На дневном, на вечернем и на заочном отделениях факультета прикладной математики-процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета читается годовой (один раз в неделю) курс по Теории функций комплексного переменого (ТФКП). Вашему вниманию предлагается программа этого курса.

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Глава 1. Комплексные числа и действия над ними

1.1. Определение комплексного числа. Действия с комплексными числами, записанными в алгебраической форме.

1.2. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Тригонометрическая и показательная формы комплексных чисел.

1.3. Умножение и деление комплексных чисел, записанных в различных формах.

1.4. Возведение в степень и извлечение корня из комплексного числа.

1.5. Понятие расширенной комплексной плоскости. Стереографическая проекция. Сфера Римана.

Глава 2. Функции комплексного переменного

2.1. Множества точек на плоскости. Кривая Жордана. Односвязные и многосвязные области.

2.2. Определение функции комплексного переменного. Предел и непрерывность функции.

2.3. Производная и дифференциал. Правила дифференцирования.

2.4. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции комплексного переменного. Аналитичность (регулярность) функции в точке и области.

2.5. Вещественная и мнимая части аналитической функции. Связь аналитических функций с гармоническими.

Глава 3. Конформные отображения

3.1. Геометрический смысл аргумента и модуля производной функции комплексного переменного.

3.2. Определение конформного отображения.

3.3. Линейная функция.

3.4. Инверсия.

3.5. Дробно-линейная функция.

3.6. Целая степенная функция.

3.7. Однолистность комплексной функции. Поверхность Римана. Понятие полной аналитической функции.

3.8. Радикал.

3.9. Показательная функция.

3.10. Логарифмическая функция.

3.11. Функция Жуковского. Применение функции Жуковского к задачам обтекания.

3.12. Тригонометрические функции комплексного переменного.

3.13. Обратные тригонометрические функции и гиперболические функции комплексного переменного.

3.14. Основные задачи и принципы (соответствия границ и соответствия областей) теории конформных отображений. Теорема Римана.

Глава 4. Интегрирование функций комплексного переменного

4.1. Определение интеграла от функции комплексного переменного, его свойства. Теорема об оценке.

4.2. Интегральная теорема Коши и ее следствия.

4.3. Теорема о первообразной.

4.4. Интегральная формула Коши.

4.5. Принцип максимума модуля аналитической функции.

4.6. Производные высших порядков от функций комплексного переменного.

4.7. Неравенство Коши и теорема Лиувилля.

4.8. Теорема Мореры.

4.9. Понятие аналитического продолжения. Принцип непрерывного продолжения. Теорема единственности аналитической функции.

Глава 5. Представление аналитических функций рядами

5.1. Последовательности комплексных чисел, теорема Больцано-Вейерштрасса. Основные теоремы теории пределов. Критерий Коши.

5.2. Ряды комплексных чисел. Абсолютная и условная сходимость ряда.

5.3. Функциональные ряды. Признак Вейерштрасса о равномерной сходимости ряда.

5.4. Степенные ряды. Теоремы Абеля о сходимости степенного ряда.

5.5. Непрерывность и аналитичность суммы степенных рядов.

5.6. Ряд Тейлора. Теорема о разложении функции в ряд Тейлора. Разложения элементарных функций в степенные ряды.

5.7. Примеры построения аналитического продолжения с помощью степенных рядов.

5.8. Ряд Лорана. Теорема Лорана.

5.9. Изолированные особые точки, их классификация с помощью ряда Лорана. Нули аналитических функций, связь между нулями и полюсами.

5.10. Теорема Сохоцкого-Вейерштрасса о поведении аналитической функции вблизи существенно особой точки.

5.11. Разложение в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки (случаи устранимой точки, полюсов и существенно особой точки).

5.12. Понятие целой и мероморфной функции.

Глава 6. Вычеты функций и их применение

6.1. Вычет функции относительно изолированной особой точки. Основная теорема о вычетах.

6.2. Вычисление вычетов в конечных особых точках.

6.3. Вычет функции в бесконечно удаленной точке. Теорема о сумме вычетов в конечном числе особых точек.

6.4. Лемма Жордана.

6.5. Теорема о вычислении интегралов с помощью вычетов.

6.6. Вычисление интеграла в случае, когда особые точки лежат на пути интегрирования.

6.7. Логарифмическая производная функции и ее вычеты.

6.8. Принцип аргумента аналитической функции.

6.9. Теорема Руше и ее следствие (основная теорема алгебры).

6.10. Применение принципа аргумента к вопросам устойчивости. Критерий Михайлова.

Глава 7. Операционное исчисление

7.1. Преобразование Лапласа. Оригинал и изображение. Свойство линейности.

7.2. Функция Хевисайда. Таблица изображений основных функций.

7.3. Теорема о существовании изображения.

7.4. Определение оригинала по изображению. Формула Меллина.

7.5. Первая и вторая теоремы разложения.

7.6. Условия существования оригинала. Теорема обращения.

7.7. Теорема подобия и теорема запаздывания.

7.8. Теорема смещения и теорема упреждения.

7.9. Теорема умножения изображений.

7.10. Теорема умножения оригиналов.

7.11. Изображения периодических оригиналов.

7.12. Дифференцирование оригиналов и интегрирование оригиналов.

7.13. Дифференцирование изображения и интегрирование изображения.

7.14. Применение преобразования Лапласа к вычислению несобственных интегралов.

7.15. Интегрирование ОДУ с постоянными коэффициентами с помощью преобразования Лапласа.

7.16. Интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений.

7.17. Применение интеграла Дюамеля к интегрированию ОДУ.

7.18. Интегрирование ОДУ с переменными (функциональными) коэффициентами.

7.19. О функциях с запаздывающим аргументом и их изображениях.

7.20. Интегрирование ОДУ. содержащих в правой части функцию Хевисайда.
7.21. Интегрирование ОДУ с запаздывающим аргументом с помощью преобразования Лапласа.
7.22. Решение интегральных уравнений Вольтерра с помощью преобразования Лапласа.
7.23. Решение нестационарных задач математической физики с помощью операционного метода.

ЛИТЕРАТУРА

Основной список

1. *Алешков Ю. 3.* Лекции по теории функций комплексного переменного. –СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та. 1999. – 196 с.
2. *Алешков Ю. 3., Смышляев П. П.* Теория функций комплексного переменного и ее приложения. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та.. 1986.— 248 с.
3. *Маркушевич А. И., Маркушевич Л. А.* Введение в теорию аналитических функций. – М.., 1977,— 320 с.
4. *Привалов И. И.* Введение в теорию функций комплексного переменного.– М.: Наука, 1977.- 444 с.
5. *Свешников А. Г.. Тихонов А, Н.* Теория функций комплексной переменной. – М.: Наука. 1967. 304 с.

Дополнительная литература

6. *Бицадце А. В.* Основы теории аналитических функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1984.- 320 с.
7. *Диткин В. А., Прудников А, П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление.– М.: Наука., 1974. — 542 с.
8. *Диткин В. А., Кузнецов П. И.* Справочник по операционному исчислению.— М.: Л., 1951.— 256 с.
9. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1965. - 716 с.
10. *Романовский П. И.* Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразования Лапласа. – М.: Наука. 1980. 336 с.
11. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 3, ч. 2.— М.: Наука, 1974.— 672 с.
12. *Соломенцев Е. Д.* Функции комплексного переменного и их применения. — М.: Высш. шк., 1988.
13. *Стоилов С.* Теория функций комплексного переменного. Т. 1, 2.— М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
14. *Фукс Б. А., Левин В, И.* Функции комплексного переменного и некоторые их приложения.— М.; Л.: Наука, 1951.-— 308 с.
15. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ.— М.: Наука, 1969.— 576 с.
16. *Шостак Р. Я.* Операционное исчисление.— М., 1968.– 192 с.

Вашему вниманию предлагается сокращенная версия сборника задач [Старков В.Н. ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО: Учебное пособие.— СПб.: Изд-во С.-Петербургского университета, 1998.— 100 с.]

В пособии рассмотрены некоторые разделы ТФКП, соответствующие курсу лекций, читаемых на факультете прикладной математики-процессов управления СПбГУ. При составлении пособия использовались различные источники, список которых приведен. В каждом пункте даются краткие сведения теоретического характера с целью сделать читателя менее зависимым от наличия или отсутствия у него соответствующей литературы. Для некоторых задач решение доведено до конца, для других даются указания к решению, для всех задач приведены ответы.

Пособие предназначено для студентов университетов, обучающихся на дневном, вечернем и заочном отделениях.

Весь материал поделен на три части, их содержание приведено ниже.

Часть 1

Литература по первой части

1. *Ангилейко И.М., Козлова Р.В.* Задачи по теории функций комплексной переменной. Минск: Вышейшая школа, 1976. 128 с.
2. *Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: Физматгиз, 1960. 368 с.
3. *Грищенко А.Б. и др.* Теория функций комплексного переменного: решение задач: Учеб. пособие. Киев: Вища школа, 1986. 333 с.
4. *Гюнтер Н.М., Кузьмин Р. О.* Сборник задач по высшей математике. Т.3. М.; Л.: ГИТТЛ, 1951. 268 с.
5. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.2. М.: Высшая школа, 1980. 366 с.

6. *Коппенфельс В.. Штальман Ф.* Практика конформных отображений. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.— 486 с.
7. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965. 716 с.
8. Сборник задач по теории аналитических функций/ Под ред. М.А. Евграфова. 2-е изд. М.: Наука, 1972. 416 с.
9. Старков В.Н. Задачи по теории функций комплексного переменного: Учебное пособие.— СПб.: Изд-во С.-Петербургского университета, 1998.— 100 с

1 Комплексные числа и действия над ними

Комплексным числом z называется выражение вида $z = x + iy$, где x и y — вещественные числа, i— мнимая единица, $i = \sqrt{-1}$. Комплексное число можно изобразить на плоскости *XOY* точкой с координатами x и y. Полярные координаты r и φ точки (x, y) соответствуют модулю $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ и аргументу $\varphi = Argz$ комплексного числа z. Аргумент определяется из формул $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ *с* точностью до слагаемого $2k\pi$: $Argz = \arg z + 2k\pi$, $k \in Z$. Из множества значений аргумента особо выделяется главное значение $\arg z$, удовлетворяющее неравенству $-\pi < \arg z \le \pi$. При этом полезны формулы

$$\arg z = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, & x > 0 \\ arctg\dfrac{y}{x} + \pi, & x < 0,\ y \ge 0, \\ arctg\dfrac{y}{x} - \pi, & x < 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Кроме алгебраической формы $z = x + iy$ часто используют тригонометрическую форму комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Пользуясь формулой Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, можно получить показательную форму любого комплексного числа, кроме $z = 0 + i0$: $z = re^{i\varphi}$. Сложение и вычитание комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ осуществляются по формулам $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$. Умножение, деление и возведение в степень удобнее производить в показательной форме. Пусть $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$ тогда произведение и частное

$$z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},\ \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

С помощью формулы Муавра $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$ можно получить формулу для степени числа: $z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi} = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

Корень n-й степени из комплексного числа имеет n различных значений (k = 0, 1, 2,..., $n-1$):

$$z_k = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right).$$

Геометрически эти n значений корня изображаются вершинами правильного n-угольника с полярными координатами $\left(\sqrt[n]{r}, \frac{1}{n}(\varphi + 2k\pi)\right)$. Здесь $\varphi = \arg z$.

1.1 Действия над комплексными числами

1. Найти модуль комплексного числа: а) $z = \sqrt{10} - i$; б) $z = \left(\frac{a+bi}{b+ai}\right)^n$;

Ответ: 1а) $|z| = \sqrt{11}$; 1б) $|z| = 1$.

2. Решить уравнения: а) $x^2 - 2x + 5 = 0$; б) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 4 = 0$.

Ответ: 2а) $x = 1 \pm 2i$; 2б) $x = \sqrt{3} \pm i$.

3. Составить квадратное уравнение по его корням (воспользоваться теоремой Виета):

а) $x_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $x_2 = 1 - i\sqrt{3}$; б) $x_1 = 2 + 3i$, $x_2 = 2i$.

Ответ: 3а) $x^2 - 2x + 4 = 0$; 3б) $x^2 - (2+5i)x - 6 + 4i = 0$

• Замечание: в случае сопряженных корней квадратное уравнение имеет вещественные коэффициенты.

4. Найти комплексное число из уравнения: $(2-3i)z = -1 - 5i$.

Ответ: $z = 1 - i$

5. Выполнить действия: а) $\frac{4+i}{2-i} + \frac{5-3i}{3+i}$, б) $\frac{3+i}{(1+i)(1-2i)}$.

Ответ: 5а) $\frac{13}{5} - \frac{1}{5}i$, 5б) $\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$.

6. Выполнить действия: а) $\frac{(\sqrt{10}+i)(17+19i)}{19-17i}$, б) $\frac{(1+i)(3+i)}{3-i} + \frac{(1-i)(3-i)}{3+i}$.

Ответ: 6а) $-1 + i\sqrt{10}$, 6б) $\frac{14}{5}i$.

7. Записать в комплексной форме действительные выражения:

а) $x^2 + 2x + y^2 - y = 1$; **б)** $x + y + xy = 2$.

Ответ: 7а) $2i|z|^2 + (2i-1)z + (2i+1)\bar{z} = 2i$,

7б) $z^2 - \bar{z}^2 + 2(1+i)z - 2(1-i)\bar{z} = 8i$.

• Указание: воспользоваться формулами $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

8. Доказать равенства: а) $\frac{6-i}{3+4i} = \frac{13+41i}{-25+25i}$, б) $\frac{2+i}{3-i} = \frac{18-i}{17-19i}$.

9. Составить квадратное уравнение с действительными коэффициентами, один из корней которого равен: а) $(3-i)(2i-4)$, б) $\frac{5+i}{i-3}$.

Ответ: 9а) $x^2 + 20x + 200 = 0$; 9б) $5x^2 + 14x + 13 = 0$.

• Указание: комплексные корни квадратного уравнения с действительными коэффициентами являются сопряженными.

10. Выполнить действия:

а) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 \left(\frac{2-i}{4+3i} - \frac{1-2i}{3+4i}\right)$, б) $\frac{(1+i)^3}{(1-i)^2} + \frac{3+2i}{i(6-8i)} \cdot (1+i)^2$.

Ответ: 10а) $\frac{2}{5}$, 10б) $-\frac{24+7i}{25}$.

11. Найти значение выражения при заданном x_0:

а) $x^4 + x^2 + 1$, $x_0 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, б) $(1 + 2x + 3x^2)(1 + 3x + 2x^2)$, $x_0 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: 11а) i; 11б) $-18 + 5i\sqrt{3}$.

12. Вычислить: а) $\frac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2}$, б) $\frac{(\sqrt{3}+i)^6}{(1+i)^8 - (1-i)^4}$.

Ответ: 12а) $\frac{22}{159} - \frac{5}{318}i$, 12б) $-\frac{16}{5}$.

1.2 Тригонометрическая форма комплексного числа

13. Представить в тригонометрической форме числа: а) $z = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, б) $z = 3 + 4i$.

Ответ: 13а) $z = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, 13б) $z = 5(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\varphi = arctg\frac{4}{3}$.

14. Записать в тригонометрической форме числа:

а) $z = \frac{1}{2i}(1 + i\sqrt{3})(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)^{-1}$.

б) $z=(i-1)\left(i\left(1-\cos\frac{2\pi}{5}\right)+\sin\frac{2\pi}{5}\right)^{-1}$.

Ответ: 14а) $\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$, 14б) $\frac{1}{\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{5}}\left(\cos\frac{11\pi}{20}+i\sin\frac{11\pi}{20}\right)$.

15. Вычислить значения корней, используя тригонометрическую форму комплексных чисел:

а) $\sqrt{-9i}$, б) $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}$.

Ответ: 15а) $\pm\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{2}}i\right)$, 15б) $\sqrt{3}+i,\ -1+i\sqrt{3},\ -\sqrt{3}-i,\ 1-i\sqrt{3}$.

16. Представить z в алгебраической форме: а) $z=(i-\sqrt{3})\left(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}\right)(1-i)^{-1}$,

б) $z=i^{-5}\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)(1+i\sqrt{3})^{7}$.

Ответ: 16а) $z=-\sqrt{2}$; 16 б) $z=-2^{7}i$.

17. С помощью формулы Муавра выразить $\cos 3\varphi$ и $\sin 3\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$.

Ответ: $\cos 3\varphi=4\cos^3\varphi-3\cos\varphi$, $\sin 3\varphi=-4\sin^3\varphi+3\sin\varphi$.

1.3 Решение уравнений

18. При каких действительных x и y справедливы равенства: а) $\frac{8i}{x}+iy-2=7i-\frac{10}{x}+y$,

б) $\frac{y+ix}{x+iy}=\frac{4+x}{4i+1}$?

Ответ: 18 а) $x=2,\quad y=3$, 18 б) $x=-4\pm\sqrt{15},\quad y=1$.

19. Найти действительные x и y из уравнений:

а) $(\ln x+i\ln y)+(\ln y+i\ln\frac{1}{x})=2+i$, б) $(-1+i)\sin x+i\cos y=\cos x$.

Ответ: 19а) $x=\sqrt{e},\quad y=e\sqrt{e}$, 19б) $x_1=k\pi+\frac{\pi}{4},\ y_1=k\pi-\frac{\pi}{4},\ x_2=k\pi-\frac{\pi}{4}$,

$y_2=k\pi+\frac{\pi}{4},\ k\in Z$.

20. При каких действительных значениях x и y числа z_1 и z_2 будут комплексно сопряженными?

а) $z_1=-3+ix^2y$, $z_2=x^2+y+4i$, б) $z_1=9y^2-4-10xi^5$, $z_2=8y^2+20i^{11}$.

Ответ: 20а) $x = 1, \quad y = -4$ или $x = -1, \quad y = -4$; 20б) $x = -2, \quad y = -2$ или $x = -2, \quad y = 2$.

21. Решить уравнения:

а) $z^2 - 8z - 3iz + 13 + 13i = 0$, б) $z^3 - z^2 + z - 1 = 0$,

в) $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, г) $(3+i)z^2 + (1-i)z - 6i = 0$.

Ответ: 21а) $z_1 = 5 + i$, $z_2 = 3 + 2i$, 21б) $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -i$,

21в) $z_1 = 1$, $z_{2,3} = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$, $z_{4,5} = \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$,

21г) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -\frac{1}{5}(6 + 3i)$.

22. Решить уравнения: а) $|z| = 2 + i - z$, б) $z^2 + \bar{z} = 0$.

Ответ: 22 а) $\frac{3}{4} + i$. • Указание: используйте тригонометрическую форму.

22б) $z_1 = 0$, $z_2 = -1$, $z_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

23. Вычислить $z^{14} + z^{-14}$, если z есть корень уравнения $z + z^{-1} = 1$.
Ответ: -1.

24. Найти комплексное число z, удовлетворяющее одновременно двум равенствам:
$3|z - 12| = 5|z - 8i|$, $|z - 4| = |z - 8|$.
Ответ: $z = 6 + 17i$, $z = 6 + 8i$.

25. Решить системы уравнений:

а) $\begin{cases} z_1 + \bar{z}_2 = 3i \\ 2z_1 - 3\bar{z}_2 = 5 \end{cases}$, б) $\begin{cases} |z^2 - 2i| = 4 \\ |z + 1 + i| = |z - 1 - i| \end{cases}$.

Ответ: 25 а) $z_1 = 1 + \frac{9}{5}i$, $z_2 = -1 - \frac{6}{5}i$, 25 б) $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -1 + i$.

1.4 Множества точек на комплексной плоскости

26. Изобразить на плоскости множество точек, удовлетворяющее условиям:
а) $|z + 1 - i| = |z - 1 + i|$, б) $|z| = \operatorname{Re} z + 1$.

Ответ: 26 а) Прямая $y = x$; 26 б) парабола $x = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$.

27 Изобразить на плоскости множество точек, удовлетворяющее условиям:
а) $|z| = z$, б) $|z - 2|^2 + |z + 2|^2 = 26$.

Ответ: 27 а) луч $y = 0, \quad x \ge 0$, 27б) окружность $x^2 + y^2 = 9$.

28. Изобразить на плоскости множество точек, удовлетворяющее условиям:
а) $\left|z - i\sqrt{2}\right| = |z + 4|$ и $|z| = 2$, б) $|z - 1| = |z + 1| = \left|z - i\sqrt{3}\right|$.

Ответ: 28 а) Точки пересечения окружности $x^2 + y^2 = 4$ и прямой $4x + y\sqrt{2} + 7 = 0$:
$x = -\dfrac{26 \pm \sqrt{46}}{18}$, $y = \dfrac{-7\sqrt{2} \pm 4\sqrt{23}}{18}$, 28б) точка $\left(0, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

29. Изобразить на плоскости множества точек, удовлетворяющие неравенствам:

а) $|z| \le \left|\dfrac{z}{2} - 1\right|$, б) $|z - 2|^2 - |z + 2|^2 > 3$.

Ответ: 29а) Круг радиусом $\dfrac{4}{3}$ с центром $\left(-\dfrac{2}{3}, 0\right)$, содержащий окружность; 29б) часть плоскости левее вертикали $x = \dfrac{3}{8}$, не содержащая эту линию;

30. Изобразить на плоскости множества точек, удовлетворяющие неравенствам:
а) $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{|z - 1| + 4}{3|z - 1| - 2} > 1$, б) $\log_{\sqrt{3}} \dfrac{|z|^2 - |z| + 1}{|z| + 2} < 2$.

Ответ: 30а) Внешность круга радиусом 10 с центром $(1, 0)$, не содержащая эту окружность;
30б) внутренность круга $x^2 + y^2 = 25$, не содержащая окружность;

31. Выяснить, какие линии определяются уравнениями
а) $\operatorname{Im}\left(\overline{z^2 - z}\right) = 2 - \operatorname{Im} z$, б) $2z\bar{z} + (2 + i)z + (2 - i)\bar{z} = 2$.

Ответ: 31а) Гипербола $xy = -1$; 31б) окружность $(x + 1)^2 + (y - \dfrac{1}{2})^2 = \dfrac{9}{4}$.

32. Выяснить, какие линии определяются уравнениями:
а) $|z| - 3\operatorname{Im} z = 6$, б) $3|z| - \operatorname{Re} z = 12$.

Ответ: 32а) гипербола $\dfrac{16\left(y + \frac{9}{4}\right)^2}{9} - \dfrac{2x^2}{9} = 1$, 32б) эллипс $\dfrac{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2}{\frac{9}{4}} + \dfrac{y^2}{\frac{9}{2}} = 1$.

33. Выяснить, какие линии определяются уравнениями:

а) $|z - 2| = |1 - 2\bar{z}|$, б) $|z - z_1| = |z - z_2|$, в) $\operatorname{Re}\left(z^2 - \bar{z}\right) = 0$, г) $|z| = \operatorname{Re}(1 + z)$.

Ответ: 33 а) Окружность $x^2 + y^2 = 1$, 33б) прямая, перпендикулярная к отрезку $[z_1, z_2]$ и проходящая через его середину; 33в) гипербола $(x - \frac{1}{2})^2 - y^2 = \frac{1}{4}$, 33г) парабола $y^2 = 2x + 1$.

2 Функции комплексного переменного

Комплексная переменная $w = u + iv$ называется функцией комплексной переменной $z = x + iy$, если каждому значению z на плоскости XOY соответствует одно или несколько значений w на плоскости UOV: $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где $u(x, y)$— вещественная и $v(x, y)$— мнимая части функции w. Перечислим некоторые функции комплексного переменного:

показательная $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

тригонометрические $\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$, $\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$,

$tgz = \frac{\sin z}{\cos z}$, $ctgz = \frac{\cos z}{\sin z}$

Гиперболические тригонометрические функции $chz = \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right)$, $shz = \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right)$,

$thz = \frac{shz}{chz}$, $cthz = \frac{chz}{shz}$

Логарифмическая функция $Lnz = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)$, $k \in Z$

Значение логарифма при $k = 0$ называется главным значением логарифма и обозначается $\ln z = \ln|z| + i\arg z$. Тогда $Lnz = \ln z + 2k\pi i$. Обратные тригонометрические и обратные гиперболические тригонометрические функции выражаются через логарифмическую функцию:

$$Arc\sin z = \frac{1}{i}Ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right),\ Arc\cos z = \frac{1}{i}Ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right),$$

$$Arctgz = \frac{1}{2i}Ln\frac{1 + iz}{1 - iz},\ Arcctgz = \frac{1}{2i}Ln\frac{z + i}{z - i},$$

$$Arshz = Ln\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right),\ Archz = Ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right),$$

$$Arthz = \frac{1}{2}Ln\frac{1 + z}{1 - z},\ Arcthz = \frac{1}{2}Ln\frac{z + 1}{z - 1}$$

Если α и β— два комплексных числа, $\alpha \neq 0$, то степень α^{β} в силу основного логарифмического тождества $\alpha^{\beta} = e^{\beta Ln\alpha} = e^{\beta(\ln\alpha + 2k\pi i)}$, k –целое.

Когда β — целое вещественное число, то степень имеет одно значение, так как $e^{2k\beta\pi i} = 1$. Если же β – несократимая рациональная дробь p/q ($q > 1$), то степень имеет ровно q различных значений. Во всех других случаях степень имеет бесконечное множество значений.

2.1 Вычисление значений функций

34. Дана функция $f(z) = x^2 + iy^2$, где $z = x + iy$. Найти значения функции:
а) $f(1+2i)$ б) $f(2-3i)$.

Ответ: 34 а) $1+4i$; 34 б) $4+9i$;

35. Дана функция $f(z) = \dfrac{1}{x - iy}$, где $z = x + iy$. Найти значения функции:

а) $f(1+i)$, б) $f(3-2i)$.

Ответ: 35 а) $\dfrac{1}{2}(1+i)$, 35б) $\dfrac{1}{13}(3-2i)$.

36. Найти значения функции $w = e^z$ при: а) $z = \pi(1-i)$, б) $z = 1 + i\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$.

Ответ: 36 а) $-e^{\pi}$; 36 б) ei.

37. Найти значения функции $w = e^{z^z}$ при: а) $z = i$, б) $z = 1 + \dfrac{\pi}{2}i$.

Ответ: 37 а) $e^{\cos 1}(\cos(\sin 1) + i\sin(\sin 1))$, 37б) $\cos e + i\sin e$.

38. Найти действительную мнимую части функций: а) e^{z^2}, б) ze^z, в) $z^2\cos z$, г) tgz.

Ответ: 38 а) $u = e^{x^2-y^2}\cos 2xy$, $v = e^{x^2-y^2}\sin 2xy$,

38б) $u = e^x(x\cos y - y\sin y)$, $v = e^x(y\cos y + x\sin y)$,

38в) $u = \dfrac{1}{2}\left[\left(x^2 - y^2\right)\left(e^{-y} + e^y\right)\cos x - 2xy\left(e^{-y} - e^y\right)\sin x\right]$,

$v = \dfrac{1}{2}\left[\left(x^2 - y^2\right)\left(e^{-y} - e^y\right)\sin x + 2xy\left(e^{-y} + e^y\right)\cos x\right]$.

38г) $u = 2\sin 2x\left(2\cos 2x + e^{-2y} + e^{2y}\right)^{-1}$,

$v = \left(e^{2y} - e^{-2y}\right)\left(2\cos 2x + e^{-2y} + e^{2y}\right)^{-1}$.

39. Вычислить значения функций: а) $tg(1+i)$, б) $\cos(2-i)$.

Ответ: 39а) $\dfrac{2\sin 2 + i\left(e^2 - e^{-2}\right)}{2\cos 2 + e^2 + e^{-2}}$, 39 б) $\dfrac{1}{2}\left[\left(e + e^{-1}\right)\cos 2 + i\left(e - e^{-1}\right)\sin 2\right]$.

40. Вычислить значения функций: а) $cth(2+i)$, б) $th(\ln 3 + \dfrac{\pi}{4}i)$.

Ответ: 40 а) $\dfrac{e^4 - e^{-4} - i\sin 2}{e^4 + e^{-4} - \cos 2}$, 40б) $\dfrac{40+9i}{41}$.

41. Найти значения логарифмов:
а) $Ln(\sqrt{3}+i)$, б) $\ln(1-i)$, в) $Ln(ei)$, г) $Ln(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $\alpha \in R$.

Ответ: 41а) $\ln 2 + i\left(2k\pi + \dfrac{\pi}{6}\right)$; 41б) $\dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{\pi}{4}i$, 41в) $1 + i\left(2k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)$,
41г) $i(2k\pi + \alpha)$.

42. Пользуясь равенством $a^x = e^{xLna}$ ($a > 0, \quad a \neq 1$), представить в показательной форме следующие числа: а) 2^{3i}, б) $3^{-\frac{1}{2}}$, в) 5^{1+i}, г) 10^{1-i}.

Ответ: 42 а) $e^{-6k\pi + 3i\ln 2}$; 42б) $e^{-\frac{1}{2}\ln 3 + k\pi i}$, 42в) $e^{(\ln 5 - 2k\pi) + i(\ln 5 + 2k\pi)}$,
42г) $e^{(\ln 10 + 2k\pi) + i(-\ln 10 + 2k\pi)}$.

43. Вычислить значения степеней: а) i^{1+i}, б) $(1+i)^i$, в) 4^i, г) $(-1)^{\sqrt{2}}$, д) 1^{-i}, е) $1^{\sqrt{2}}$,
ж) $(3-4i)^{1+i}$.

Ответ: 43 а) $ie^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$, 43б) $e^{-(\frac{\pi}{4}+2k\pi)+i\ln\sqrt{2}}$, 43в) $e^{-2k\pi + i\ln 4}$, 43г) $e^{i\pi\sqrt{2}(2k+1)}$.
43д) $e^{2k\pi}$, 43е) $e^{i2k\pi\sqrt{2}}$, 43ж) $e^{\ln 5 - 2k\pi + arctg\frac{4}{3} + i(\ln 5 + 2k\pi - arctg\frac{4}{3})}$.

44. Вычислить значения функций:
а) $Arc\sin 3$, б) $Arctg(\sqrt{2}-i)$, в) $Arsh(-1)$, г) $Arc\sin(1+i)$.

Ответ: 44 а) $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(3 \pm 2\sqrt{2})$; 44б) $\dfrac{1}{2}(\pi - arctg\sqrt{2} + 2k\pi) - \dfrac{i}{4}\ln 3$,
44в) $\ln\sqrt{3} + k\pi i$, 44г) $k\pi + (-1)^k arctg\dfrac{1}{\alpha} - i\ln\left(\alpha^2 + (-1)^{k+1}\alpha\right)$, где $\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{5}-1}}$.

2.2 Приближенное вычисление значений функций с помощью рядов

Ряды некоторых элементарных функций можно использовать для вычисления приближенных значений функций. Точность вычисления определяется количеством оставляемых членов ряда. Точность может иметь комплексное значение.

45. Вычислить значение функции, подсчитав действительную и мнимую части с точностью до 0,0001: а) $\sin i$, б) $\cos\frac{i}{2}$, в) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+i\right)$.

Ответ: 45 а) $1{,}1752i$; 45 б) $1{,}1276$; 45 в) $0{,}772+1{,}018i$.

2.3 Решение трансцендентных уравнений

46. Решить уравнения: а) $\cos z = 4$, б) $\sin z = 2$, в) $chz = 0$, г) $thz = 2$.

Ответ: 46 а) $z = 2k\pi - i\ln(4\pm\sqrt{15})$, 46б) $z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(2\pm\sqrt{3})$,

46в) $z = i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, 46 г) $z = \ln\sqrt{3} + k\pi i$.

47. Решить уравнения: а) $e^z + i = 0$, б) $\ln(i-z) = 1$, в) $\sin\frac{z-i}{i} = i$,

г) $ctg(z+i) = 2i$, д) $2\cos z + 3\sin z = 7$.

Ответ: 47 а) $z = (2k - \frac{1}{2})\pi i$, 47 б) $z = -e + i$, 47в) $z = \ln 3 + i(1+\pi+2k\pi)$,

47 г) $z = -i(1+\ln 3) + 2k\pi$, 47 д) $arctg\frac{3}{2} + 2k\pi \pm i\ln\sqrt{13}$.

3 Производная функции комплексного переменного

Пусть функция $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ определена в окрестности точки z_0.

Определение Если существует конечный предел $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$, то он называется производной от функции $f(z)$ в точке z_0 и обозначается $f'(z_0)$. Функция $f(z)$, обладающая производной в точке z_0, называется дифференцируемой в z_0.

$u(x,y)$ называется вещественной частью функции w, $v(x,y)$ называется мнимой частью функции w.

Необходимым и достаточным условием дифференцируемости функции $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ являются условия Коши — Римана: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Если функция задана через свои вещественную и мнимые части, то после проверки условий Коши — Римана производную w' можно найти по одной из равносильных формул: $w' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$, $w' = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$, $w' = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$, $w' = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$. Если же дана зависимость $f(z)$, то после проверки выполнения условий Коши-Римана производную можно найти непосредственным дифференцированием $w' = \dfrac{df}{dz}$. Правила дифференцирования и таблица производных имеет такой же вид, что и для функций вещественного аргумента.

Определение. Функция $f(z)$ называется аналитической (или голоморфной) в точке z_0, если она дифференцируема в каждой точке некоторой окрестности точки z_0.

3.1 Дифференцируемость функций

48. Проверить условия Коши—Римана для функций: а) $f(z) = z^{-2}$, б) $f(z) = x^2 - 2yi$.

Ответ: 48а) условия Коши–Римана выполняются: $u_x = v_y = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$, $u_y = -v_x = -\dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$. 48б) условия Коши–Римана выполняются на вертикали $x = -1$, так как $u_x = 2x, \quad v_y = -2, \quad u_y - v_x = 0$.

49. Найти производную функции $f(z) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2 y - y^3)$.

Решение. Находим $u_x = 3x^2 - 3y^2, \quad v_x = 6xy$. Составим $f'(z) = 3x^2 - 3y^2 + i6xy = 3(x^2 + 2ixy - y^2) = 3(x + yi)^2 = 3z^2$.

Ответ: $f'(z) = 3z^2$.

50. Проверить, является ли функция $w = f(z)$ дифференцируемой. Если да, то найти значение ее производной в заданной точке z_0: а) $w = (iz)^3$, $z_0 = -1 + i$, б) $w = e^{-z^2}$, $z_0 = i$, в) $w = ze^z$, $z_0 = -1 + \pi i$, г) $w = i(1 - z^2) - 2z$, $z_0 = 1$.

Ответ: 50 а) $w'(-1 + i) = -6$; 50 б) $w'(i) = -2ei$, 50в) $w'(-1 + \pi i) = -\dfrac{\pi i}{e}$,

50г) $w'(1) = -2(1 + i)$.

3.2 Восстановление аналитической функции по ее действительной или мнимой части

Прежде всего надо помнить, что действительная и мнимая части аналитической функции должны быть гармоническими, т.е. удовлетворять уравнению Лапласа $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ и $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$.

51. Построить аналитическую функцию, для которой функция $u = x^2 - y^2 + 2x$ является действительной частью.

Решение. Дана $u = x^2 - y^2 + 2x$. Сначала проверим, что эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа: $u_x = 2x + 2$, $u_y = -2y$, $u_{xx} = 2$, $u_{yy} = -2$. Видим, что их сумма равна нулю.

Условия Коши – Римана дают дифференциальные уравнения для нахождения v: $v_y = u_x = 2x + 2$, $v_x = -u_y = 2y$. Интегрируем первое по переменной y: $v = 2xy + 2y + \varphi(x)$. Найдем производную $v_x = 2y + \varphi'(x)$ и подставим ее во второе: $v_x = 2y + \varphi'(x) = 2y$. Видим, что $\varphi'(x) = 0$, и значит $\varphi(x) = c$. Окончательно $v = 2xy + 2y + c$.

Составим функцию $w(z) = u + iv = x^2 - y^2 + 2x + i(2xy + 2y + c)$. Перегруппируем слагаемые: $w(z) = x^2 + 2ixy + (iy)^2 + 2(x + iy) + ci$. Тогда, учитывая $z = x + yi$, имеем $w(z) = z^2 + 2z + ci$.

Ответ: $v = 2xy + 2y + c$, $w = z^2 + 2z + ci$

52. Дана действительная часть $u(x, y)$ дифференцируемой функции $f(z)$. Найти эту функцию: а) $u = x^2 - y^2 - x$, б) $u = x^2 - y^2 + 5x + y - \dfrac{y}{x^2 + y^2}$,

в) $u = e^x(x\cos y - y\sin y) + 2\sin x sh y + x^3 - 3xy^2 + y$.

Ответ: 52 а) $v = 2xy - y + c$, $f(z) = z^2 - z + ci$,

52б) $v = 2xy - x + 5y - \dfrac{x}{x^2 + y^2} + c$, $f(z) = z^2 + (5 - i)z - \dfrac{i}{z} + ci$,

52в) $v = e^x(y\cos y + x\sin y) + 3x^2 y - y^3 + x + 2\cos x \cdot ch y + c$,

$f(z) = ze^z + 2i\cos z + z^3 - iz + ci$.

53. Дана мнимая часть $v(x, y)$ дифференцируемой функции $f(z)$. Найти эту функцию:

а) $v = x + y$, б) $v = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$, в) $v = 3 + x^2 - y^2 - \dfrac{y}{2(x^2 + y^2)}$.

Ответ: 53 а) $u = x - y + c$, $f(z) = (1 + i)z + c$.

53б) $u = -2arctg\dfrac{y}{x} - y - 2x + c$, $f(z) = 2i\ln z + iz - 2z + c$,

53в) $u = -2xy + \dfrac{x}{2(x^2 + y^2)} + c$, $f(z) = \dfrac{1}{2z} + iz^2 + 3i + c$.

54. Найти аналитическую функцию $f(z) = u + iv$ по условиям:

а) $u = x^3 + 6x^2 y - 3xy^2 - 2y^3$, $f(0) = 0$, б) $v = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$, $f(2) = 0$,

в) $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2} - 2y$, $f(1) = 0$.

Ответ: 54а) $v = 3x^2 y + 6xy^2 - 2x^3 - y^3$, $f(z) = (1 - 2i)z^3$,

54б) $u = -\dfrac{x}{x^2 + y^2} + \dfrac{1}{2}$, $f(z) = \dfrac{z - 2}{2z}$,

54в) $v = -\dfrac{y}{x^2 + y^2} - 2 + 2x$, $f(z) = \dfrac{1}{z} + 2iz - 1 - 2i$.

55. Восстановить аналитическую функцию $f(z) = u + iv$ по условиям:

а) $v = e^x(y\cos y + x\sin y) + x + y$, $f(0) = 1$, б) $u = x^2 - y^2 + xy$, $f(0) = 0$,

в) $u = 2^x \cos(y \ln 2)$, $f(0) = 2$.

Ответ: 55 а) $u = e^x(x\cos y + y\sin y) + x - y + 1$, $f(z) = ze^z + (1+i)z + 1$.

55б) $v = 2xy - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2}$, $f(z) = (1 - \dfrac{i}{2})z^2$, 55в) $v = 2^x \sin(y \ln 2) - i$, $f(z) = 2^z + 1$.

56. Найти аналитическую функцию $f(z) = u + iv$ по условиям:

а) $u = \dfrac{y}{(x+1)^2 + y^2}$, $v(-1,1) = 0$, б) $u = -3x^2 y + y^3 + x$, $v(0,1) = 1$.

Ответ: 56а) $v = \dfrac{x+1}{(x+1)^2 + y^2}$, $f(z) = \dfrac{i}{z+1}$.

56б) $v = x^3 - 3xy^2 + y$, $f(z) = z + iz^3$.

3.3 Геометрический смысл модуля и аргумента производной

Пусть дана $f(z)$, имеющая производную в точке z_0: $f'(z_0) \neq 0$ Тогда $\arg f'(z_0)$ есть угол поворота касательной к любой кривой, проведенной через точку z_0 при ее отображении с помощью функции $w = f(z)$ на плоскость w. Модуль $|f'(z_0)|$ можно рассматривать как величину масштаба в точке z_0 при отображении w. Если $|f'(z_0)| > 1$, то происходит растяжение бесконечно малого элемента, выходящего из точки z_0. Если $|f'(z_0)| < 1$, то происходит сжатие, при $|f'(z_0)| = 1$ масштаб не меняется.

57. Найти угол поворота и коэффициент растяжения при отображении с помощью аналитической функции $w = 2z^2 + z$ в точках z_0: а) $z_0 = -\frac{1}{4} + i$, б) $z_0 = -\frac{i}{4}$.

Ответ: 57 а) $|w'| = \frac{\sqrt{17}}{2}$, $\arg w' = arctg 4$, 57 б) $|w'| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\arg w' = arctg 2$.

58. Проверить выполнение условий Коши-Римана для функции w. Найти коэффициент растяжения и угол поворота в точке z_0 при отображении w: а) $w = \frac{1}{z}$, $z_0 = 3i$,

б) $w = z \ln z$, $z_0 = 1$, в) $w = \frac{z+i}{z-i}$, $z_0 = 2i$, г) $u = e^y \cos x$, $v = -e^y \sin x$, $z_0 = \frac{\pi}{3}$.

Ответ: 58а) $|w'| = \frac{1}{9}$, $\arg w' = 0$, 58б) $|w'| = 1$, $\arg w' = 0$, 58в) $|w'| = 2$, $\arg w' = \frac{3\pi}{2}$, 58г) $|w'| = 1$, $\arg w' = \frac{\pi}{6}$.

59. Какая часть плоскости z сжимается и какая растягивается при отображении w:
а) $w = 2z^2 - 8z - 1$, б) $w = \frac{1}{\bar{z}}$?

Ответ: 59а) $|w'| = 16((x-2)^2 + y^2)$. Внутренность круга $(x-2)^2 + y^2 = \frac{1}{16}$ сжимается, внешность его растягивается, сам он остается неизменным.
59б) $|w'| = (x^2 + y^2)^{-1}$. Внешность круга $x^2 + y^2 = 1$ сжимается, внутренность его растягивается, сам он остается неизменным.

4 Конформные отображения

Рассмотрим две комплексные плоскости z и w. Если функция $w = f(z)$ однозначная, то каждой точке z_0 плоскости *XOY* соответствует определенная точка w_0 на плоскости *UOV*. Точку w_0 называют образом точки z_0, а z_0–прообразом w_0. Кривая на плоскости z с помощью функции $w = f(z)$ отображается на кривую на плоскости w. Первая кривая называется также прообразом, а вторая — образом. Аналогично можно говорить об отображении области на плоскости z на область плоскости w. Отображение одной плоскости на другую называется конформным в точке z, если все бесконечно малые дуги, выходящие из этой точки, при отображении поворачиваются на один и тот же угол и получают одно и то же растяжение (сжатие). Иными словами, при конформном отображении сохраняется подобие в бесконечно малых частях. Отображение с помощью аналитической функции является конформным везде, кроме, быть может, точек, в которых производная данной аналитической функции равна нулю.

4.1 Линейная функция

Отображение, осуществляемое линейной функцией $w = az + b$, где a и b– постоянные комплексные числа ($a \neq 0$), является конформным на всей плоскости. Оно преобразует прямые в прямые (углы между прямыми сохраняются) и окружности в окружности.

60. Найти угол поворота и образ отрезка, соединяющего точки A(1,3) и B(5,3) при отображении $w = (2+i)z$.

Ответ: $arctg\frac{1}{2}$.

61. Найти линейную функцию, преобразующую треугольник с вершинами в точках $3+2i$, $7+2i$, $5+4i$, лежащий в плоскости z в подобный ему треугольник с вершинами в точках $0, \quad -2i, \quad 1-i$ в плоскости w.

Ответ: $w = -\frac{iz}{2} + \frac{3}{2}i - 1$.

62. Найти линейную функцию, отображающую круг $|z-i| < 2$ на круг $|w-2| < 4$ так, чтобы горизонтальный диаметр переходил бы в горизонтальный.
Ответ: $w = 2z + 2 - 2i$.

63. Найти отображение w прямоугольника $-7 \le \operatorname{Re} z \le -3, \quad 2 \le \operatorname{Im} z \le 4$ на прямоугольник $-4 \le \operatorname{Re} w \le 0, \ -8 \le \operatorname{Im} w \le 0$.
Ответ: $w = 2iz + 4 + 6i$.

64. Найти область в плоскости w, в которую переходит треугольник с вершинами в точках 0, 3, $2i$ с помощью преобразования $w = iz - 1$.
Ответ: В подобный треугольник с вершинами $-1, -1+3i, -3$.

65. Во что отобразится прямоугольник с вершинами $3, \quad 5+2i, \quad 2+5i$ с помощью функции $w = \frac{1+i}{2}z + \frac{5-i}{2}$?

Ответ: Прямоугольник со сторонами: $u = \frac{5}{2}, \quad v = 3, \quad u = 1, \quad v = 1$.

66. Найти линейное преобразование с неподвижной точкой $1+2i$, переводящее точку i в точку $-i$. Точка z_0 называется неподвижной точкой отображения $w = f(z)$, если $f(z_0) = z_0$.
Ответ: $w = (2+i)z + 1 - 3i$.

4.2 Дробно- линейная функция

Дробно-линейное отображение $w = \frac{az+b}{cz+d}$ является конформным на всей плоскости. Оно преобразует в окружность всякую окружность (прямые линии условно считаются окружностями с бесконечно большим радиусом). Внутренняя область отображаемой окружности переходит либо во внутреннюю область образа, либо во внешнюю область образа.

При $a = d = 0$, $b = c = 1$ получаем функцию $w = \dfrac{1}{z}$, называемую инверсией.

67. Пусть задано отображение $w = \dfrac{1}{z}$. В какие линии преобразуются: а) семейство окружностей $x^2 + y^2 = ax$, б) пучок параллельных прямых $y = x + b$?

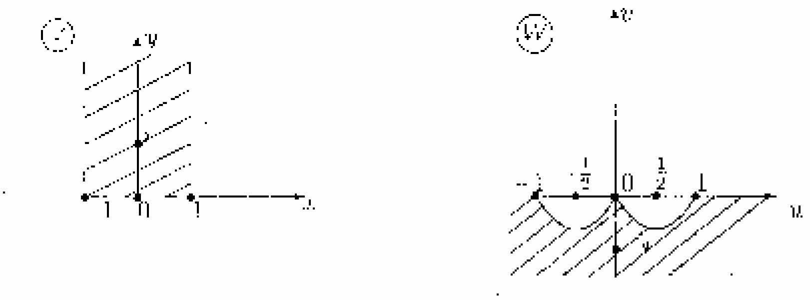
Ответ: 67а) $u = \dfrac{1}{a}$ — это семейство прямых, параллельных мнимой оси, неограниченно приближающихся к ней с увеличением радиусов отображаемых окружностей;

67б) $b(u^2 + v^2) + u + v = 0$. При $b \neq 0$ это семейство окружностей, радиусы которых с увеличением b уменьшаются. При $b = 0$ — прямая $v = -u$.

68. Найти образы множеств при отображении $w = \dfrac{1}{z}$: а) $-1 \le x \le 1$, $y \ge 0$ б) $|z| = 1$, $0 < \arg z < \pi$.

68а) <u>Решение</u>. Запишем $w = \dfrac{1}{z}$ в виде $u + iv = \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2}$. Отсюда $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$,

$$v = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$



Рассмотрим уравнения границ прообраза и найдем границы образа:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y \ge 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u = \dfrac{-1}{1 + y^2} < 0 \\[2mm] v = \dfrac{-y}{1 + y^2} \le 0 \end{cases}$$

Поделив второе уравнение на первое, получим $y = \dfrac{v}{u}$. Подстановка этого выражения в первое уравнение даст $u\left(1 + \dfrac{v^2}{u^2}\right) = -1$ или $u^2 + u + v^2 = 0$. Окончательное уравнение границы

$$\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+v^2=\frac{1}{4}$$ при $u<0, v<0$.

$$\begin{cases} y=0 \\ -1\le x\le 1 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} u=\dfrac{1}{x} \\ v=0 \end{cases}$$

Получим для $v=0$ такие условия для u: $u\ge 1$ при $0<x\le 1$ и $u\le -1$ при $-1\le x<0$.

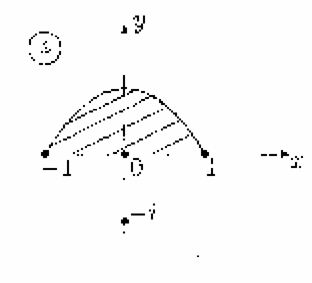
$$\begin{cases} x=1 \\ y\ge 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} u=\dfrac{1}{1+y^2}>0 \\ v=\dfrac{-y}{1+y^2}\le 0 \end{cases}$$

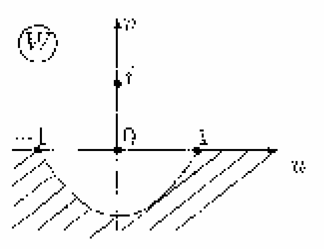
Поделив второе уравнение на первое, получим $y=-\dfrac{v}{u}$.Подстановка этого выражения в первое уравнение даст $u\left(1+\dfrac{v^2}{u^2}\right)=1$ или $u^2-u+v^2=0$. Окончательное уравнение границы $\left(u-\dfrac{1}{2}\right)^2+v^2=\dfrac{1}{4}$ при $u>0, v<0$. Точка $z=i$ отобразится в точку $w=-i$.

Ответ: область $v\le 0$ с выброшенными полукругами

$$\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+v^2=\frac{1}{4},\ \left(u-\frac{1}{2}\right)^2+v^2=\frac{1}{4}.$$

68б) <u>Решение</u>. Как и в предыдущей задаче, $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $v=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$.





Рассмотрим отображение границ: $x^2+y^2=1$ дает $u=x,\ \ v=-y<0$ или $x^2+y^2=u^2+v^2=1$ при $v<0$, т.е. нижняя часть окружности.

$y=0$ дает $u=\dfrac{1}{x},\ v=0$. $u\le -1$ при $-1\le x<0$, $u\ge 1$ при $0<x\le 1$. Внешняя точка прообраза $z=-i$ отображается в точку $w=i$ –внешнюю точку образа.

Точка $z=i$ отобразится в точку $w=-i$.

Ответ: нижняя полуплоскость плоскости W с выброшенным полукругом $u^2+v^2=1,\ v\le 0$

69. Найти образ области *D*, ограниченной лучом $x = 0, \quad y \ge 0$, отрезком $y = 0, \quad 0 \le x \le 2$, лучом $x = 2, \quad y \ge 0$ при помощи отображения $w = -\dfrac{1}{z}$.

Ответ: Второй квадрант плоскости w: $u \le 0$, $v \ge 0$ с выброшенным полукругом: $\left(u + \dfrac{1}{4}\right)^2 + v^2 = \dfrac{1}{16}$.

70. При помощи отображения $w = \dfrac{1}{z}$ найти образ области *D*, расположенной вне первого квадранта и заключенной между отрезком $x = 0, \quad 0 \le y \le 1$, отрезком $y = 0, \quad 0 \le x \le 1$ и кругом $|z| = 1$

Ответ: Плоскость w с выброшенным четвертым квадрантом и кругом $u^2 + v^2 = 1$.

71. Найти образ области *D* при отображении $w = \dfrac{1}{z}$, где *D* — часть кругового кольца

$$0 < \arg z < \frac{\pi}{2},\ 1 < |z| < 2.$$

Ответ: На часть кругового кольца: $90^\circ < \arg w < 0$, $\dfrac{1}{2} < |w| < 1$.

72. Найти дробно-линейную функцию, отображающую $z_1 = i$, $z_2 = 1$, $z_3 = \infty$ в точки $w_1 = 0$, $w_2 = \infty$, $w_3 = 1 - i$.

Ответ: $w = \dfrac{(1-i)(z-i)}{z-1}$.

73. Найти дробно-линейную функцию, преобразующую точки (1,0), (0,1), (–1,0) в точки (–1,0), (0,0), (1,0).

Ответ: $w = -\dfrac{iz+1}{z+i}$.

74. Построить область на плоскости w, на которую отображается угол $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{4}$ с помощью функции $w = \dfrac{z}{z-1}$.

Ответ: В область, состоящую из нижней полуплоскости $\operatorname{Im} w < 0$ с удаленной из нее частью круга: $\left| w - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} i \right| < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

75. Во что преобразуется окружность $|z| = 1$ при отображении $w = \dfrac{1-z}{z}$?

Ответ: Во внешность круга: $(u+1)^2 + v^2 = 1$.

76. В какую область преобразуется полукруг $|z+1| \le 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ функцией $w = \dfrac{z+2}{iz+1}$?

Ответ: В область, ограниченную кругами $|w-1-2i| \le \sqrt{5}$, $\left|w-1+\dfrac{1}{2}i\right| \ge \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

77. На какую область плоскости w функция $w = i\,\dfrac{z-1}{z+i}$ отображает круг $|z| < 1$?

Ответ: $v > u$.

78. Найти образ полуплоскости $\operatorname{Im} z > 1$ при $w = \dfrac{z-i}{z}$.

Ответ: $\left|w - \dfrac{1}{2}\right| < \dfrac{1}{2}$.

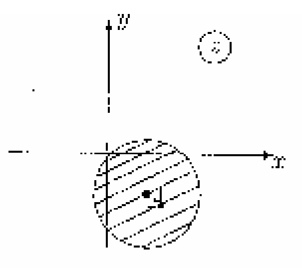
79. Найти область на плоскости w, на которую отображается с помощью функции $w = \dfrac{z-i}{z+i}$ луночка между окружностями с радиусами $\sqrt{2}$ и центрами в точках (–1,0) и (1,0).

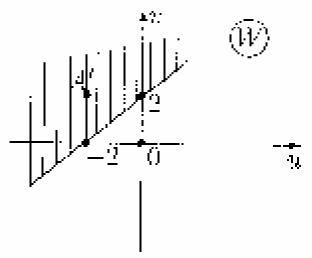
Ответ: Область в левой полуплоскости $\operatorname{Re} w < 0$, ограниченная лучами $\arg w = 135^\circ$, $\arg w = -135^\circ$, исходящими из начала координат, включая эти лучи.

80. Найти, в какую область преобразуется круг $\left|z - \dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2}\right| \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ при отображении $w = \dfrac{iz-2}{z+i}$.

<u>Решение.</u> Запишем уравнение окружности: $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$ или $x^2 + y^2 - x + y = 0$.

Используя формулы $x = \dfrac{1}{2}(z + \bar{z})$, $y = \dfrac{-i}{2}(z - \bar{z})$, $x^2 + y^2 = z\bar{z}$. уравнение окружности перепишем: $2z\bar{z} - (z+\bar{z}) - i(z-\bar{z}) = 0$.





Выразим z через w: $z = -i - \dfrac{1}{w-i}$. Имеем также $\overline{z} = i - \dfrac{1}{\overline{w}+i}$.
Подставим в уравнение границы и получим $v = u + 2$.

Центр прообраза— точка $z_A = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$ переходит в точку $w_{A'} = -1 + 2i$, которая лежит над прямой $v = u + 2$.

Ответ: Образом является полуплоскость $v \geq u + 2$.

81. Найти неподвижную точку дробно-линейного преобразования, преобразующего точки $i, \quad -1, \quad 0$ в точки $1, \quad \infty, \quad 2$ (точка z_0 называется неподвижной точкой отображения $w = f(z)$, если $f(z_0) = z_0$).

Ответ: $w = \dfrac{(1+i)z+2}{z+1}$, $z_0 = \dfrac{1}{2}(i \pm \sqrt{7})$.

82. Найти образы областей с помощью дробно-линейного отображения w: а) кольцо $1 < |z| < 2$ при $w = \dfrac{z+1}{z+2}$, б) луночка $|z| < 1$, $|z-1| < \sqrt{2}$ при $w = \dfrac{z-i}{z+i}$.

Ответ: 82а) $\left|w - \dfrac{1}{3}\right| > \dfrac{1}{3}$, 82б) угол раствора 135°: $u < 0, v < -u$.

83. Найти функции, дающие следующие конформные отображения: а) круга $|z| < 1$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w < 0$ так, чтобы точки $z = 1$, $z = i$, $z = -i$ переходили в точки $w = 1$, $w = 0$, $w = -1$. б) круга $|z| < 1$ в себя так, чтобы точки $z = -1$, $z = i$, $z = 1$ переходили в точки $w = -1$, $w = \dfrac{1}{5}(4+3i)$, $w = 1$.

Ответ: 83а) $w = \dfrac{(1+i)(z-i)}{(1-3i)z+3i+1}$, 83б) $w = \dfrac{2z+1}{z+2}$.

84. Построить функцию, осуществляющую конформное отображение области $|z-3| > 9$, $|z-8| < 16$ на кольцо $r < |w| < 1$.

Ответ: $w = \dfrac{z+24}{3z}$, $r = \dfrac{2}{3}$.

85. Найти дробно-линейное отображение, удовлетворяющее условиям $w(0) = 0$, $w(i-1) = \infty$, $w(-1) = i$. Построить образ множества $|z-i| < 1$, $\operatorname{Re} z \leq 0$.

Ответ: $w = -\dfrac{z}{z+1-i}$. Образом является пересечение полуплоскости $v < u$ и внешности круга $\left(u + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(v + \dfrac{1}{2}\right)^2 \geq \dfrac{1}{2}$.

86. Построить отображение верхней полуплоскости на единичный круг, переводящее точки действительной оси $-1, 0, 1$ в точки 1, i, -1 окружности.

Ответ: $w = \dfrac{z-i}{iz-1}$.

87. Написать преобразование единичного круга самого в себя, зная его двойную (неподвижную) точку 1 и точку $1+i$, переходящую в ∞.

Ответ: $w = \dfrac{(i-1)z+1}{-z+i+1}$.

88. На какую область плоскости w функция $w = \dfrac{z}{z-1}$ отображает кольцо $1 < |z| < 2$?

Ответ: В двухсвязную область, граница которой состоит из прямой $u = \dfrac{1}{2}$ и окружности $\left|w - \dfrac{4}{3}\right| = \dfrac{2}{3}$.

89. Найти условия, при которых дробно-линейная функция $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ переводит круг $|z| < 1$ в верхнюю полуплоскость.

Ответ: $\overline{a}\overline{d} - \overline{b}\overline{c} = 0, \quad \operatorname{Im}\dfrac{b}{a} > 0$.

4.3 Экспонента

Рассмотрим показательную функцию $w = e^z$, $z = x + iy$. Перепишем $w = e^x(\cos y + i\sin y) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, поэтому $r = e^x$, $\varphi = y$. Линии $x = const$ преобразуются в окружности $r = const$ (y и φ–любые), линии $y = const$ — в лучи $\varphi = const$ (x и r–любые). Для взаимной однозначности при отображении с помощью функции $w = e^z$ необходимо и достаточно, чтобы отображаемая область не содержала никакой пары различных точек z_1 и z_2, для которых $z_1 - z_2 = 2k\pi i$, $k \in N$. Этому условию удовлетворяет любая горизонтальная полоса шириной меньше 2π, например, полосы $2k\pi < \operatorname{Im} z < 2(k+1)\pi$. Полоса $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ плоскости z отображается функцией $w = e^z$ на верхнюю полуплоскость плоскости w, а полоса $0 \le \operatorname{Im} z < 2\pi$ — на плоскость w с разрезом по положительной части вещественной оси. Прямые $y = 0$ и $y = 2\pi$ отображаются в лучи $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$, т.е. обе в положительную вещественную ось, поэтому нужен разрез.

Полуполоса $-\infty < \operatorname{Re} z < 0$, $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ отображается на единичный полукруг $|w| < 1$, $\operatorname{Im} w > 0$, а полуполоса $0 < \operatorname{Re} z < \infty$, $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ — на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$, из которой удален единичный полукруг.

90. Выяснить, во что преобразуется при отображении $w = e^z$ прямоугольник $0 < \operatorname{Re} z < 1$, $0 < \operatorname{Im} z < \dfrac{\pi}{2}$.

Ответ: $1 < |w| < e, \quad 0 < \arg w < 90^0$.

91. Полуполосу $0 \le \operatorname{Im} z \le \pi, \quad \operatorname{Re} z \ge 0$ преобразовать в полукруг $|w| \le 1$, $\operatorname{Im} w \ge 0$.

Ответ: $w = -e^{-z}$.

92. Полуполосу $0 < \operatorname{Re} z < 1, \quad \operatorname{Im} z > 0$ преобразовать в полукруг $|w| < 1$, $\operatorname{Im} w > 0$.

Ответ: $w = e^{\pi i z}$.

93. Найти отображение полосы $y = x, \quad y = x + h$ на, верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

Ответ: $w = \exp\left(\dfrac{\pi}{h}(1-i)z\right)$, сначала следует повернуть полосу.

94. Найти отображение на верхнюю полуплоскость следующих областей: а) круговой луночки, ограниченной окружностями $|z| = 2, \quad |z-1| = 1$; б) плоскости с выкинутыми областями $|z| < 2$, $|z-3| < 1$.

Ответ: 94а) $w = \exp\left(\dfrac{2\pi i z}{z-2}\right)$, 94б) $w = \exp\left(\dfrac{\pi i (z+2)}{3(z-2)}\right)$.

4.4 Логарифмическая функция

Логарифмическая функция обратна показательной, бесконечнозначна, все ее значения вычисляются по формуле

$$w = Lnz = \ln|z| + iArgz = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi), \;\; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Дополнительно примем, что $w = \infty$ при $z = 0$ и $w = \infty$ при $z = \infty$. Обозначив через w_k множество всех точек w, соответствующих данному фиксированному значению k, получим бесконечное множество функций, которые называются ветвями многозначной функции $w = Lnz$. Бесконечнозначность логарифма связана с бесконечнозначностью его мнимой части $Argz$. Поэтому область не должна допускать обхода начала координат по непрерывной кривой, так как при таком обходе значение $Argz$ изменяется на 2π. Область указанного типа будет сектором концентрического кольца: $0 < r_1 \le r \le r_2$, $-\pi < -\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 < \pi$.

Однозначная ветвь логарифма — это его главное значение $\ln z = \ln|z| + i \arg z$.

Действительная и мнимая части этой функции имеют непрерывные частные производные, удовлетворяющие условиям Коши — Римана (проверьте самостоятельно). А это значит, что выделенная ветвь логарифма представляет собой дифференцируемую функцию комплексного переменного z в области *D*. Производная ее не обращается в нуль и, следовательно, функция $w = \ln z$ осуществляет конформное отображение области D на некоторую область плоскости w.

95. Найти образ плоскости с разрезом вдоль отрицательной части действительной оси при отображении однозначной аналитической ветвью логарифма в случаях, когда: а) точка $z_0 = 1$ переходит в $w_0 = 4\pi i$, б) точка $z_0 = -i$ переходит в $w_0 = -\frac{1}{2}\pi i$.

Ответ: 95а) $3\pi < v < 5\pi$; 95б) $-\pi < v < \pi$.

96. Найти образ плоскости с разрезом вдоль положительной части действительной оси при отображении однозначной ветвью логарифма в случаях, когда: а) $z_0 = i$ переходит в $w_0 = \frac{5}{2}\pi i$, б) $z_0 = -1$ переходит в $w_0 = \pi i$;

96а) Решение. В области *D,* представляющей собой плоскость z с разрезом вдоль положительной части действительной оси, $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $|z| > 0, \quad 0 < \varphi < 2\pi$ выделим ветвь логарифма $w = \ln|z| + i\varphi$. Эта ветвь отображает D на полосу $0 < v < 2\pi$. Далее имеем $w(i) = \frac{1}{2}\pi i$. Чтобы получить $w_0 = \frac{5}{2}\pi i$, надо взять $w(i) + 2\pi i = \frac{5}{2}\pi i$. А ветвь $w = \ln|z| + i(\varphi + 2\pi)$ отображает D на полосу $2\pi < v < 4\pi$, содержащую точку $w_0 = \frac{5}{2}\pi i$.

Ответ: $2\pi < v < 4\pi$.

Ответ: 96б) $0 < v < 2\pi$.

97. Найти, в какую область преобразуется квадрант $0 \le \arg z \le \frac{\pi}{2}$ при отображении $w = \ln z$.

Ответ: Полоса $0 \le \operatorname{Im} w \le 90^0$.

98. На какую область в плоскости w функция $w = \ln z$ отображает область D — часть кругового кольца $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}, \quad 1 < |z| < e$?

Ответ: На прямоугольник, ограниченный линиями $v = 0, v = \frac{\pi}{2}, u = 0, u = 1$.

4.5 Целая степенная функция

При помощи степенной функции $w = z^n$ угол с вершиной в начале координат плоскости z отображается в угол с вершиной в начале координат плоскости w с раствором в *n* раз большим. Отображение будет взаимно однозначным, если раствор угла на плоскости w будет не более 2π. Например, функция $w = z^2$ отображает верхнюю полуплоскость плоскости z на плоскость w *с* разрезом по положительной части вещественной оси.

99. Найти степенную функцию w, отображающую область $0 < \arg(z-1-i) < \frac{\pi}{2}$ — на область $\operatorname{Re} w > 0$.

Ответ: $w = -i(z-1-i)^2$.

100. При помощи функции $w = z^2$ отобразить квадрат $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$.

Ответ: Часть верхней полуплоскости $v \ge 0$, ограниченная параболами: $u = \frac{1}{4}v^2 - 1$ и $u = 1 - \frac{1}{4}v^2$.

101. Дана парабола $y = x^2$, с помощью функции $w = z^2$ отобразить ее на плоскость w

Ответ: $u = \left(\frac{v}{2}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{v}{2}\right)^{\frac{4}{3}}$.

102. При помощи функции $w = -z^2$ отобразить на плоскость w прямую $x + y = 1$.

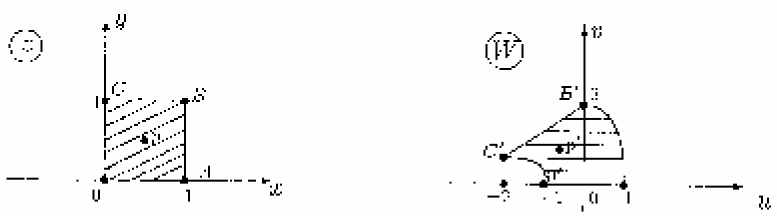
Ответ: $v = \frac{1}{2}(u^2 - 1)$.

103. Найти функцию w, дающую конформное отображение квадранта $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$ на круг $|w| < 1$ так, чтобы при $z = 1 + i$ и $z = 0$ было $w = 0$ и $w = 1$ соответственно.

Ответ: $w = \frac{2 + iz^2}{2 - iz^2}$.

104. Найти в какую область преобразуется квадрат $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ функцией $w = z^2 + z + 1$.

Решение. Выделим действительную и мнимую части: $u = x^2 - y^2 + x - 1$, $v = 2xy + y$. Определим образы участков границ данного квадрата:



$$OA: \begin{cases} y = 0 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = x^2 + x - 1 \\ v = 0 \end{cases}$$

— это отрезок действительной оси $-1 \le u \le 1$ (1).

$$AB: \begin{cases} x=1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u = 1-\dfrac{v^2}{9} \\ 0 \le v \le 3 \end{cases}$$

— это часть параболы в первом квадранте (2). Образы отрезков *BC* и *CO* также являются дугами парабол (3), (4):

$BC: \; u = \dfrac{1}{4}(v^2-9)$, $1 \le v \le 3$,

$CO: \; u = -1-v^2$, $0 \le v \le 1$.

Так как точка $z = \dfrac{1}{2}(1+i)$ переходит в точку $w = i - \dfrac{1}{2}$, то внутренность квадрата переходит во внутренность криволинейного четырехугольника.

Ответ: внутренность квадрата переходит во внутренность криволинейного четырехугольника (1)–(4).

105. Найти однозначное конформное отображение сектора $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{6}$ на единичный круг $|w| < 1$.

Ответ: $w = -\dfrac{1+iz^6}{i+z^6}$.

106. На какую область в плоскости w функция $w = z^2$ отобразит *D* — часть первого квадранта, ограниченную линиями $y=0, x^2-y^2=1, \; xy=1, x=0, y^2-x^2=1$.

Ответ: На прямоугольник, ограниченный прямыми $v=0, v=2$, $u=-1, u=1$.

4.6 Функция Жуковского $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

107. Найти преобразование полярной сетки $|z| = R$, $\arg z = \alpha$ с помощью функции Жуковского $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

Ответ: Окружностям $|z| = R$ соответствуют софокусные эллипсы

$$\frac{4u^2}{\left(R+\dfrac{1}{R}\right)^2} + \frac{4v^2}{\left(R-\dfrac{1}{R}\right)^2} = 1 \qquad (1)$$

Лучам $\arg z = \alpha$ соответствуют ветви софокусных гипербол $\dfrac{u^2}{\cos^2\alpha} - \dfrac{v^2}{\sin^2\alpha} = 1$.

108. Найти области, на которые функция Жуковского отображает: а) круг $|z| < R < 1$,

б) круг $|z| < 1$, в) полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$.

Ответ: 108а) Внешность эллипса (1) (см. формулу в решении задачи 107); 108б) вся плоскость с разрезом по отрезку [–1,1]; 108в) вся плоскость с разрезом вдоль лучей $(-\infty,-1]$ и $[1,+\infty)$, лежащих на действительной оси.

109. Найти образы следующих областей при отображении с помощью функции Жуковского:

а) полукольца $\operatorname{Im} z > 0$, $1 < |z| < R$, б) угла $\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$.

Ответ: 109а) Верхняя половина внутренности эллипса (1) (см. формулу в решении задачи 107); 109б) область между ветвями гиперболы $u^2 - v^2 = \frac{1}{2}$.

4.7. Несколько примеров построения отображений

110. Отобразить треугольник, заключенный между прямыми $y = 2$, $x = 0$, $y = x$, с помощью функции $w = \frac{1}{2}z^2 - z$ на плоскость w.

Решение. Используя $z = x + iy$, запишем функцию $w = \frac{1}{2}(x^2 + 2ixy - y^2) - x - iy$.

Тогда $u = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) - x$, $v = xy - y$. Рассмотрим, во что будут отображаться конкретные прямые.

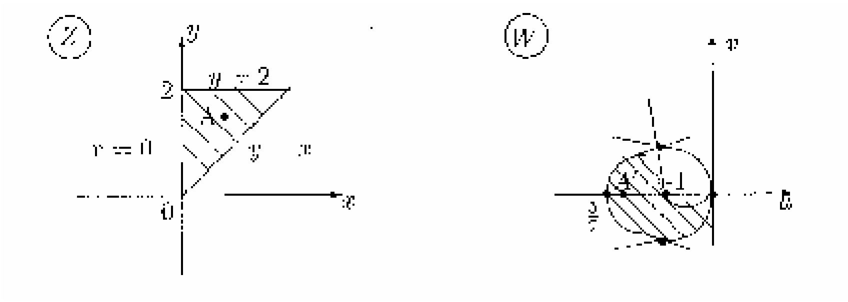
Отрезок $y = 2$, $0 \le x \le 2$: $u = \frac{x^2}{2} - x - 2$, $v = 2xy - y$.

Из последнего выразим $x = \frac{1}{2}(v + 2)$ при $-2 \le v \le 2$, тогда

$u = \frac{1}{8}(v^2 + 4v + 4) - 2 - \frac{v}{2} - 1$ и окончательно $u = \frac{1}{8}v^2 - \frac{5}{2}$. Эта парабола — образ $y = 2$. Рассмотрим $x = 0$, $0 \le y \le 2$: $u = -\frac{y^2}{2}$, $v = -y$.

Видим, что $u = -\frac{1}{2}v^2$ при $-2 \le v \le 0$. Образ $x = 0$ — также парабола.

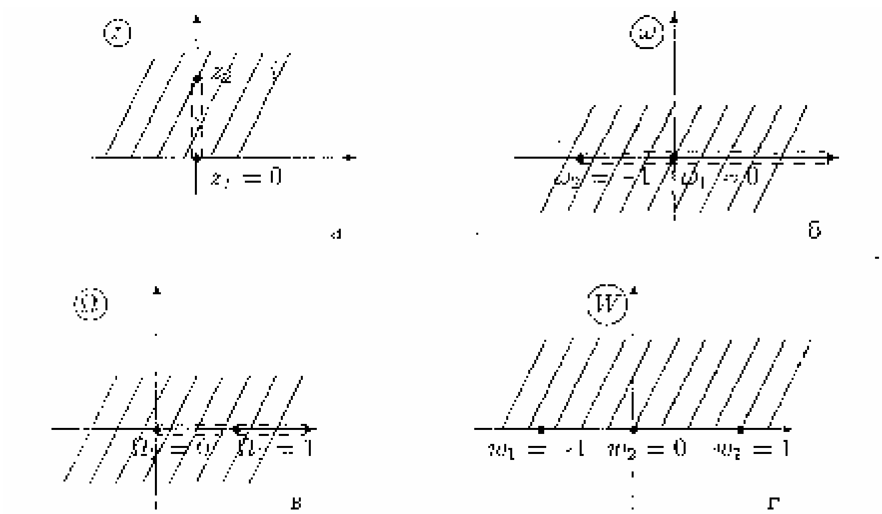
Рассмотрим линию $y = x$, $0 \le x \le 2$: $u = -x$, $v = x^2 - x$ или $v = u^2 + u$. Это парабола с осью Ov. Теперь выясним, куда перейдет внутренняя точка прообраза. Возьмем $z = 1 + \frac{3}{2}i$, вычислим $w = -\frac{13}{8}$, она лежит внутри образа.



Ответ: Образ и прообраз области изображены на рисунках.

111. Найти однолистное и конформное отображение верхней полуплоскости с разрезом по отрезку от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = i$ (рис. а) на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ (устранить разрез).

<u>Решение</u>**.** С помощью отображения $\omega = z^2$ удвоим углы с вершинами в начале координат, в результате чего отрезок $[z_1, z_2]$ перейдет в отрезок $[\omega_1, \omega_2]$ расширенной плоскости ω от точки $\omega_1 = z_1{}^2 = 0$ до точки $\omega_2 = z_2{}^2 = -1$, а луч $\arg z = \pi$ (отрицательная действительная полуось) — в луч $\arg \omega = 2\pi$.



В итоге исходная область отобразится на расширенную плоскость ω с разрезом по действительной оси от точки $\omega_2 = -1$ до точки $\omega = \infty$ (рис. б). С помощью функции $\Omega = \omega + 1$ сдвинем начало разреза в начало координат и перейдем к расширенной плоскости Ω с разрезом вдоль действительной оси от точки $\Omega_2 = 0$ до точки $\Omega = \infty$ (рис. в). В полученной области можно выделить однозначную ветвь функции $W = \sqrt{w}$, уменьшающую вдвое углы с вершинами в начале координат и отображающую последнюю область на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ (рис. г).

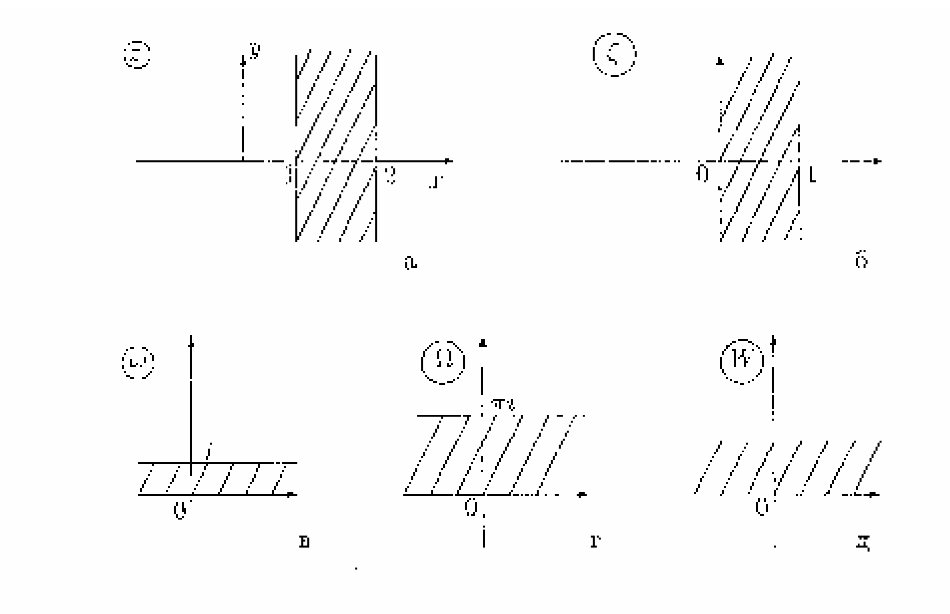
Итак, рассматриваемую задачу решает функция $W = \sqrt{w} = \sqrt{\omega + 1} = \sqrt{z^2 + 1}$.

Эта функция может быть использована для построения комплексного потенциала, связанного со скоростью течения, при исследовании картины течения около плотины, в роли которой может выступать отрезок $[z_1, z_2]$.

Ответ: $W = \sqrt{z^2 + 1}$.

112. Найти однолистное и конформное отображение вертикальной полосы $1 < \operatorname{Re} z < 2$ (рис. а) на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

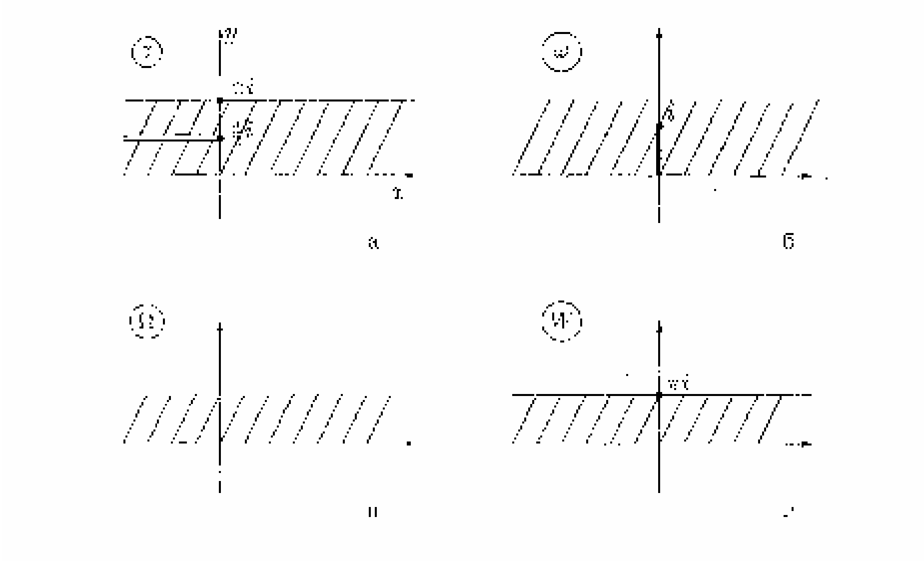
Решение. С помощью функции $\varsigma = z - 1$ передвинем левую границу полосы до мнимой оси (рис. б). Функция $\omega = e^{\frac{1}{2}\pi i} \cdot \varsigma$ повернет полосу на прямой угол против часовой стрелки (рис. в). Отображение $\Omega = \pi\omega$ увеличит ширину полосы $0 < \operatorname{Im} \omega < 1$ в π раз (рис. г). Наконец, функция $w = e^{\Omega}$ отобразит полосу $0 < \operatorname{Im} \Omega < \pi$ на верхнюю полуплоскость (рис. д). Окончательно, искомое отображение $w = e^{\Omega} = e^{\pi\omega} = e^{\pi i \varsigma} = e^{\pi i (z-1)}$.



Ответ: $w = e^{\pi i (z-1)}$.

113. Найти однолистное и конформное отображение полосы $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ с разрезом $-\infty < \operatorname{Re} z \le 0, \quad \operatorname{Im} z = \dfrac{\pi}{2}$ (рис. а) на полосу $0 < \operatorname{Im} w < \pi$ (устранить разрез).

Решение. Функция $\omega = e^{z}$ отобразит исходную полосу ширины π на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} \omega > 0$, причем разрез перейдет в разрез $0 \le |\omega \le 1|, \quad \arg \omega = \dfrac{\pi}{2}$ вдоль мнимой оси длиной 1 (рис. б). Функция $\Omega = \sqrt{\omega^2 + 1}$ отобразит последнюю область на полуплоскость $\operatorname{Im} \Omega > 0$ (рис. в), (см. решение задачи 111). Главная ветвь логарифма отобразит верхнюю полуплоскость на полосу $0 < \operatorname{Im} w < \pi$ (рис. г).

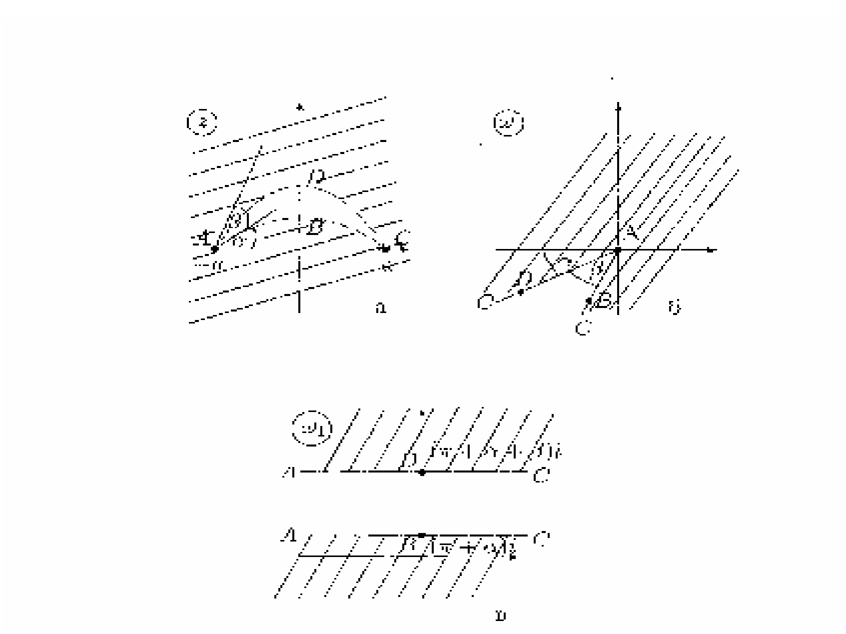


Итак, искомое отображение $w = \ln\Omega = \ln\sqrt{\omega^2+1} = \ln\sqrt{e^{2z}+1} = \dfrac{1}{2}\ln(e^{2z}+1)$.

Ответ: $w = \dfrac{1}{2}\ln(e^{2z}+1)$.

114. Найти отображение круговой луночки (рис. а) на полосу $0 < \operatorname{Im} w < h$.

Решение. Сначала дробно-линейным отображением преобразуем луночку в сектор (рис. б): $\omega = \dfrac{z+a}{z-a}$, а затем с помощью ветви логарифма $\omega_1 = \ln\omega = \ln|\omega| + i\arg\omega$, $0 \le \arg\omega < 2\pi$ в полосу шириной $\beta: \pi+\alpha < \operatorname{Im}\omega_1 < \pi+\alpha+\beta$. При первом отображении точка B : $ia\cdot tg\dfrac{\alpha}{2}$ переходит в точку $-(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, при втором–в точку $\omega_1 = (\pi+\alpha)i$. Точки A и C при втором отображении попадают в концы полосы (рис. в).



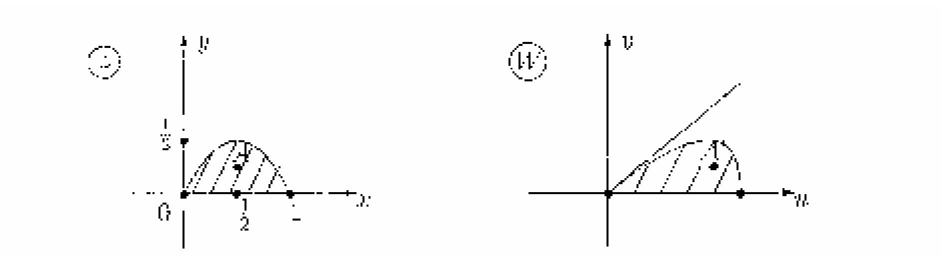
Теперь линейным отображением переведем полосу в заданную $0 < \operatorname{Im} w < h$ (плоскость w не изображена): $w = \frac{h}{\beta}\omega_1 - \frac{h(\pi+\alpha)}{\beta} i = \frac{h}{\beta}\left(\ln\frac{z+a}{z-a} - (\pi+\alpha)i\right)$

115. На какую область в плоскости W ветвь функции $W = \sqrt{z}$, для которой $W > 0$ при $z > 0$, отобразит область D — полукруг $x^2 + y^2 = x$, лежащий над вещественной осью?

Решение. Возведем выражение для функции в квадрат: $W^2 = z$, и подставим туда $W = u + iv$ и $z = x + iy$. Получим $u^2 + 2iuv - v^2 = x + iy$, откуда найдем $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$. Эти выражения подставим в уравнение границы

$(u^2 - v^2)^2 + 4u^2v^2 = u^2 - v^2$ или $(u^2 + v^2)^2 = u^2 - v^2$.

Для того чтобы начертить эту кривую, удобнее выразить ее в полярных координатах $u = \rho\cos\theta,\ v = \rho\sin\theta$. Имеем: $\rho^2 = \cos 2\theta$. Это уравнение лемнискаты Бернулли.



Для θ и ρ очевидны ограничения $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4},\quad 0 \le \rho \le 1$. Теперь, чтобы показать, что внутренность полукруга попала внутрь лемнискаты, возьмем $x = \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{4}$ в полукруге. Найдем u и v из системы

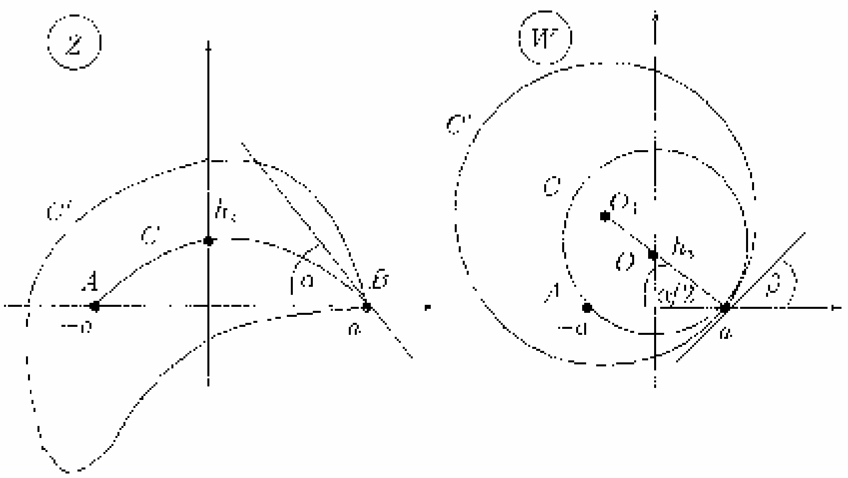
$$\begin{cases} u^2 - v^2 = \dfrac{1}{2} \\ 2uv = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} u = \sqrt{\dfrac{1}{8}(\sqrt{5}+2)} \\ v = \sqrt{\dfrac{1}{8}(\sqrt{5}-2)} \end{cases}$$

Эта точка лежит внутри образа.

116. Пример, который рассмотрен ниже, играет важную роль в теории крыла самолета. Надо найти конформное отображение расширенной плоскости z с разрезом вдоль дуги *AB* окружности, концы которой лежат в точках $\pm a$ действительной оси (внешность дуги *AB),* на внешность круга расширенной плоскости W, граница которого проходит через те же точки $\pm a$.

<u>Решение.</u> С помощью дробно-линейной функции $w = \dfrac{z-a}{z+a}$ отобразим внешность дуги *AB* плоскости z на внешность луча *AB* плоскости w, причем дуга *AB* перейдет при этом в луч от точки $w=0$ до точки $w=\infty$. Внешность дуги *AB* отобразится на внешность луча. Так как производная $\dfrac{dw}{dz} = \dfrac{2a}{(z+a)^2}$ и при $z=a$ положительна, то этот луч будет наклонен к отрицательной оси плоскости w под углом $\alpha = 2arctg\dfrac{h}{a}$ (плоскость w на чертеже не изображена). Далее поступим следующим образом.

Найдем отображение на внешность луча в плоскости w внешности окружности *C* плоскости W. С этой целью снова воспользуемся дробно-линейной функцией $\Omega = \dfrac{w-a}{w+a}$



При этом окружность *C* перейдет в прямую, которая из-за того, что производная $\dfrac{d\Omega}{dw} = \dfrac{2a}{(w+a)^2}$ при $w=a$ положительна, образует с положительной осью угол $\beta = \dfrac{\pi}{2} - arctg\dfrac{h}{a}$. Внешность круга *C* перейдет в полуплоскость на плоскости Ω, ограниченную этой прямой. Отображение $w = \Omega^2 = \left(\dfrac{w-a}{w+a}\right)^2$ переведет эту полуплоскость на внешность луча, образующего с положительной осью угол $2\beta = \pi - 2arctg\dfrac{h}{a} = \pi - \alpha$.

Таким образом, этот луч совпадает с ранее полученным лучом на плоскости w.

Исключив w, получим искомое отображение

$$\left(\frac{w-a}{w+a}\right)^2 = \frac{z-a}{z+a}$$

Найдем $z = \frac{1}{2}\left(w + \frac{a^2}{w}\right)$ и $w = z + \sqrt{z^2 - a^2}$.

При данном отображении $z(w)$ любая окружность c', касающаяся окружности C в точке $w = a$, переходит в замкнутую кривую, охватывающую дугу AB и имеющую в точке B $(z = a)$ точку возврата. Эта кривая напоминает профиль крыла самолета. Функция $w(z) = z + \sqrt{z^2 - a^2}$ осуществляет конформное отображение внешности этого профиля на внешность круга, ограниченного окружностью c'.

Изменяя значения параметров a, h и d, можно получить различные по форме сечения крыльев, называемых профилями Жуковского (профили НЕЖ). Поясним, что a характеризует ширину крыла, h — его искривление, $d = OO_1$ — расстояние между центрами окружностей, характеризует толщину крыла. Так как комплексный потенциал обтекания кругового цилиндра c' известен, то можно найти комплексный потенциал обтекания профиля и, зная его, выяснить вопрос о подъемной силе и сопротивлении крыла.

Тестирование по курсу ТФКП (часть1)

1 Формула модуля и аргумента комплексного числа $z = x + iy$

2 Найти модуль и аргумент комплексного числа $-1 + i$

3 Найти модуль комплексного числа $z = a^2 - b^2 + 2abi$

4 Найти произведение чисел $z_1 = \sqrt{2} - i\sqrt{3}$ и $z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{3}$

5 Вычислить $i^{101} \cdot i^{100} \cdot i^{99}$

6 Сократить дробь $\frac{a^4 + 2a^2 i - 1}{a^2 + i}$

7 Составить квадратное уравнение по его корням $z_1 = 2 + 3i$ и $z_2 = 2i$ (воспользоваться теоремой Виета)

8 Формула Эйлера для $e^{i\varphi}$

9 Формула Муавра $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n$

10 Написать уравнение кривой $|z - 1| = 2$ в координатах (x, y)

11 Какая кривая выражается равенством $|z - 2|^2 + |z + 2|^2 = 50$

12 Для $z = x + iy$ найти $\mathrm{Re}(z^2 - \bar{z})$.

13 Написать выражение $\sin z$ через экспоненту.

14 Написать выражение tgz через экспоненту.

15 Написать необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции $u + iv$.

16 Что геометрически выражает модуль производной $|f'(z)|$?

17 Что произойдет с прямой $y = kx$ при отображении $f(z) = iz$?

18 В какую кривую отобразится луч $y = x$, $x > 0$ дробно-линейной функцией $w = \frac{2z - 3}{z + 4}$?

19. Найти выражение $\overline{w}$ для функции для $w = \frac{2iz - 3}{z + 4i}$.

20 Чему равна мнимая часть $\ln z$?

Теоретические вопросы по по первой части курса ТФКП можно самостоятельно изучить по источникам:

1. *Алешков Ю.З., Смышляев П.П.* Теория функций комплексного переменного и ее приложения: Учеб.пособие. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1986. 248 с.
2. *Лунц Г.Л., Эльсголъц Л.Э.* Функции комплексного переменного с элементами операционного исчисления. М.: Физматгиз, 1958. 298 с.
3. *Маркушевич А.И., Маркушевич Л,А.* Введение в теорию аналитических функций. М.: Просвещение, 1977. 320 с.
4. *Смирное В.И.* Курс высшей математики. Т.3. 4.2. М.: Гостехиздат. 1974. 688 с.
5. *Фукс Б.А., Шабат Б.В.* Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. М.: Наука, 1964. 255 с.
6. *Цыркин М.Я.* Краткий курс теории функций комплексного переменного: Учеб. пособие. М.: Просвещение, 1964. 255 с.

Часть 2 (**в работе)**

5 Интегрирование функций комплексного переменного
5.1 Вычисление интегралов по формуле Ньютона-Лейбница
5.2 Интеграл по контуру
5.3 Интегральная формула Коши
6 Ряды
6.1 Степенные ряды и ряд Тейлора
6.2 Ряд Лорана
6.3 Аналитическое продолжение функции
7 Изолированные особые точки и вычеты функций
7.1 Классификация особых точек
7.2 Вычеты функций
8 Применение вычетов к вычислению интегралов
8.1 Вычисление интегралов на основе теоремы Коши
8.2 Вычисление определенных интегралов с помощью вычетов
8.3 Несобственные интегралы от действительной переменной
9 Ответы и указания к решению задач
10 Использованная литература

Литература ко второй части

1. *Ангилейко И.М., Козлова Р.В.* Задачи по теории функций комплексной переменной. Минск: Вышейшая школа, 1976. 128 с.
2. *Волковыский Л.И., Лунц Г,Л., Араманович И.Г.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: Физматгиз, 1960. 368 с.
3. *Грищенко А.Б. и др.* Теория функций комплексного переменного: решение задач: Учеб. пособие. Киев: Вища школа, 1986. 333 с.
4. *Гюнтер Н.М., Кузьмин Р. О.* Сборник задач по высшей математике. Т.3. М.; Л.: ГИТТЛ, 1951. 268 с.
5. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.2. М.: Высшая школа, 1980. 366 с.
6. *Коппенфельс В.. Штальман Ф.* Практика конформных отображений. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.— 486 с.

7. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965. 716 с.
8. Сборник задач по теории аналитических функций/ Под ред. М.А. Евграфова. 2-е изд. М.: Наука, 1972. 416 с.
9. Старков В.Н. Задачи по теории функций комплексного переменного: Учебное пособие.— СПб.: Изд-во С.-Петербургского университета, 1998.— 100 с

Тестирование для 2 части

1. Вычислить $\int\limits_0^{1+i} z dz$.

2. Написать интегральную формулу Коши, выражающую значения функции $f(z)$ в области через значения функции $f(z)$ на границе L области.

3. Определить радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nz^n}{2^n}$.

4. Найти особые точки функции $\frac{z+2}{z(z-1)^3}$ и определить их тип.

5. Что такое вычет функции?

6. Написать ряд для функции $\frac{1}{1-z}$.

7. Формула для определения радиуса сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$.

8. Написать общий вид ряда Лорана.

9. Перечислить типы особых точек.

10. Сформулировать первую лемму Жордана.

Часть 3

Глава 7. Операционное исчисление (изменить)

7.1. Преобразование Лапласа. Оригинал и изображение. Свойство линейности.
7.2. Функция Хевисайда. Таблица изображений основных функций.
7.3. Теорема о существовании изображения.
7.4. Определение оригинала по изображению. Формула Меллина.
7.5. Первая и вторая теоремы разложения.
7.6. Условия существования оригинала. Теорема обращения.
7.7. Теорема подобия и теорема запаздывания.
7.8. Теорема смещения и теорема упреждения.
7.9. Теорема умножения изображений.
7.10. Теорема умножения оригиналов.
7.11. Изображения периодических оригиналов.
7.12. Дифференцирование оригиналов и интегрирование оригиналов.
7.14. Дифференцирование изображения и интегрирование изображения.
7.14. Применение преобразования Лапласа к вычислению несобственных интегралов.
7.15. Интегрирование ОДУ с постоянными коэффициентами с помощью преобразования Лапласа.

7.16. Интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений.
7.17. Применение интеграла Дюамеля к интегрированию ОДУ.
7.18. Интегрирование ОДУ с переменными (функциональными) коэффициентами.
7.19. О функциях с запаздывающим аргументом и их изображениях.
7.20. Интегрирование ОДУ, содержащих в правой части функцию Хевисайда.
7.21. Интегрирование ОДУ с запаздывающим аргументом с помощью преобразования Лапласа.
7.22. Решение интегральных уравнений Вольтерра с помощью преобразования Лапласа.
7.24. Решение нестационарных задач математической физики с помощью операционного метода.

В работе

Литература к третьей части

1. *Диткин В. А., Прудников А, П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление.-- М.: Наука., 1974. — 542 с.
2. *Диткин В. А., Кузнецов П. И.* Справочник по операционному исчислению.— М.: Л., 1951.— 256 с.
3. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1965, 716 с.
4. *Романовский П. И.* Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразования Лапласа. - М.: Наука. 1980. 336 с.
5. *Шостак Р. Я.* Операционное исчисление.— М., 1968.– 192 с.
6. *Шахно К.У.* Элементы теории функций комплексной переменной и операционного исчисления: Учеб. пособие. Л.: Изд-во СЗПИ, 1961, 424 с.
7. Старков В.Н.Операционное исчисление и его применения. Учебное пособие, СПб, 2000, 65 с.