z-2i}}$, д) $\cos\dfrac{1}{z+i}$.

Ответ: а) $z=1$ — полюс 3 порядка $z=0$ и $z=-1$ — полюсы 1 порядка; б) $z=k\pi$ — простые полюсы (k = 0,±1,±2,. . .); в) $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(i-1)$ —полюсы 3 порядка; г) $z=2i$ — существенно особая точка, д) $z=-i$ — существенно особая точка.

39. Найти особые точки функции $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z-1}$.

Ответ: $z=1$ –существенно особая точка, $z=2k\pi i$ (k= 0, ±1, ±2, . . .)—полюсы 1 порядка, $z=\infty$ – устранимая особая точка.

40. Найти особые точки функции $f(z)=\dfrac{\sin\frac{1}{z}}{(z^3+1)(z-1)^2}$.

Ответ: $z=-1$, $z=\frac{1}{2}(1\pm i\sqrt{3})$ — полюсы 1 порядка, $z=1$ — полюс 2 порядка, $z=0$ — существенно особая точка.

41. Найти особые точки функции $f(z)=\dfrac{\sin z}{(z-\pi)^2}$.

Ответ: $z=\pi$ — полюс 1 порядка, $z=\infty$ –существенно особая точка.

42. Найти особые точки функции $f(z)=\dfrac{e^z-1}{(z^2+1)(z^2-1)^2}$.

Ответ: Простые полюсы в точках $\pm i$, полюсы 2 порядка в точках ± 1, $z=\infty$ –существенная особая точка.

43. Определить характер точки $z=0$ для функций: а) $\exp\left(\dfrac{\sin z}{z}\right)$, б) $\dfrac{z+3z^3}{\ln(1-2z)}$, в) $\dfrac{e^z}{\sin z-z+\frac{z^3}{6}}$,

г) $(e^z-1-z)\operatorname{ctg}^3 z$, д) $\dfrac{\sin 2z}{\cos z-1+\frac{z^2}{2}}$, е) $\exp\left(\dfrac{1}{z^2-z}\right)$.

Ответ: а) правильная точка; б) правильная точка; в) полюс 5 порядка; г) простой полюс; д) полюс 3 порядка; е) существенно особая точка.

44. Найти особые точки функций и указать на характер: а) $\dfrac{1}{z^3+1}$, б) $\dfrac{e^{iz}}{z^3}$, в) $\dfrac{\exp\left(\frac{1}{z+1}\right)}{(z+1)^3}$,

г) $\dfrac{\sin z}{z^2(z^2+1)^2}$.

Ответ: а) $z=-1$, $z=\frac{1}{2}(1\pm i\sqrt{3})$ — полюсы 1 порядка (простые полюсы), $z=\infty$ — нуль 3 порядка,

б) $z=0$ — полюс 3 порядка, $z=\infty$ –существенно особая точка; в) $z=-1$ — существенно особая точка, $z=\infty$ — нуль 3 порядка; г) $z=0$ –простой полюс, $\pm 2i$ — полюсы 2 порядка, $z=\infty$ –существенно особая точка;

45. Найти особые точки функций и указать их характер: а) $\dfrac{z^4+1}{z^4-1}$, б) $z\cos\dfrac{1}{z}-z$, в) $z^3\sin\dfrac{1}{z}-z^2$.

Ответ: а) $\pm 1, \pm i$ — простые полюсы, ∞ — правильная точка; б) $z=0$ — существенно особая точка, $z=\infty$ — простой нуль; в) $z=0$ — существенно особая точка, $z=\infty$ — правильная точка.

46. Для функции $f(z)$ найти особые точки, выяснить их характер, и исследовать поведение функции в окрестности бесконечно удаленной точки: а) $f(z)=\dfrac{1}{z-z^3}$, б) $f(z)=\dfrac{z^4}{1+z^4}$, в) $f(z)=\dfrac{z^5}{(1-z)^3}$,

г) $f(z)=\dfrac{1+z^2}{e^z}$, д) $f(z)=e^{-\frac{1}{z^2}}$, е) $f(z)=\dfrac{\sin z}{4z+3}$.

Ответ: а) 0 и ± 1 — простые полюсы, $z=\infty$ –простой нуль (правильная точка); б) $\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1\pm i)$ — простые полюсы, $z=\infty$ — правильная точка; в) 1 — полюс 3 порядка, ∞ — полюс 2 порядка; г) $z=\infty$ — существенно особая точка; д) $z=0$ – существенно особая точка, $z=\infty$ — правильная точка; е) —0,75 — простой полюс, $z=\infty$ — существенно особая точка.

47. Найти полюсы функции $f(z)=\dfrac{z}{(z^2-1)(z^2+1)^2}$.

Ответ: ± 1 — полюс 1 порядка, $\pm i$ — полюсы 2 порядка.

48. Найти особые точки функций: а) $\dfrac{z}{z^2+1}$, б) $\sin\dfrac{1}{z}$.

Ответ: а) $z=\pm i$ простые полюсы, б) $z=0$ — существенно особая точка.

49. Найти особые точки функций, выяснить их характер и исследовать поведение функции на бесконечности: а) $\dfrac{1}{z(z^2+4)^2}$, б) $\dfrac{e^z}{z^2+1}$, в) ze^{-z}, г) $ze^{\frac{1}{z}}$, д) $e^{\frac{z}{1-z}}$, е) $e^{z-\frac{1}{z}}$.

Ответ: а) $z=0$ — полюс 1 порядка, $z=\pm 2i$ — полюсы 2 порядка, $z=\infty$ –правильная точка (нуль 5 порядка); б) $z=\pm i$ — полюсы 1 порядка, $z=\infty$ — существенно особая точка; в) $z=\infty$ — существенно особая точка; г) $z=0$ — существенно особая точка, $z=\infty$ — полюс 1 порядка; д) $z=1$ –существенно особая точка, $z=\infty$ — правильная точка, е) $z=0$ — существенно особая точка, $z=\infty$ — существенно особая точка.

50. Найти особые точки функций, выяснить их характер и исследовать поведение функций на бесконечности: а) $\dfrac{\cos z}{z^2}$, б) $\sin\dfrac{1}{1-z}$, в) $\sin\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2}$, г) $e^{-z}\cos\dfrac{1}{z}$.

Ответ: а) $z=0$ –полюс 2 порядка, $z=\infty$ — существенно особая точка; б) $z=1$ — существенно особая точка, $z=\infty$ — правильная точка (нуль 1 порядка), в) $z=0$ — существенно особая точка, $z=\infty$ — правильная точка (нуль 1 порядка); г) $z=0$ — существенно особая точка, $z=\infty$ – существенно особая точка.

3.2. Вычеты функций

Вычетом функции $f(z)$ относительно особой точки z_0 называется коэффициент a_{-1} при $(z-z_0)^{-1}$ в разложении в ряд Лорана $f(z)$ в окрестности z_0. Коэффициент $a_{-1}\neq 0$ только в том случае, когда z_0 — полюс или существенно особая точка. Обозначается вычет $\mathrm{Res} f(z_0)$ или $\mathrm{Res}_{z_0} f(z)$.

Вычет функции $f(z)$, соответствующий полюсу, можно вычислить проще, не пользуясь разложением функции в ряд Лорана. В случае простого полюса $z=z_0$ функции $f(z)$ вычет $\mathrm{Res} f(z_0)=\lim\limits_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)$.

В частности, если $f(z)=\dfrac{g(z)}{\varphi(z)}$, причем $g(z)$ и $\varphi(z)$ — аналитические функции в окрестности точки z_0 и $g(z_0)\neq 0$, а для $\varphi(z)$ точка z_0 есть нуль первого порядка (для $f(z)$ же точка z_0 есть полюс первого порядка), то $\mathrm{Res}_{z_0}\dfrac{g(z)}{\varphi(z)}=\dfrac{g(z_0)}{\varphi'(z_0)}$.

Если же точка z_0 для функции $f(z)$ является полюсом порядка *m,* то

$$\mathrm{Res} f(z_0)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[f(z)(z-z_0)^m\right]$$

51. Вычислить вычеты следующих функций относительно точек z_0: а) $\dfrac{z^3+1}{(z+2)^2(z-3)}$, $z_0=3, z_0=-2$,

б) $\dfrac{\cos z}{z^3(z+4)}$, $z_0=0$, в) $\mathrm{tg}z$, $z_0=\dfrac{\pi}{2}$, г) $e^{\frac{1}{z+2}}$, $z_0=-2$, д) $\sin\dfrac{4}{z-1}$, $z_0=1$.

Ответ: а) 28/25, —53/25, z = 3 — является полюсом 1 порядка, z = –2 — полюс 2 порядка; б) —7/64, z = 0 является полюсом 3 порядка; в) —1, $z=\dfrac{\pi}{2}$ является простым полюсом; г) 1; д) 4, z = 1 является существенно особой точкой.

52. Вычислить вычеты следующих функций относительно особых точек:

а) $\dfrac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$, б) $\dfrac{e^z}{z^2(z^2+9)}$, в) $\dfrac{1}{\sin z}$, г) $z^3\cos\dfrac{1}{z-2}$, д) $e^{z+\frac{1}{z}}$.

Ответ: а) 0 и 1, z = 0 является полюсом 2 порядка, а z = 1 — простым полюсом; б) 1/9, $-\dfrac{1}{54}(\sin 3\mp i\cos 3)$, $\dfrac{1}{54}\exp\left(\pm i\left(\dfrac{\pi}{2}+3\right)\right)$, z = 0 является полюсом 2 порядка, а z = ±3i — простыми полюсами; в) $(-1)^k$, k = ±1,±2,...; г) –143/24, z = 2 — является существенно особой точкой;

д) $1+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!(n+1)!}$, z = 0 — существенно особая точка.

53. Найти вычеты функции $f(z)=\dfrac{e^z}{z(z-1)^2}$ в ее конечных особых точках и в бесконечно удаленной точке.

Ответ: z = 0, z = 1 — является полюсами 1 и 2 порядков, $\mathrm{Res}f(0)=1$, $\mathrm{Res}f(1)=0$, $\mathrm{Res}f(\infty)=-1$.

54. Найти вычеты функции $f(z)=\dfrac{e^z}{1+z}$ в точках $z_1=-1, z_2=\infty$.

Ответ: $\dfrac{1}{e}$, –1.

55. Найти вычеты следующих функций в указанных точках:

а) $\dfrac{1}{1-\cos z}$, $z_0=0$, б) $\dfrac{1}{z^3-z^5}$, $z_0=0, z_0=\pm 1$, в) $\dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$, $z_0=\pm i$, г) $e^z\ln\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$, $z_0=\infty$.

Ответ: а) z = 0 – полюс 2 порядка, $\mathrm{Res}f(0)=0$, б) $\mathrm{Res}f(0)=1$, $\mathrm{Res}f(\pm 1)=-\dfrac{1}{2}$, в) $\mp\dfrac{i}{4}$, г) $e^{\alpha}-e^{\beta}$.

56. Найти вычеты указанных функций относительно всех изолированных особых точках и относительно бесконечно удаленной точки: а) $\dfrac{1}{z(1-z^2)}$, б) $\dfrac{\sin 2z}{(z+1)^3}$, в) $\mathrm{ctg}^2 z$, г) $\mathrm{ctg}^3 z$, д) $\cos\dfrac{1}{z-2}$,

е) $\sin z\cdot\sin\dfrac{1}{z}$, ж) $\sin\dfrac{z}{z+1}$, з) $\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$, и) $\dfrac{\sqrt{z}}{\sin\sqrt{z}}$.

Ответ: а) $\mathrm{Res}f(0)=1$, $\mathrm{Res}f(\pm 1)=-\dfrac{1}{2}$, б) $\mathrm{Res}f(-1)=2\sin 2$, $\mathrm{Res}f(\infty)=-2\sin 2$; в) $\mathrm{Res}f(k\pi)=0$, k = 0, ±1, ±2,. ..; г) $\mathrm{Res}f(k\pi)=-1$, k = 0, ±1,±2,..,; д) $\mathrm{Res}f(2)=0$, $\mathrm{Res}f(\infty)=0$; е) $\mathrm{Res}f(0)=0$, $\mathrm{Res}f(\infty)=0$, ж) $\mathrm{Res}f(-1)=-\cos 1$, $\mathrm{Res}f(\infty)=-\cos 1$, з) $\mathrm{Res}f\left(\dfrac{1}{k\pi}\right)=(-1)^{k+1}\dfrac{1}{k^2\pi^2}$, k = 0, ±1,±2,…, $\mathrm{Res}f(\infty)=\dfrac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k^2}=-\dfrac{1}{6}$, и) $\mathrm{Res}f(k^2\pi^2)=(-1)^k 2k^2\pi^2$, k = 1,2, . . .

4. Применение вычетов к вычислению интегралов

4.1. Вычисление интегралов на основе теоремы Коши

Одним из важнейших применений теории вычетов является вычисление интегралов от однозначных функций по замкнутым кривым в предположении, что в некоторой области, содержащей контур интегрирования, не заключается других особых точек, кроме изолированных особых точек однозначного характера. При этом весьма полезной является **теорема Коши**: если функция $f(z)$ непрерывна в замкнутой области D и аналитична в области D всюду за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1, z_2, ..., z_n$, то интеграл от функции $f(z)$ по контуру Г области D при обходе контура в положительном направлении (область остается слева) равен произведению $2\pi i$ на сумму вычетов функции $f(z)$ в этих особых точках:

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res} f(z_k).$$

Это основная теорема о вычетах.

Еще одна теорема имеет применение при вычислении интегралов.

Теорема. Если $f(z)$ имеет конечное число особых точек $z_1, z_2, ..., z_n$ на плоскости z, то сумма всех ее вычетов, включая вычет в бесконечно удаленной точке, равна нулю: $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res} f(z_k) + \operatorname{Res} f(\infty) = 0$.

Тогда, если контур Г охватывает все конечные особые точки, а вне его оказывается только одна бесконечно удаленная точка, то $\oint_\Gamma f(z)dz = -2\pi i \operatorname{Res} f(\infty)$. Если же в контур Г попадает некоторое большое количество *m* особых точек, а несколько оставшихся *n-m* и бесконечно удаленная точка лежат вне контура Г, то интеграл удобнее вычислять не по формуле

$\oint_\Gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res} f(z_k)$, а по формуле $\oint_\Gamma f(z)dz = -\sum_{k=m+1}^{n} \operatorname{Res} f(z_k) + \operatorname{Res} f(\infty)$, где вычислений меньше.

57. Вычислить с помощью вычетов следующие интегралы по замкнутому контуру:

а) $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz$, б) $\oint_{|z|=3} \frac{dz}{z^3+4z}$, в) $\oint_C \frac{dz}{z^4+1}$, где C — окружность $x^2+y^2=2x$, г) $\oint_{|z|=r} \sin\frac{1}{z} dz$.

Ответ: а) $2\pi i$,

б) <u>Решение</u>. Особые точки $z=0$ и $z=\pm 2i$ — полюсы 1 порядка. Они лежат внутри круга $|z|=3$. По формуле $\operatorname{Res} f(z_k) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_k}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[f(z)(z-z_k)^m\right]$ находим $\operatorname{Res} f(2i) = \lim_{z\to 2i}\frac{1}{z(z+2i)} = -\frac{1}{8}$,

$\operatorname{Res} f(-2i) = \lim_{z\to -2i}\frac{1}{z(z-2i)} = -\frac{1}{8}$, $\operatorname{Res} f(0) = \lim_{z\to 0}\frac{1}{z^2+4} = \frac{1}{4}$.

Интеграл равен сумме вычетов, умноженной на $2\pi i$: $2\pi i\left(-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\right)=0$.

<u>Ответ</u>: 0.

в) $-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i$,

г) <u>Решение</u>. $z=0$ — существенно особая точка. Она лежит в круге $|z|=r$. Разложим в ряд Лорана

$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - ...$ Поэтому $\operatorname{Res} f(0) = 1$ и интеграл равен $2\pi i$.

<u>Ответ:</u> $2\pi i$.

58. Вычислить интегралы с помощью вычетов: а) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^2dz}{(z^2+1)(z-2)}$, б) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{zdz}{(z-i)(z-3)}$.

Ответ: а) Решение. Полюсы i, $-i$, 2 лежат внутри круга. Вычислим вычеты:

$$\mathrm{Res}f(i)=\lim_{z\to i}(z-i)f(z)=\frac{1}{2i(2-i)},\quad \mathrm{Res}f(-i)=-\frac{1}{2i(2+i)},\quad \mathrm{Res}f(2)=\frac{4}{5}.$$

Тогда интеграл равен $2\pi i\left(\frac{1}{2i(2-i)}-\frac{1}{2i(2+i)}+\frac{4}{5}\right)=2\pi i\frac{10+5i-10+5i+40i}{2i(4+1)5}=2\pi i$

Вычислим тот же интеграл с помощью вычета в бесконечно удаленной точке. Представим функцию в виде

$$f(z)=\frac{z^2}{z^3\left(1+\frac{1}{z^2}\right)\left(1-\frac{2}{z}\right)}=\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{z^2}+\ldots\right)\left(1+\frac{2}{z}+\ldots\right)=\frac{1}{z}+\ldots$$

Тогда $\mathrm{Res}f(\infty)=-1$ и интеграл равен $2\pi i$.

Ответ: $2\pi i$.

б) $\frac{2\pi}{3-i}$.

59. Найти интеграл $\oint\limits_C \frac{dz}{z(z+2)(z+4)}$, если: а) $C:|z|=1$, б) $C:|z|=3$, в) $C:|z|=5$.

Ответ: а) $\frac{\pi i}{4}$, б) $-\frac{\pi i}{4}$, в) 0.

60. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^{20}dz}{(2z^3+1)^2(z^4-1)^3}$.

Решение. Все особые точки $z_k=\sqrt[4]{1},\sqrt[3]{-0{,}5}$ лежат в круге $|z|=2$. Вычисление вычетов в этих точках довольно затруднительно, поэтому воспользуемся формулой $I=2\pi i\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathrm{Res}\,f(z_k)=-2\pi i\mathrm{Res}\,f(\infty)$.

Представим функцию в виде $\frac{z^{20}}{4z^6\left(1+\frac{1}{2z^3}\right)^2 z^{12}\left(1-\frac{1}{z^4}\right)^3}=$

$$\frac{z^2}{4}\left(1-\frac{1}{2z^3}+\frac{1}{4z^6}-\ldots\right)^2\left(1+\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^8}\right)^3=\frac{z^2}{4}-\frac{1}{4z}+\ldots$$

Тогда $\mathrm{Res}f(\infty)=\frac{1}{4}$ и интеграл равен $-2\pi i\mathrm{Res}f(\infty)=-\frac{\pi i}{2}$.

Ответ: $-\frac{\pi i}{2}$.

61. Вычислить интегралы с помощью вычетов: а) $\oint\limits_{|z|=4} \frac{(z^3+1)dz}{(z+2)^2(z-3)}$, б) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos zdz}{z^3(z+4)}$,

в) $\oint\limits_{|z|=3} z^3\cos\frac{1}{z-2}dz$, г) $\oint\limits_{|z|=1} e^{z+\frac{1}{z}}dz$.

Ответ: а) $-2\pi i$, б) $-\frac{7\pi i}{32}$, в) $-\frac{143\pi i}{12}$, г) $2\pi i\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(n+1)!}\right)$.

62. Используя вычет в бесконечности, вычислить интегралы: а) $\oint\limits_{|z|=2}\frac{dz}{z^{15}+1}$, б) $\oint\limits_{|z|=1,1}\frac{z^5+z^3}{z^4+1}dz$,

в) $\oint\limits_{|z|=3}\frac{\sin\frac{1}{z}}{z(z+1)^2(z+2)(z+4)}dz$, г) $\oint\limits_{|z|=3}\frac{z^3e^{\frac{1}{z}}}{(z^2+4)^2}dz$.

Ответ: а) 0; б) $2\pi i$, в) $\frac{\pi i}{36}\sin\frac{1}{4}$, г) $-2\pi i$.

63. Вычислить интеграл по замкнутому контуру при положительном направлении обхода:
$\oint\limits_{|z|=1,5}\frac{z^3}{z^4+2}dz$.

Ответ: $2\pi i$.

64. Вычислить интегралы: а) $\oint\limits_{|z-2|=\frac{1}{2}}\frac{zdz}{(z-2)^2(z-1)}$, б) $\oint\limits_{|z+1|=1}\frac{z^2}{z^4+1}dz$, в) $\oint\limits_{|z|=1}\frac{\operatorname{ctg}z}{4z-\pi}dz$,

г) $\oint\limits_{|z-1-i|=1}\frac{dz}{z^3+1}$.

Ответ: а) $-2\pi i$, б) $-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i$, в) $2\pi i\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{\pi}\right)$, г) $\frac{\pi}{3}\left(\sqrt{3}-i\right)$.

4.2. Вычисление определенных интегралов с помощью вычетов

Некоторые определенные интегралы от функций действительного переменного удается преобразовать в интеграл по замкнутому контуру от функции комплексного переменного, что позволяет применить для вычисления этих интегралов основную теорему о вычетах. Причем часто удается достаточно просто получить ответ и в тех случаях, когда применение других методов анализа оказывается затруднительным.

Рассмотрим интеграл вида $I=\int_0^{2\pi}F(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$. Подстановка $z=e^{i\theta}$, для $d\theta=\frac{dz}{iz}$, $\cos\theta=\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$, $\sin\theta=\frac{1}{2i}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)=\frac{-i}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)$, превратит действительный интеграл в комплексный. При изменении θ от 0 до 2π комплексная переменная пробегает замкнутый контур — окружность $|z|=1$ в положительном направлении. Окончательно интеграл имеет вид:

$$I=\frac{1}{i}\oint\limits_{|z|=1}F\left(z+\frac{1}{z},z-\frac{1}{z}\right)\frac{dz}{z}.$$

65. Вычислить интеграл $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}$, $a>1$.

Решение. Положим $\exp(ix)=z$. При изменении x от 0 до 2π переменная z пробегает окружность $|z|=1$ в положительном направлении.

Выразим $\cos x=\frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)=\frac{z^2+1}{2z}$, $dz=ie^{ix}dx=izdx$, $dx=\frac{dz}{iz}$.

Тогда $I = \oint\limits_{|z|=1} \dfrac{dz}{iz\left(\dfrac{z^2+1}{2z}+a\right)} = \dfrac{2}{i}\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{dz}{z^2+2az+1}$.

Корни знаменателя $z_1 = -a+\sqrt{a^2-1}$, $z_2 = -a-\sqrt{a^2-1}$ — полюсы 1 порядка, $|z_1|<1$ и z_1 лежат внутри круга $|z|=1$:

$$\operatorname{Res} f(z_1) = \left.\frac{1}{z-z_2}\right|_{z=z_1} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}.$$

Интеграл равен $\dfrac{2}{i}\dfrac{2\pi i}{2\sqrt{a^2-1}} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.

Ответ: $\dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.

66. Найти определенные интегралы, положив $e^{i\varphi} = z$: а) $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{d\varphi}{(5+4\cos\varphi)^2}$, б) $\int\limits_0^{\pi} \operatorname{tg}(\varphi+i)d\varphi$.

а) Решение. Подстановка $z = \exp(i\varphi)$ дает $i\varphi = \ln z$, $\varphi = \dfrac{1}{i}\ln z$, $d\varphi = \dfrac{1}{i}\dfrac{dz}{z}$.

Выразим $\cos\varphi = \dfrac{1}{2}\left(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right) = \dfrac{z^2+1}{2z}$.

Теперь подынтегральная функция

$$\frac{d\varphi}{(5+4\cos\varphi)^2} = \frac{1}{i}\frac{dz}{z\left(5+\dfrac{2\left(z^2+1\right)}{z}\right)^2} = \frac{zdz}{i\left(2z^2+5z+2\right)^2} = \frac{zdz}{4i(z+2)^2\left(z+\dfrac{1}{2}\right)^2}$$

Точка $z = -\dfrac{1}{2}$ — полюс 2 порядка, лежит внутри круга $|z|=1$

$$\operatorname{Res} f\left(-\frac{1}{2}\right) = \lim_{z\to-\frac{1}{2}}\left(\frac{z}{(z+2)^2}\right)' = \lim_{z\to-\frac{1}{2}}\frac{-z+2}{(z+2)^3} = \frac{5}{27}.$$

Окончательно $\dfrac{1}{4i}\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{zdz}{(z+2)^2\left(z+\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{10\pi}{27}$.

Ответ: $\dfrac{10\pi}{27}$.

б) Решение. Здесь удобнее замена $z = \exp(2i\varphi)$. Когда φ изменяется от 0 до π z пробегает окружность $|z|=1$.

Выразим $2i\varphi = \ln z$, $d\varphi = \dfrac{1}{2i}\dfrac{dz}{z}$, тогда $\operatorname{tg}(\varphi+i) = \dfrac{e^{i(\varphi+i)}-e^{-i(\varphi+i)}}{i\left(e^{i(\varphi+i)}+e^{-i(\varphi+i)}\right)} = \dfrac{e^{i\varphi}e^{-1}-e^{-i\varphi}e}{i\left(e^{i\varphi}e^{-1}+e^{-i\varphi}e\right)} =$

$\dfrac{\dfrac{\sqrt{z}}{e}-\dfrac{e}{\sqrt{z}}}{i\left(\dfrac{\sqrt{z}}{e}+\dfrac{e}{\sqrt{z}}\right)}=\dfrac{z-e^2}{i\left(z+e^2\right)}$. В нашем случае $z=0$ и $z=-e^2$ — простые полюсы. В круге $|z|=1$ лежит $z=0$ $\text{Res}f(0)=-1$. Интеграл равен $\dfrac{1}{2i^2}\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{z-e^2}{z+e^2}\dfrac{dz}{z}=2\pi i\dfrac{1}{2i^2}(-1)=\pi i$.

Ответ: πi.

67. Вычислить интегралы: а) $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{\cos^2 2x}{5-4\cos x}dx$, б) $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{\cos^2 2xdx}{1-2p\cos x+p^2}$, $|p|<1$,

в) $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{\cos^3 3xdx}{1-2p\cos 2x+p^2}$, $|p|<1$.

Ответ: а) $\dfrac{17\pi}{48}$, б) $\pi\dfrac{1+p^4}{1+p^2}$, в) $\pi\dfrac{1-p+p^2}{1-p}$.

68. Вычислить интегралы (n - целое, a - действительное число):

а) $\int\limits_0^{2\pi}e^{\cos\varphi}\cos(n\varphi-\sin\varphi)d\varphi$, б) $\int\limits_0^{\pi}\text{tg}(x+ia)dx$.

Ответ:. а) $\dfrac{2\pi}{n!}$, если $n>0$; 0, если $n<0$, б) $i\pi\,\text{sign}(a)$ при $a=0$ главное значение интеграла равно 0.

4.3. Несобственные интегралы от действительной переменной

Пусть требуется найти интеграл по отрезку $[a,b]$ от вещественной функции $f(x)$. Отрезок $[a,b]$ дополняется кривой *C*, которая вместе с ним ограничивает некоторую область *D*. Функция аналитически продолжается в область, построенную таким образом. К аналитическому продолжению $f(z)$ применяется теорема о вычетах. Если интеграл по контуру *C* удается вычислить или выразить через интеграл по отрезку $[a,b]$, то это позволит найти этот последний и тем самым решить задачу.

В частности, если отрезок интегрирования бесконечный, то рассматривают семейство расширяющихся контуров интегрирования, чтобы в результате предельного перехода получить искомый интеграл по бесконечному отрезку интегрирования.

Оценку интеграла по контуру *C* иногда можно производить при помощи лемм Жордана. Пусть подынтегральная функция $f(z)$ является аналитической в верхней полуплоскости за исключением некоторых точек $z_1,z_2,\ldots,z_n$, не находящихся на вещественной оси.

Рассмотрим интеграл $\int\limits_{C_R}f(z)dz$ по верхней полуокружности C_R, опирающийся на отрезок $[-R,R]$ вещественной оси.

1) Если *M(R)* есть максимум модуля $f(z)$ на данной полуокружности и если $R\cdot M(R)\to 0$ при $R\to\infty$, то $\int\limits_{C_R}f(z)dz\to 0$ при $R\to\infty$.

2) Если $M(R)\to 0$ при $R\to\infty$, то $\int\limits_{C_R}f(z)e^{imz}dz\to 0$ при $R\to\infty$ (*m*>0). Для *m*< 0 в условиях леммы нужно заменить верхнюю полуплоскость на нижнюю и соответственно верхнюю полуокружность на нижнюю. Леммы Жордана обычно используются при вычислении несобственных интегралов.

Пример 1. Вычислим интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx}{x^4+1}=I$

Аналитическое продолжение подынтегральной функции в верхнюю полуплоскость, а именно функция $f(z)=\dfrac{1}{z^4+1}$, удовлетворяет всем условиям, относящимся к вычислению интегралов с помощью вычетов, и 1-й лемме Жордана. Особыми точками функции в верхней полуплоскости являются точки $z_k=\exp\left(\dfrac{i\pi}{4}(2k+1)\right)$ $(k=0,1)$, причем обе эти точки — полюсы 1-го порядка. Поэтому

$$I=2\pi i\sum_{k=0}^{1}\operatorname{Res}f(z_k)=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\alpha x}{x^2+a^2}dx,\ a>0,\alpha>0$.

Чтобы иметь возможность воспользоваться 2-й леммой Жордана, заметим, что в силу формулы Эйлера

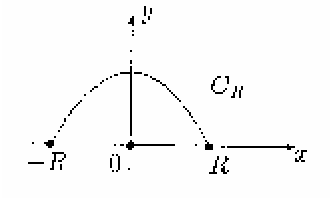
$$I=\operatorname{Re}I_1=\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\alpha x}}{x^2+a^2}dx.$$

Аналитическое продолжение подынтегральной функции интеграла I_1 - функция $\dfrac{e^{i\alpha z}}{z^2+a^2}$, имеет в верхней полуплоскости единственную особую точку $z_1=ia$, являющуюся полюсом 1-го порядка. Поэтому по основной теореме о вычетах $I_1=2\pi i\cdot\operatorname{Res}\left(\dfrac{e^{i\alpha z}}{z^2+a^2}\Big|_{z=ia}\right)=\dfrac{\pi}{a}e^{-\alpha a}$ и $I=\dfrac{\pi}{a}e^{-\alpha a}$.

69. Вычислить интегралы: а) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3}$, б) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+4)^2}$.

а) <u>Решение</u>. Рассмотрим интеграл по контуру, состоящему из отрезка $[-R,R]$ и дуги C_R

$$\oint_C\frac{dz}{(z^2+1)^3}=\int_{-R}^{R}\frac{dx}{(x^2+1)^3}+\int_{C_R}\frac{dz}{(z^2+1)^3}.$$



$z=i$ — полюс 3 порядка и $\operatorname{Res}f(i)=\dfrac{1}{(3-1)!}\lim\limits_{z\to i}\left(\dfrac{(z-i)^3}{(z-i)^3(z+i)^3}\right)''=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{z\to i}\dfrac{(-3)(-4)}{(z+i)^5}=\dfrac{6}{32i^5}=-\dfrac{3i}{16}$.

Тогда интеграл в левой части равен $2\pi i\left(-\dfrac{3i}{16}\right)=\dfrac{3\pi}{8}$ и приходим к такому равенству:

$$\frac{3\pi}{8}=\int_{-R}^{R}\frac{dx}{(x^2+1)^3}+\int_{C_R}\frac{dz}{(z^2+1)^3}.$$

Оценим второй интеграл при $R\to\infty$. Максимум модуля подынтегральной функции $f(z)$ обозначим $M(R)$. Если $R\cdot M(R)\underset{R\to\infty}{\to}0$, то $\displaystyle\int_{C_R}f(z)dz\underset{R\to\infty}{\to}0$.

Тогда имеем $R\cdot M(R)=\max\limits_{C_R}\dfrac{R}{\left|(z^2+1)^3\right|}\le\dfrac{R}{(R^2-1)^3}\underset{R\to\infty}{\to}0$. Окончательно $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3}=\frac{3\pi}{8}$.

<u>Ответ</u>: $\dfrac{3\pi}{8}$.

Ответ: б) $\frac{\pi}{16}$.

70. Вычислить интегралы: а) $\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} dx$, б) $\int_0^\infty \frac{x \sin x}{x^2+1} dx$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{2}$, б) $\frac{\pi}{2e}$.

71. Вычислить интегралы: а) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$, б) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^4+1}{x^6+1} dx$.

Ответ: а) $\pi\sqrt{2}$, б) $\frac{4\pi}{3}$.

72. Вычислить интегралы:

а) $\int_0^\infty \frac{x \sin ax}{x^2+r^2} dx, a>0$, б) $\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^4+1} dx, a>0$, в) $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)} dx, a>0, b>0$.

Ответ: а) $\pi e^{ar}, a>0, r>0$, б) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}} \left(\cos\frac{a}{\sqrt{2}} + \sin\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$, в) $\frac{\pi}{2b^2}\left(1-e^{-ab}\right)$.

73. Вычислить интегралы с бесконечными пределами: а) $\int_{-\infty}^\infty \frac{xdx}{(x^2+4x+13)^2}$, б) $\int_0^\infty \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2}, a>0$,

в) $\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin ax}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx, a>0, b>0$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{27}$, б) $\frac{\pi}{4a}$, в) $\frac{\pi(2a+b)}{2a^3b(a+b)^2}$.

74. Пользуясь леммой Жордана, вычислить указанные интегралы: а) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x\cos xdx}{x^2-2x+10}$,

б) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x\sin xdx}{x^2-2x+10}$, в) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x\sin xdx}{x^2+4x+20}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{3e^3}(\cos 1 - 3\sin 1)$, б) $\frac{\pi}{3e^3}(3\cos 1+\sin 1)$, в) $\frac{\pi}{2e^4}(2\cos 2+\sin 2)$.

5. Тестирование по пройденному материалу

1. Вычислить $\int_0^{1+i} zdz$.

2. Написать интегральную формулу Коши, выражающую значения функции $f(z)$ в области через значения функции $f(z)$ на границе L области.

3. Определить радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^\infty \frac{nz^n}{2^n}$.

4. Найти особые точки функции $\frac{z+2}{z(z-1)^3}$ и определить их тип.

5. Что такое вычет функции? Как он обозначается?

6. Написать ряды для функций $\frac{1}{1-z}$, $\frac{1}{1+z}$.

7. Формула для определения радиуса сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$.

8. Написать общий вид ряда Лорана.

9. Перечислить типы особых точек.

10. Сформулировать первую лемму Жордана.

6. Литература

Основной список

1. *Алешков Ю. 3.* Лекции по теории функций комплексного переменного. –СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та. 1999. – 196 с.
2. *Алешков Ю. 3., Смышляев П. П.* Теория функций комплексного переменного и ее приложения. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та.. 1986.— 248 с.
3. *Маркушевич А. И., Маркушевич Л. А.* Введение в теорию аналитических функций. – М.., 1977,— 320 с.
4. *Привалов И. И.* Введение в теорию функций комплексного переменного.– М.: Наука, 1977.- 444 с.
5. *Свешников А. Г.. Тихонов А. Н.* Теория функций комплексной переменной. – М.: Наука. 1967. 304 с.

Дополнительная литература

6. *Бицадце А. В.* Основы теории аналитических функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1984.- 320 с.
7. *Диткин В. А., Прудников А, П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление.– М.: Наука., 1974. — 542 с.
8. *Диткин В. А., Кузнецов П. И.* Справочник по операционному исчислению.— М.: Л., 1951.— 256 с.
9. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1965. - 716 с.
10. *Романовский П. И.* Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразования Лапласа. – М.: Наука. 1980. 336 с.
11. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 3, ч. 2.— М.: Наука, 1974.— 672 с.
12. *Соломенцев Е. Д.* Функции комплексного переменного и их применения. — М.: Высш. шк., 1988.
13. *Стоилов С.* Теория функций комплексного переменного. Т. 1, 2.— М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
14. *Фукс Б. А., Левин В, И.* Функции комплексного переменного и некоторые их приложения.— М.; Л.: Наука, 1951.— 308 с.
15. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ.— М.: Наука, 1969.— 576 с.
16. *Шостак Р. Я.* Операционное исчисление.— М., 1968.– 192 с.

Задачники

1. *Ангилейко И.М., Козлова Р.В.* Задачи по теории функций комплексной переменной. Минск: Вышейшая школа, 1976. 128 с.
2. *Волковыский Л.И., Лунц Г. Л., Араманович И.Г.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: Физматгиз, 1960. 368 с.
3. *Грищенко А.Б. и др.* Теория функций комплексного переменного: решение задач: Учеб. пособие. Киев: Вища школа, 1986. 333 с.
4. *Гюнтер Н.М., Кузьмин Р. О.* Сборник задач по высшей математике. Т.3. М.; Л.: ГИТТЛ, 1951. 268 с.
5. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.2. М.: Высшая школа, 1980. 366 с.
6. *Коппенфельс В.. Штальман Ф.* Практика конформных отображений. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.— 486 с.
7. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965. 716 с.

8. Сборник задач по теории аналитических функций/ Под ред. М.А. Евграфова. 2-е изд. М.: Наука, 1972. 416 с.
9. Старков В.Н. Задачи по теории функций комплексного переменного: Учебное пособие.— СПб.: Изд-во С.-Петербургского университета, 1998.— 100 с