Операционное исчисление и его применение

[Старков В.Н. Операционное исчисление и его применения. Учебн. пособ.-СПб, 2000.-65 с.]

Настоящий сборник задач по операционному исчислению возник на основе опыта преподавания раздела по операционному исчислению, входящему в курс лекций по Теории функций комплексного переменного (глава 7), читаемый на факультете прикладной математики–процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета. Он имеет своей целью дать преподавателю и студенту некоторый минимум теоретического материала по основным вопросам операционного исчисления.

Каждый раздел начинается с краткого введения, в котором без доказательства приводятся необходимые формулы и указания. Задачник может служить пособием для лиц, самостоятельно изучающих операционное исчисление. Все задачи снабжены ответами. Приводятся также образцы решения задач и примеров с объяснениями.

Сборник может быть использован студентами и аспирантами физико-математических факультетов высших учебных заведений.

Содержание

Операционное исчисление позволяет решать различные математические задачи: нахождение интегралов, решение обыкновенных дифференциальных уравнений, интегральных уравнений, уравнений в частных производных и т.п.

В основе методов операционного исчисления лежит идея интегральных преобразований (преобразование Лапласа), позволяющих свести обыкновенные дифференциальные и интегральные уравнения к алгебраическим (операторным) уравнениям, а дифференциальные уравнения в частных производных — к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

1. Оригиналы и изображения функций по Лапласу

Определение 1. Будем действительную функцию действительного аргумента $f(t)$ называть ***оригиналом,*** если она удовлетворяет трем требованиям:

1. $f(t) \equiv 0$, при $t < 0$.
2. $|f(t)| < Me^{s_0 t}$, при $t > 0$, где $M > 0, s_0 \geq 0$ — некоторые действительные постоянные, s_0 называют показателем роста функции $f(t)$. В этом случае говорят, что функция $f(t)$ возрастает не быстрее показательной функции.
3. На любом конечном отрезке $[a, b]$ положительный полуоси Ot функция $f(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле, т.е.
   a) ограничена,
   b) либо непрерывна, либо имеет лишь конечное число точек разрыва I рода,
   c) имеет конечное число экстремумов.

Функции, удовлетворяющие этим трем требованиям, называются в операционном исчислении ***изображаемыми по Лапласу*** или ***оригиналами.***

Определение 2. ***Изображением по Лапласу*** функции $f(t)$ называется функция комплексного переменного $p = s + i\sigma$, определяемая соотношением

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt \qquad (1)$$

Тот факт, что функция $F(t)$ является изображением оригинала $f(t)$, символически это записывается так:

$$F(p) = L\{f(t)\} \text{ или } F(p) \to f(t) \qquad (2)$$

2. Нахождение изображений функций (оригиналов)

Будем искать изображения функций по формуле (1).

Пример 1. Найти изображение функций $f(t) = a^t$, $t > 0$.

Решение. Так как $a = e^{\ln a}$, то $f(t) = e^{t \cdot \ln a}$. Найдем

$$F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt=\int_0^\infty e^{-t(p-\ln a)}dt=-\left.\frac{e^{-t(p-\ln a)}}{p-\ln a}\right|_0^\infty=\frac{1}{p-\ln a}$$

Пример 2. Найти изображение единичной функции Хевисайда

$$\eta(t)=\begin{cases}1,\ \text{при } t>0\\ 0,\ \text{при } t<0\end{cases}\qquad (3)$$

Решение. По формуле (1)

$$\eta(t)\leftarrow\int_0^\infty \eta(t)e^{-pt}dt=\int_0^\infty e^{-pt}dt=\left.\frac{e^{-pt}}{-p}\right|_0^\infty=\frac{1}{p}.$$

Замечание. Функция η (t) является простейшей функцией-оригиналом. С ее помощью можно любую функцию, удовлетворяющую только условиям 2 и 3, превращать в оригинал, удовлетворяющий уже всем условиям определения 1. Это делается с помощью выражения:

$$\varphi(t)\eta(t)=\begin{cases}\varphi(t)\ \text{при } t>0\\ 0\ \text{при } t<0\end{cases}\qquad (4)$$

Однако в дальнейшем для простоты записи пишут вместо $\varphi(t)\eta(t)$ просто $\varphi(t)$, считая, что при t<0 эти функции равны нулю. Например, вместо оригинала $\eta(t)\sin\omega t$ будем писать просто $\sin\omega t$, имея в виду, что и эта функция-оригинал.

Полученные с помощью формулы (1) изображения некоторых функций сведены в таблицу. Эту таблицу можно поменять. Ее можно использовать для нахождения изображений функций (см. примеры ниже).

Таблица изображений основных функций

№	F(t) — оригинал (t>0)	F(p) — изображение	№	F(t) — оригинал (t>0)	F(p) — изображение
1	1	$\frac{1}{p}$	10	$e^{\alpha t}\cos\beta t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
2	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	11	$e^{\alpha t}\sin\beta t$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
3	$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p-\lambda}$	12	$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^{n+1}}$
4	$Sin\,\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	13	$t\cos\beta t$	$\frac{p^2-\beta^2}{(p^2+\beta^2)^2}$
5	$Cos\,\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	14	$t\sin\beta t$	$\frac{2p\beta}{(p^2+\beta^2)^2}$

№	F(t) — оригинал (t>0)	F(p) — изображение	№	F(t) — оригинал (t>0)	F(p) — изображение
6	$sh\omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$	15	$t^n \sin\omega t$	$\dfrac{n!\,\mathrm{Im}(p+i\omega)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1}}$
7	$ch\omega t$	$\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$	16	$t^n \cos\omega t$	$\dfrac{n!\,\mathrm{Re}(p+i\omega)^{n+1}}{(\beta^2+\omega^2)^{n+1}}$
8	Sin($t-\alpha$),α >0	$\dfrac{e^{-\alpha p}}{p^2+1}$	17	$t^n e^{\alpha t}\sin\omega t$	$\dfrac{n!}{2i}\left[\dfrac{1}{(p-\alpha-i\omega)^{n+1}}-\right.$ $\left.-\dfrac{1}{(p-\alpha+i\omega)^{n+1}}\right]$
9	Cos($t-\alpha$),α >0	$\dfrac{e^{-\alpha p}}{p^2+1}$	18	$t^n e^{\alpha t}\cos\omega t$	$\dfrac{n!}{2}\left[\dfrac{1}{(p-\alpha-i\omega)^{n+1}}+\right.$ $\left.+\dfrac{1}{(p-\alpha+i\omega)^{n+1}}\right]$

Пример 3. Найти изображение функции $f(t)=\cos^3 t$.

Решение. По Формуле Эйлера $\cos t=\frac{1}{2}\left(e^{it}+e^{-it}\right)$. Тогда

$$\cos^3 t=\frac{1}{8}\,(e^{3it}+3e^{it}+3e^{-it}+e^{-3it})=\frac{1}{4}\cdot\frac{e^{3it}+e^{-3it}}{2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}=\frac{1}{4}\cos 3t+\frac{3}{4}\cos t.$$

Применив формулу 5 из таблицы, получаем:

$$F(p)=\frac{1}{4}\cdot\frac{p}{p^2+9}+\frac{3}{4}\,\frac{p}{p^2+1}=\frac{p}{4}\cdot\frac{p^2+1+3p+27}{(p^2+9)(p^2+1)}=\frac{p(p^2+7)}{(p^2+9)(p^2+1)}$$

Пример 4. Найти изображение функции $f(t)=\mathrm{sh}\,at\sin bt$.

Решение. Так как $\mathrm{sh}\,at=\frac{1}{2}(e^{at}-e^{-at})$, то

$$f(t)=\frac{1}{2}e^{at}\sin bt-\frac{1}{2}e^{-at}\sin bt.$$

Применяя формулу 11 из таблицы пункта 2, получим

$$F(p)=\frac{1}{2}\frac{b}{(p-a)^2+b^2}-\frac{1}{2}\frac{b}{(p+a)^2+b^2}=\frac{2pab}{((p-a)^2+b^2)((p+a)^2+b^2)}$$

Пример 5. Найти изображение функции $f(t)=t\,\mathrm{ch}\,bt$.

Решение. Так как $f(t)=\frac{t}{2}(e^{bt}+e^{-bt})=\frac{1}{2}te^{bt}+\frac{1}{2}te^{-bt}$.

По формуле 12 для n=1 имеем:

$$F(p)=\frac{1}{2(p-b)^2}+\frac{1}{2(p+b)^2}=\frac{p^2+b^2}{(p^2-b^2)^2}.$$

В задачах 6–16 найти изображения функций или по таблице, или непосредственно по формуле(1).

6. $f(t)=\sin^2 t$ ответ: $F(p)=\frac{2}{p(p^2+4)}$

7. $f(t)=e^t\cos^2 t$ ответ: $F(p)=\frac{p(p^2+2p+3)}{(p-1)(p^2-2p+5)}$

8. $f(t)=4t^{2-}2t+3$ ответ: $F(p)=\frac{8}{p^3}-\frac{2}{p^2}+\frac{3}{p}$

9. $f(t)=\frac{1}{3}t^3+4\cos 2t$ ответ: $\frac{2}{p^4}+\frac{4p}{p^2+4}$

10. $f(t)=\frac{1}{3}\sin 3t-5$ ответ: $F(p)=\frac{1}{p^2+9}-\frac{5}{p}$

11. $f(t)=4\text{-}5e^{2t}$ ответ: $F(p)=\frac{8+p}{2p-p^2}$

12. $f(t)=3t^3e^{-t}+2t^2-1$ ответ: $F(p)=\frac{18}{(p+1)^4}+\frac{4}{p^3}-\frac{1}{p}$

13. $f(t)=2\sin 2t+3sh2t$ ответ: $F(p)=\frac{10p^2+8}{p^4-16}$

14. $f(t)=t^2e^t+2te^{-t}+4ch2t$ ответ: $F(p)=\frac{2}{(p-1)^3}+\frac{2}{(p+1)^2}+\frac{4p}{p^2-4}$

15. $f(t)=\cos 2t\cdot\sin 3t$ ответ: $F(p)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2+1}+\frac{5}{p^2+25}\right)$

Указание: использовать формулу $\sin 3t\cdot\cos 2t=\frac{1}{2}(\sin 5t+\sin t)$

16. $f(t)=e^{-4t}\sin 3t\cos 2t$ ответ: $F(p)=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{(p+4)^2+25}+\frac{1}{(p+4)^2+1}\right)$

Указание: использовать равенство $\sin 3t\cdot\cos 2t=\frac{1}{2}(\sin 5t+\sin t)$

3. Отыскание оригинала по изображению

Для нахождения оригинала *f(t)* по известному изображению *F(p)* нужно использовать формулы обращения Римана-Меллина. Если функция *f(t)* является оригиналом, т.е. удовлетворяет условиям 1-3 определения 1 и *F(p)* служит ее изображением, то в любой точке своей непрерывности функция *f(t)* равна:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{w\to\infty}\int_{a-iw}^{a+iw}e^{pt}F(p)dp \quad (5)$$

получающийся интеграл (в смысле главного значения) берется вдоль любой прямой $\operatorname{Re} p=a>s_0$.

Ясно, что при вычислении $f(t)$ применяется весь аппарат ТФКП. На практике используются следующие приемы.

3.1 Разложение на простейшие дроби.

Если $F(p)=\dfrac{A(p)}{B(p)}$ есть дробно-рациональная функция, причем степень числителя $A(p)$ меньше степени знаменателя $B(p)$, то эту дробь разлагают на сумму простых дробей и находят оригиналы для каждой простой дроби либо непосредственно по формуле (1), либо по таблице из пункта 2.

Пример 17. Найти оригинал функции $F(p)=\dfrac{p}{p^2-2p+5}$.

Решение. Разложим дробь на сумму таких дробей, оригиналы которых можно найти по формулам 10 и 11 таблицы пункта 2.

$$\frac{p}{p^2-2p+5}=\frac{(p-1)+1}{(p-1)^2+4}=\frac{p-1}{(p-1)^2+4}+\frac{1}{(p-1)^2+4},$$

$$\frac{p-1}{(p-1)^2+4}\to e^t\cos 2t,\quad \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(p-1)^2+4}\to\frac{1}{2}e^t\sin 2t.$$

Окончательно

$$\frac{p}{p^2-2p+5}\to e^t(\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t)$$

Пример 18. Найти оригинал функции $F(p)=\dfrac{1}{p^3-8}$.

Решение. Используем элементарные приемы разложения, известные из интегрального исчисления. Разложим данную дробь на простейшие:

$$\frac{1}{p^3-8}=\frac{A}{p-2}+\frac{Bp+C}{p^2+2p+4}=\frac{A(p^2+2p+4)+(p-2)(Bp+C)}{(p-2)(p^2+2p+4)}.$$

Приравниваем числители $(A+B)p^2+(2A-2B+C)p+4A-2C=1$

$$\left.\begin{array}{rr} p^2: & A+B=0 \\ p: & 2A-2B+C=0 \\ 1: & 4A-2C=1 \end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{l} A=\dfrac{1}{12} \\ B=-\dfrac{1}{12} \\ C=-\dfrac{1}{3} \end{array}\right\}$$

$$\frac{1}{p^3-8}=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{1}{12}\cdot\frac{p+4}{p^2+2p+4}=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{1}{12}\cdot\frac{p+1}{(p+1)^2+(\sqrt{3})^2}-\frac{\sqrt{3}}{12}\cdot\frac{\sqrt{3}}{(p+1)^2+(\sqrt{3})^2}.$$

Используя формулы 3, 10, 11 из таблицы пункта 2, получим:

$$f(t)=\frac{1}{12}e^{2t}-\frac{1}{12}e^{-t}(\cos t\sqrt{3}+\sqrt{3}\sin t\sqrt{3}).$$

В следующих задачах найти оригиналы по заданным изображениям.

19. $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)(p^2-4)}$ Ответ: $f(t)=-\dfrac{1}{3}e^t+\dfrac{1}{4}e^{2t}+\dfrac{1}{12}e^{-2t}$.

20. $F(p)=\dfrac{(p+3)}{p(p^2-4p+3)}$ Ответ: $f(t)=1-2e^t+e^{3t}$.

21. $F(p)=\dfrac{1}{p(p^4-5p^2+4)}$ Ответ: $f(t)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3}\operatorname{ch} t+\dfrac{1}{12}\operatorname{ch} 2t$.

22. $F(p)=\dfrac{1}{p^2+4p+5}$ Ответ: $f(t)=e^{-2t}\sin t.$

23. $F(p)=\dfrac{1}{p^2+4p+3}$ Ответ: $f(t)=\dfrac{1}{2}(e^{-t}-e^{-3t}).$

24. $F(p)=\dfrac{1}{(p^2+1)^2}$ Ответ: $f(t)=\dfrac{1}{2}(\sin t-t\cos t).$

25. $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+1)^2}$ Ответ: $f(t)=\dfrac{1}{2}t\sin t.$

26. $F(p)=\dfrac{1}{p+2p^2+p^3}$ Ответ: $f(t)=1-e^{-t}-te^{-t}.$

27. $F(p)=\dfrac{1}{7-p+p^2}$ Ответ: $f(t)=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}e^{\frac{t}{2}}\sin\dfrac{3\sqrt{3}}{2}t.$

28. $F(p)=\dfrac{2p^3+p^2+2p+2}{p^5+2p^4+2p^3}$ Ответ: $f(t)=\dfrac{t^2}{2}+2e^{-t}\sin t.$

29. $F(p)=\dfrac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}$ Ответ: $f(t)=\dfrac{1}{6}e^{2t}-\dfrac{1}{15}e^{-t}-\dfrac{1}{10}\cos 2t-\dfrac{1}{5}\sin 2t.$

3.2. Первая теорема разложения

Теорема. Если изображение искомой функции может быть разложено в степенной ряд по степеням $\dfrac{1}{p}$, т.е.

$$F(p)=\frac{a_0}{p}+\frac{a_1}{p^2}+\cdots+\frac{a_n}{p^{n+1}}+\cdots \qquad (6)$$

(причем этот ряд сходится к $F(p)$ при $|p|>R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|\neq\infty$), то оригинал имеет вид

$$f(t)=a_0+a_1\frac{t}{1!}+a_2\frac{t^2}{2!}+\cdots+a_n\frac{t^n}{n!}+\cdots \qquad (7)$$

(причем ряд сходится при всех значениях t).

Пример 30. Найти оригинал функции $F(p)=\dfrac{1}{p(p^4+1)}$, используя первую теорему разложения.

Решение. Имеем $F(p)=\dfrac{1}{p(p^4+1)}=\dfrac{1}{p^5}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{p^4}}=\dfrac{1}{p^5}-\dfrac{1}{p^9}+\dfrac{1}{p^{13}}-\cdots$

Этот ряд сходится при $|p|>1.$

Находим $f(t)=\dfrac{t^4}{4!}-\dfrac{t^8}{8!}+\dfrac{t^{12}}{12!}-\dfrac{t^{16}}{16!}+\cdots$

С помощью первой теоремы разложения найти оригиналы.

31. $F(p)=\dfrac{1}{p^k+a^k}$, где k - целое положительное число. Ответ: $f(t)=\dfrac{t^k}{k!}-\dfrac{a^k t^{2k}}{(2k)!}+\dfrac{a^{2k}t^{3k}}{(3k)!}-\cdots$

32. $F(p)=\sin\dfrac{1}{p}$ Ответ: $f(t)=1-\dfrac{t^2}{3!2!}+\dfrac{t^4}{5!4!}-\cdots$

3.3. Вторая теорема разложения

Она утверждает, что при определенных условиях на $F(p)$, как функцию комплексного переменного, оригиналом для $F(p)$ служит функция

$$f(t)=\sum_{(p_k)} res\left[F(p)e^{pt}\right], \qquad (8)$$

где сумма вычетов берется по всем особым точкам p_k функции $F(p)$ в порядке неубывания их модулей.

В частности, если $F(p)=\frac{A(p)}{B(p)}$ – правильная рациональная дробь, то оригиналом ее служит функция

$$f(t)=\sum_{j=1}^{j=l}\ \sum_{m=1}^{m=k_j} A_{j,m}\frac{t^{k_j-m}}{(k_j-m)!}e^{p_j t} \qquad (9)$$

где $A_{j,m}=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{p\to p_j}\left\{\frac{d^{m-1}}{dp^{m-1}}\left[(p-p_j)^{k_j}F(p)e^{pt}\right]\right. \qquad (10)$

p_j – полюсы $F(p)$ кратности k_j $(j=\overline{1,l})$, $m=\overline{1,k_j}$.

Если все полюсы $F(p)$ простые, то формула упрощается и имеет вид

$$f(t)=\sum_{j=1}^{j=l}\frac{A(p_j)}{B'(p_j)}e^{p_j t} \qquad (11)$$

Пример 33. Найти оригинал по его изображению $F(p)=\frac{1}{p^3(p-1)}$.

Решение. Для функции $F(p)$ точка $p_1=0$ является полюсом 3-го порядка, а $p_2=1$ – простым полюсом.

Для отыскания оригинала по формуле (8) найдем вычеты функции $\Phi(p)=F(p)e^{pt}=\frac{e^{pt}}{p^3(p-1)}$ в этих полюсах.

По формулам (9), (10)

$$res\Phi(0)=\frac{1}{2!}\lim_{p\to 0}\frac{d^2}{d_{h^2}}\left(\frac{e^{pt}}{p-1}\right)=\frac{1}{2!}\lim_{p\to 0}\frac{e^{pt}\left[(t^2p-t^2)(p-1)-2(tp-t-1)\right]}{(p-1)^3}=-1-t-\frac{t^2}{2}.$$

По формуле (11):

$$res\Phi(1)=\frac{1}{\left[p^4-p^3\right]'_{p=1}}e^t=e^t$$

$$F(p)\mathrel{\dot{\to}} res\,\Phi(o)+res\Phi(1)=-1-t-\frac{t^2}{2}+e^t.$$

Пример 34. Найти оригинал по изображению $F(p)=\frac{p^3}{(p^2+1)^2}$

Решение. Представим $F(p)$ в другом виде

$$F(p)=\frac{p^3}{(p-i)^2(p+i)^2}$$

Точки $p_1=i$ и $p_2=-i$ являются для *F(p)* полюсами 2-го порядка.

Вычислим вычеты функции $\Phi(p)=F(p)e^{pt}$ в этих полюсах.

$$res\Phi(i)=\frac{1}{1!}\lim_{p\to i}\frac{d}{dp}\frac{p^3e^{pt}}{(p+i)^2}=\lim_{p\to i}\frac{e^{pt}\left[(3p^2+p^3t)(p+i)-2p^3\right]}{(p+i)^3}=\left(\frac{1}{2}-\frac{t}{4i}\right)e^{it}$$

$$res\Phi(-i)=\frac{1}{1!}\lim_{p\to i}\frac{d}{dp}\frac{p^3e^{pt}}{(p-i)^2}=\lim_{p\to i}\frac{e^{pt}\left[(3p^2+p^3t)(p-i)-2p^3\right]}{(p-i)^3}=\left(\frac{1}{2}+\frac{t}{4i}\right)e^{-it}$$

Окончательно: $F(p)=\;\dot{\mapsto}\; res\Phi(i)+res\Phi(-i)=\left(\frac{1}{2}-\frac{t}{4i}\right)e^{it}+\left(\frac{1}{2}+\frac{t}{4i}\right)e^{-i}$

$$=\frac{1}{2}(e^{it}+e^{-it})-\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{2i}(e^{it}-e^{-it})=\cos t-\frac{t}{2}\sin t\,.$$

Пример 35. Найти оригинал по изображению $F(p)=\frac{1}{(p-1)^3}$, используя 2-ю теорему разложения.

Решение. $p=1$-полюс 3-го порядка. Найдем в нем вычеты функции

$$\Phi(p)=F(p)e^{pt}=\frac{e^{pt}}{(p-1)^3}$$

$$res\Phi(1)=\frac{1}{2!\lim\limits_{p\to 1}}\frac{d^2}{dp^2}\left((p-1)^3\frac{e^{pt}}{(p-1)^3}\right)=\frac{1}{2!}\lim_{p\to 1}\frac{d^2}{dp^2}e^{pt}=$$

$$=\frac{1}{2!}\lim_{p\to 1}(t^2e^{pt})=\frac{t^2}{2}e^t=f(t)\,.$$

Пример 36. Найти оригинал по изображению $F(p)=\frac{p}{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}$.

Решение. Имеем четыре простых полюса $p_1=-1,\ p_2=-2,\ p_3=-3,\ p_4=-4.$

Найдем вычеты в них по формуле (11). Нам понадобится производная знаменателя. Он имеет вид

$$(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)=(p^2+3p+2)(p^2+7p+12)=$$

$$=p^4+10p^3+35p^2+50p+24.$$

Его производная $4p^3+30p^2+70p+50$. Вычеты в простых полюсах

$$r_1=\frac{-1\cdot e^{-t}}{-4+30-70+50}=-\frac{e^{-t}}{6},\ r_2=\frac{-2\cdot e^{-2t}}{-32+120-140+50}=e^{-2t},$$

$$r_3=\frac{-3\cdot e^{-3t}}{-108+270-210+50}=-\frac{3e^{-3t}}{2},\qquad r_4=\frac{-4\cdot e^{-4t}}{-256+480-280+50}=\frac{2e^{-4t}}{3}.$$

Окончательно $f(t)=r_1+r_2+r_3+r_4=-\frac{1}{6}\left(e^{-t}-6e^{-2t}+9e^{-3t}-4e^{-4t}\right).$

Используя различные приемы, найти оригиналы по данным изображениям.

37. $F(p)=\frac{p}{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}$. Ответ: $f(t)=\frac{1}{27}\left(\frac{3}{2}t^2e^t+te^t-e^t+2te^{-2t}+e^{-2t}\right).$

38. $F(p)=\dfrac{4-p+p^2}{p^3-p^2}$. Ответ: $f(t)=2e^t-4t-3$.

39. $F(p)=\dfrac{1}{p^4-6p^3+11p^2-6p}$. Ответ: $f(t)=-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2}e^t-\dfrac{1}{2}e^{2t}+\dfrac{1}{6}e^{3t}$.

40. $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)^3(p^3+1)}$. Ответ: $f(t)=\dfrac{1}{8}(2t^2-6t+3)e^t-\dfrac{1}{24}e^{-t}+\dfrac{2}{3}\sin(\dfrac{t\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\pi}{6})$.

41. $F(p)=\dfrac{1}{p^4+2p^3+3p^2+2p+1}$. Ответ: $f(t)=\dfrac{2}{3}e^{-\frac{t}{2}}(\sin t-t\cos t)$.

42. $F(p)=\dfrac{p^2+2p-1}{p^3+3p^2+3p+1}$. Ответ: $f(t)=e^{-t}(1-t^2)$.

43. $F(p)=\dfrac{p}{p^3+1}$. Ответ: $f(t)=\dfrac{1}{3}e^{\frac{t}{2}}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+\sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$.

44. $F(p)=\dfrac{2p+3}{p^3+4p^2+5p}$. Ответ: $f(t)=\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{5}e^{-2t}\left(4\sin t-3\cos t\right)$.

45. $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)^2(p+2)}$. Ответ: $f(t)=\dfrac{1}{9}\left(e^{-2t}-e^t+3te^t\right)$.

46. $F(p)=\dfrac{p^2+2p-1}{p^3-2p^2+2p-1}$. Ответ: $f(t)=2e^t+e^{\frac{t}{2}}\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t-\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$.

47. $F(p)=\dfrac{3p^2}{(p^3-1)^2}$. Ответ: $f(t)=\dfrac{1}{3}te^t-\dfrac{1}{3}te^{-\frac{t}{2}}(\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+\sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t)$

48. $F(p)=\dfrac{p+1}{p(p-1)(p-2)(p-3)}$. Ответ: $f(t)=-\dfrac{1}{6}+e^t-\dfrac{3}{2}e^{2t}+\dfrac{2}{3}e^{3t}$.

49. $F(p)=\dfrac{1}{p^2(p^2+1)}$. Ответ: $f(t)=t-\sin t$

50. $F(p)=.\ln(1+\dfrac{1}{p})$. Ответ: $f(t)=\dfrac{1}{t}\left(1-e^t\right)$.

51. $F(p)=\dfrac{6p^3+4p+1}{p^4+p^2}$. Ответ: $f(t)=4+t+2\cos t-\sin t$

52. $F(p)=\dfrac{5p^3+3p^2+12p-12}{p^4-16}$. Ответ: $f(t)=ch2t+\cos 2t+\dfrac{3}{2}\sin 2t$.

53. $F(p)=\dfrac{3p^2-1}{(p^2+1)^3}$. Ответ: $f(t)=\dfrac{1}{2}t^2\sin t$.

54. $F(p)=\dfrac{3-2p^3}{p^4}$. Ответ: $f(t)=\dfrac{1}{2}t^3-2t$.

55. $F(p)=\dfrac{4-p}{(p-2)^3}$. Ответ: $f(t)=\left(t^2-t\right)e^{2t}$.

56. $F(p)=\dfrac{p+2}{p^3-1}$. Ответ: $f(t)=.e^t+\dfrac{1}{6}e^{-\frac{t}{2}}\left(3\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+\sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$

57. $F(p)=\dfrac{5p^3+5p^2-11p+3}{p^3(p+3)}$. Ответ: $f(t)=2e^{-3t}+\dfrac{1}{2}\left(t^2-8t+6\right)$.

4.Таблица свойств изображений

В данном пункте приведена таблица свойств изображений, каждый раздел которой будет объяснён в следующем пункте.

Пусть $F(p):\to f(t)$, $G(p):\to g(t)$

№	Оригинал	Изображение	Комментарии
1.	$\alpha f(t)+\beta g(t)$, $\alpha,\beta=const$	$\alpha F(p)+\beta G(p)$	Свойство линейности п. 5.1
2.	$f(\alpha\cdot t)$, $\alpha=const>0$	$\dfrac{1}{\alpha}F\left(\dfrac{p}{\alpha}\right)$	Теорема подобия п. 5.2.
3.	$f(t-\tau)$, $t>\tau>0$	$\mathrm{e}^{-p\tau}\cdot F(p)$	Теорема запаздывания п. 5.3.
4.	$\mathrm{e}^{-\lambda t}\cdot f(t)$, $\lambda>0$	$F(p+\lambda)$	Теорема смещения п. 5.4.
5.	$f(t+a)$, $a>0$	$\mathrm{e}^{ap}\left(F(p)-\int\limits_0^a \mathrm{e}^{-pt}\cdot f(t)dt\right)$	Теорема упреждения п. 5.5.
6.	$\int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau=\int\limits_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$	$F(p)G(p)$	Теорема об умножении изображений

№	Оригинал	Изображение	Комментарии
			п. 5.6.
7.	$f(t)\cdot g(0)-\int\limits_0^t f(t-\tau)g''(\tau)d\tau$	$pF(p)G(p)$	Интеграл Дюамеля п. 5.7.
8.	$f(t)g(t)$	$\frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(q)G(p-q)dq$	Умножение оригиналов п. 5.8.
9.	$f(t)=f(t+T)$, T - период	$\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-pt}}\cdot\int\limits_0^T f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,dt$	Изображение периодического оригинала п. 5.9.
10.	$f^{(n)}(t)$	$p^n\left(F(p)-\frac{f(0)}{p}-\cdots-\frac{f^{(n-1)}(0)}{p^n}\right)$	Дифференцирование оригинала п. 5.10.
11.	$(-1)^n t^n f(t)$	$F^{(n)}(p)$	Дифференцирование изображения п. 5.11.
12.	$\int\limits_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{1}{p}F(p)$	Интегрирование оригинала п. 5.12.
13.	$\frac{1}{t}f(t)$	$\int\limits_p^\infty F(p)dp$	Интегрирование изображения п. 5.13

5. Основные теоремы операционного исчисления

Пусть $F(p):\to f(t)$, $G(p):\to g(t)$

5.1. Свойство линейности.

Для любых комплексных постоянных α и β :

$$\alpha F(p)+\beta G(p)\ :\to\ \alpha f(t)+\beta g(t) \qquad (12)$$

5.2. Теорема подобия.

Для любого постоянного $\alpha>0$:

$$f(\alpha t)\ \leftarrow:\ \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right) \qquad (13)$$

Умножение аргумента оригинала на положительное число α приводит к делению изображения и его аргумента на это число α.

5.3. Теорема запаздывания.

$$e^{-p\tau}:\to f(t-\tau)\ \text{для}\quad t>\tau>0 \qquad (14)$$

Таким образом, запаздывание аргумента оригинала на положительную величину τ приводит к умножению изображения оригинала без запаздывания $F(p)$ на $\mathrm{e}^{-p\tau}$.

Пример 58. Найти изображение оригинала $f(t)=\mathrm{e}^{-pt}$.

Решение: Имеем по таблице пункта 2: $t^2 \leftarrow: \dfrac{2}{p^3}$, здесь запаздывание τ=1. Тогда $(t-1)^2 \leftarrow:$ $\dfrac{2}{p^3} \cdot \mathrm{e}^{-p}$.

5.4. Теорема смещения.

Для a >0 имеет место соотношение :

$$e^{-at} \cdot f(t) \leftarrow: F(p+a) \qquad (15)$$

Пример 59. Найти изображение затухающих колебаний: $\mathrm{e}^{-\alpha t} \sin \varpi t$ и $\mathrm{e}^{-\alpha t} \cos \varpi t$, α >0.

Решение: $\cos \varpi t \leftarrow: \dfrac{p}{p^2+\varpi^2}$, $\quad \sin \varpi t \leftarrow: \dfrac{\varpi}{p^2+\varpi^2}$.

Тогда $\mathrm{e}^{-\alpha t} \sin \varpi t \leftarrow: \dfrac{\varpi}{(p+\alpha)^2+\varpi^2}$, $\quad e^{-\alpha t} \cos \varpi t \leftarrow: \dfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\varpi^2}$.

Смотри формулы 10 и 11 в таблице пункта 2.

Пример 60. Найти изображение оригинала *f(t)=* $\operatorname{ch} t \cdot \sin t$.

Решение: Так как $\operatorname{ch} t = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}\right)$, то $f(t) = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}\right)\sin t = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^t \sin t + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} \sin t \leftarrow:$

$$\leftarrow: \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(p-1)^2+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(p+1)^2+1} = \frac{p^2+2}{p^4+4}.$$

Заметим, что формула (15) позволяет найти оригиналы по заданному изображению.

Пример 61. Найти оригинал по его изображению $F(p) = \dfrac{1}{p^2+2p}$.

Решение: $F(p) = \dfrac{1}{p^2+2p} = \dfrac{1}{(p+1)^2-1}$.По формуле 7 таблицы пункта 2 известно, что $\dfrac{1}{p^2-\varpi^2} :\rightarrow \operatorname{sh} \varpi t$. Тогда $\dfrac{1}{(p+1)^2-1} :\rightarrow \mathrm{e}^{-t} \operatorname{sh} t$.

Пример 62. Найти оригинал по его изображению $F(p) = \dfrac{3p-1}{p^2-4p+7}$.

Решение: ”Организуем” смещение аргумента *p* так, чтобы слагаемые превратились в известные выражения:

$$\frac{3p-1}{p^2-4p+7} = \frac{3(p-2)+5}{(p-2)^2+3} = 3 \cdot \frac{p-2}{(p-2)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} + \frac{5}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{(p-2)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} :\rightarrow$$

$$:\rightarrow 3\mathrm{e}^{2t} \cos\left(t\sqrt{3}\right) + \frac{5}{\sqrt{3}} \mathrm{e}^{2t} \sin\left(t\sqrt{3}\right) .$$

5.5. Теорема упреждения.

При $a>0$ имеет место соотношение:

$$f(t+a) \leftarrow: \mathrm{e}^{ap}\left(F(p)-\int_0^a \mathrm{e}^{-pt}\cdot f(t)dt\right) \qquad (16)$$

5.6.Теорема умножения изображений.

$$\int_0^t f(\theta)g(t-\theta)d\theta = \int_0^t f(t-\theta)g(\theta)d\theta \leftarrow; \; F(p)\cdot G(p) \qquad (17)$$

Оригинал, соответствующий произведению двух изображений, равен свёртке (левая часть (17)) оригиналов сомножителей.

Пример 63. Найти оригинал по его изображению $F(p)=\dfrac{1}{\left(p^2+\varpi^2\right)^2}$.

Решение: $F(p)=\dfrac{1}{\left(p^2+\varpi^2\right)^2}=\dfrac{1}{p^2+\varpi^2}\cdot\dfrac{1}{p^2+\varpi^2}$. Известно, что $\dfrac{1}{p^2+\varpi^2}:\rightarrow$

$:\rightarrow\dfrac{1}{\varpi}\cdot\sin\varpi t$. По формуле (17) $\dfrac{1}{\left(p^2+\varpi^2\right)^2}:\rightarrow\int_0^t\frac{1}{\omega}\sin\varpi\theta\cdot\frac{1}{\omega}\sin\varpi(t-\theta)d\theta=$

$=\dfrac{1}{2\varpi^2}\cdot\int_0^t\left(\cos\varpi(2\theta-t)-\cos\varpi t\right)d\theta=\dfrac{1}{2\varpi^3}\cdot\left(\sin\varpi t-\varpi t\cdot\cos\varpi t\right)$.

Пример 64. Найти оригинал по его изображению $F(p)=\dfrac{p}{\left(p^2+\varpi^2\right)^2}$.

Решение*:* Представим $F(p)=\dfrac{1}{p^2+\varpi^2}\cdot\dfrac{p}{p^2+\varpi^2}$. Так как $\dfrac{1}{p^2+\varpi^2}:\rightarrow$

$:\rightarrow\dfrac{1}{\varpi}\cdot\sin\varpi t$, $\dfrac{p}{p^2+\varpi^2}:\rightarrow\cos\varpi t$, то по формуле $\dfrac{p}{\left(p^2+\varpi^2\right)^2}:\rightarrow$

$:\rightarrow\int_0^t\frac{1}{\varpi}\sin\varpi\theta\cdot\cos\varpi(t-\theta)d\theta=\dfrac{1}{2\varpi}\cdot t\cdot\sin\varpi t$.

Пример 65. Найти оригинал по его изображению $F(p)=\dfrac{4p-3}{\left(p^2+2p+10\right)^2}$.

Решение. «Организуем» смещение аргумента и применим результаты предыдущих примеров (63 и 64)

$$\frac{4p-3}{\left(p^2+2p+10\right)^2}=\frac{4(p+1)-7}{\left((p+1)^2+9\right)^2}=$$

$$=4\cdot\frac{p+1}{\left((p+1)^2+9\right)^2}-7\cdot\frac{1}{\left((p+1)^2+9\right)^2}\to$$

$$4e^{-t}\cdot\frac{t}{6}\cdot\sin 3t-\frac{7}{54}e^{-t}\left(\sin 3t-3t\cos 3t\right)=$$

$$=e^{-t}\left(\left(\frac{2}{3}t-\frac{7}{54}\right)\sin 3t+\frac{7}{18}t\cos 3t\right)$$

5.7. Интеграл Дюамеля.

$$pF(p)G(p)\to\frac{d}{dt}\int_0^t f(\theta)g(t-\theta)d\theta=f(t)g(0)-\int_0^t f(\theta)g'(t-\theta)d\theta \qquad (18)$$

О применении интеграла Дюамеля смотри пункт 9.

5.8. Умножение оригиналов

$$f(t)g(t)\leftarrow\frac{1}{2\pi i}\lim_{\omega\to\infty}\int_{a-i\omega}^{a+i\omega}F(q)G(p-q)dq \qquad (19)$$

5.9. Изображение периодических оригиналов

Дана периодическая функция $f(t)=f(t+T)$, T – период.

$$f(t)=f(t+T)\leftarrow F(p)=\frac{\psi(p)}{1-e^{-pT}}, \qquad (20)$$

где $\psi(p)=\int_0^T f(t)e^{-pt}dt.$ (21)

Пример 66. Найти изображение периодического оригинала $f(t)=A\left|\sin\omega t\right|$ – выпрямленная синусоида.

Решение. Период $T=\frac{\pi}{\omega}$. $\psi(p)=\int_0^T f(t)e^{-pt}dt=A\int_0^{\pi/\omega}e^{-pt}\sin\omega t dt=\frac{A\omega}{p^2+\omega^2}\left(1+e^{-\frac{p\pi}{\omega}}\right)$,

$$F(p)=\frac{A\omega}{p^2+\omega^2}\cdot\frac{1+e^{-\frac{p\pi}{\omega}}}{1-e^{-\frac{p\pi}{\omega}}}=\frac{A\omega}{p^2+\omega^2}cth\frac{p\pi}{2\omega}.$$

Обратное утверждение. Оригинал $f(t)$, изображение которого имеет вид (20), является периодической функцией периода T получающейся при периодическом продолжении функции $\varphi(t)$ с интервала $\left[0,T\right]$ на всю положительную часть оси t.

Пример 67. Найти оригинал по заданному изображению

$$F(p)=\frac{\dfrac{1}{p^2}-\left(\dfrac{T}{2}\cdot\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p^2}\right)e^{-\frac{pT}{2}}}{1-e^{-pT}}.$$

Решение. Здесь $\psi(p)=\dfrac{1}{p^2}-\left(\dfrac{T}{2}\cdot\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p^2}\right)e^{-\frac{pT}{2}}\to$

$$t-\left(\frac{T}{2}+\left(t-\frac{T}{2}\right)\right)\eta(t-\frac{T}{2})=t-t\cdot\eta(t-\frac{T}{2})=$$

$$=f(t)=\begin{cases} t,\ при\ 0<t<\dfrac{T}{2}\\ 0,\ при\ t>\dfrac{T}{2}\end{cases}$$

68. Найти оригинал по изображению $F(p)=\dfrac{2-pT-(2+pT)e^{-pT}}{p^3(1-e^{-pT})}$.

Ответ: функция, получающаяся при периодическом продолжении функции $\varphi(t)=t^2-Tt$ с интервала $[0,T]$ на всю положительную часть оси t.

В следующих задачах найти изображение периодического оригинала $f(t)$, являющегося периодическим продолжением функции $\varphi(t)$ с интервала $[0,T]$ на всю положительную часть оси t.

69. $\varphi(t)=\begin{cases} A,\ при\ 0\le t\le\dfrac{T}{2}\\ -A,\ при\ \dfrac{T}{2}\le t\le T\end{cases}$ ответ: $F(p)=\dfrac{A}{p}\cdot\dfrac{1-e^{-\frac{pT}{2}}}{1+e^{-\frac{pT}{2}}}=\dfrac{A}{p}th\dfrac{pT}{4}$.

70. $\varphi(t)=\begin{cases} \dfrac{2A}{T}t,\ при\ 0\le t\le\dfrac{T}{2}\\ 2A(1-\dfrac{t}{T}),\ при\ \dfrac{T}{2}\le t\le T\end{cases}$ ответ: $F(p)=\dfrac{2A}{T\cdot p^2}th\dfrac{pT}{4}$.

71. $\varphi(t)=A(1-\dfrac{t}{T}),\ при\ 0\le t\le T$ ответ: $F(p)=\dfrac{A}{p(1-e^{-pT})}-\dfrac{A}{pT^2}$.

72. $\varphi(t)=\begin{cases} A\sin\frac{2\pi t}{T},\ при\ 0\le t\le \frac{T}{2} \\ 0,\ при\ \frac{T}{2}\le t\le T \end{cases}$ ответ: $F(p)=\frac{A\omega}{(p^2+\omega^2)(1-e^{-\frac{pT}{2}})}$, $\omega=\frac{2\pi}{T}$.

5.10. Дифференцирование оригинала

$$f'(t)\leftarrow pF(p)-f(0),\dots.$$

$$f^{(n)}(t)\leftarrow p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\dots-f^{(n-1)}(0) \qquad (22)$$

5.11. Дифференцирование изображения

$$F'(p)\to -tf(t),\dots$$

$$F^{(n)}(p)\to(-1)^n t^n f(t) \qquad (23)$$

5.12. Интегрирование оригинала

$$\int_0^t f(\theta)d\theta\leftarrow\frac{F(p)}{p} \qquad (24)$$

Таким образом, операции интегрирования оригинала соответствует деление на p его оригинала.

5.13. Интегрирование изображения

$$\int_p^\infty F(q)dq\leftarrow\frac{f(t)}{t} \qquad (25)$$

Пример 73. Найти изображение функции $f(t)=\frac{e^{at}-e^{bt}}{t}$.

Решение. Деление на t каждого слагаемого функции $f(t)$ соответствует интегрированию его изображения (формула (25)). Имеем $e^{at}\leftarrow\frac{1}{p-a}$, $e^{bt}\leftarrow\frac{1}{p-b}$.

Тогда изображение $F(p)=\int_p^\infty\left(\frac{1}{p-a}-\frac{1}{p-b}\right)dp=\ln\frac{p-a}{p-b}\Big|_p^\infty=\ln\frac{p-b}{p-a}.$

6. Вычисление несобственных интегралов с помощью преобразования Лапласа

Пусть нужно вычислить интеграл $\int\limits_a^b \varphi(x,t)dt$, который является интегралом зависящим от параметра x. Обозначим его $f(x) = \int\limits_a^b \varphi(x,t)dt$ и пусть $F(p) \to f(x)$.

Найдем
$$F(p) = \int\limits_0^\infty e^{-px}\left(\int\limits_a^b \varphi(x,t)dt\right)dx \qquad (26)$$

Изменение порядка интегрирования часто дает возможность довести задачу до конца: найти изображение $F(p)$ интеграла $f(x)$, а затем и сам оригинал $f(x)$.

Пример 74. Вычислить $f(x) = \int\limits_0^\infty \frac{1-\cos xt}{t^2}dt$. Его изображение $F(p) = \int\limits_0^\infty e^{-px}\left(\int\limits_a^b \frac{1-\cos xt}{t^2}dt\right)dx$

Изменим порядок интегрирования $F(p) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{t^2}\left(\int\limits_0^\infty e^{-px}(1-\cos tx)dx\right)dt = \int\limits_0^\infty \frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+t^2}\right)dt$

Здесь использованы формулы $1 \leftarrow \frac{1}{p}$ и $\cos tx \leftarrow \frac{p}{p^2+t^2}$. Окончательно

$$F(p) = \int\limits_0^\infty \frac{dt}{p(p^2+t^2)} = \frac{\pi}{2p^2} \to \frac{\pi x}{2} = f(x).$$ Итак $\int\limits_0^\infty \frac{1-\cos xt}{t^2}dt = \frac{\pi x}{2}$.

Аналогично можно вычислить следующие интегралы.

75. $\int\limits_0^\infty \frac{xt - \sin xt}{t^3}\frac{dt}{\sqrt{t}}$. Ответ $\frac{\pi x^2}{4}$

76. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos xt}{a^2+t^2}dt$. Ответ $\frac{\pi}{2a}e^{-ax}$

77. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin xt}{t(t^4+4)}dt$. Ответ $\frac{\pi}{8}(1 - e^{-x}\cdot\cos x)$

78. $\int\limits_0^\infty \frac{(1+e^{-xt})\sin xt}{t}dt$. Ответ $\frac{3\pi}{4}$

Пример 79. Доказать $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-xt}}{t^2+1}dt = \int\limits_0^\infty \frac{\sin xt}{t+1}dt$

Решение. Найдем изображения подынтегральных функций по переменной x и сравним интегралы от них. Имеем $e^{-xt} \leftarrow \frac{1}{p+t}$.

$$I_{лев} = \int_0^\infty \frac{1}{p^2+1}\left(\frac{p-t}{t^2+1}+\frac{1}{p+t}\right)dt = \frac{1}{p^2+1}\left(\ln(p+t)-\frac{1}{2}\ln(t^2+1)+p\cdot arctgt\right)\Bigg|_0^\infty$$

$$I_{лев} = \frac{1}{p^2+1}\left(\frac{p\pi}{2}-\ln p\right)$$

Во втором случае имеем $\sin xt \leftarrow \frac{t}{p^2+t^2}$.

$$I_{прав} = \int_0^\infty \frac{1}{p^2+1}\left(\frac{p^2+t}{t^2+p^2}-\frac{1}{1+t}\right)dt = \frac{1}{p^2+1}\left(-\ln(t+1)+\frac{1}{2}\ln(t^2+p^2)+\frac{p^2}{p}\cdot arctg\,\frac{t}{p}\right)\Bigg|_0^\infty$$

$I_{прав} = \frac{1}{p^2+1}\left(\frac{p\pi}{2}-\ln p\right)$. Видим, что левая часть равна правой, равенство доказано.

Пример 80. Доказать $\int_0^\infty \frac{te^{-xt}}{t^2+1}dt = \int_0^\infty \frac{\cos xt}{t+1}dt$

Указание. Сравнить изображения интегралов, имеющих вид $F(p) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{p^2+1}+\frac{p}{p^2+1}\cdot\ln p$

7. Решение задачи Коши для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+\ldots+a_{n-1}x'(t)+a_nx(t) = f(t) \qquad (27)$$

где a_k –действительные числа.

Требуется найти решение дифференциального уравнения (27), удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0)=x_0,\quad x'(0)=x'_0,\ldots,\quad x^{(n-1)}(0)=x_0^{(n-1)} \qquad (28)$$

где $x_0, x'_0, \ldots, x_0^{(n-1)}$ –заданные числа.

Будем предполагать, что искомая функция $x(t)$, все ее производные, а также функция $f(t)$ являются оригиналами. Пусть $x(t)\leftarrow X(p)$, $f(t)\leftarrow F(p)$. По формулам дифференцирования оригиналов (22):

$$x'(t)\leftarrow pX-x_0,\quad x''(t)\leftarrow p^2X-px_0-x'_0,\ldots$$

$$\ldots x^{(n-1)}(t)\leftarrow p^{n-1}X-p^{n-2}x_0-\ldots-x_0^{(n-2)},\quad x^{(n)}(t)\leftarrow p^nX-p^{n-1}x_0-\ldots-x_0^{(n-1)}$$

Перейдем от дифференциального уравнения (27) к уравнению в изображениях

$$p^n X - p^{n-1}x_0 - \ldots - x_0^{(n-1)} + a_1\left(p^{n-1}X - p^{n-2}x_0 - \ldots - x_0^{(n-2)}\right) + \ldots + a_{n-1}\left(pX - x_0\right) + a_n X = F$$

Перепишем его так $Q_n(p)X(p) = F(p) + R_{n-1}(p)$, где $Q_n(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n$,

$$R_{n-1}(p) = p^{n-1}x_0 + \ldots + x_0^{(n-1)} + a_1(p^{n-2}x_0 + \ldots + x_0^{(n-2)}) + \ldots + a_{n-1}x_0.$$

Находим так называемое операторное решение уравнения

$$X(p) = \frac{F(p) + R_{n-1}(p)}{Q_n(p)} \qquad (29)$$

Найдя оригинал $x(t)$ по его изображению $X(p)$, мы получим тем самым решение задачи Коши для дифференциального уравнения (27).

Пример 81. Найти решение дифференциального уравнения $x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = 0$, удовлетворяющее условиям $x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$

Решение. Запишем уравнение в изображениях $p^2 X - 1 - 4pX + 5X = 0, \quad X(p) = \dfrac{1}{p^2 - 4p + 5}$

или $X(p) = \dfrac{1}{(p-2)^2 + 1} \to e^{2t}\sin t = x(t)$ – искомое решение.

Пример 82. Найти решение дифференциального уравнения $x'''(t) + 4x'(t) = 1$, удовлетворяющее условиям $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$

Решение. Уравнение в изображениях $p^3 X + 4pX = \dfrac{1}{p}, \quad X(p) = \dfrac{1}{p^2(p^2+4)}$ или иначе

$X(p) = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{p^2} - \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{p^2+4} \to \dfrac{t}{4} - \dfrac{1}{8}\sin 2t.$ Итак, решение имеет вид $x(t) = \dfrac{t}{4} - \dfrac{1}{8}\sin 2t.$

Пример 83. Найти общий интеграл дифференциального уравнения
$x''(t) + 2x'(t) + 10x(t) = 2e^{-t}\cos 3t$

Решение. Возьмем произвольные начальные условия $x(0) = c_1$, $x'(0) = c_2$.

Уравнение в изображениях $p^2 x - c_1 p - c_2 + 2px - 2c_1 + 10x = 2\dfrac{p+1}{(p+1)^2 + 9}$,

Найдем $x(p) = c_1\dfrac{p+1}{(p+1)^2 + 9} + (c_1 + c_2)\dfrac{1}{(p+1)^2 + 9} + 2\dfrac{p+1}{\left((p+1)^2 + 9\right)^2} \to$

$$c_1 e^{-t}\cos 3t + \frac{1}{3}(c_1 + c_2)e^{-t}\sin 3t + 2e^{-t}\frac{t}{6}\sin 3t$$

Ко всем дробям применена теорема смещения (15), дающая множитель e^{-t}, к последней дроби применена теорема умножения изображений (17) (смотри также пример 64).

Искомое решение $x(t) = e^{-t}\left(c_1\cos 3t + \dfrac{1}{3}(t + c_1 + c_2)\sin 3t\right)$

Пример 84. Решить д.у. $x'' - 2x' - 3y = e^{3t}$ при условиях $x(0) = x'(0) = 0$
Решение. Переходим к уравнениям изображениях

$$p^2 X - px(0) - x'(0) - 2(pX - x(0)) - 3X = \frac{1}{p-3}$$

или $p^2 X - 2pX - 3X = \dfrac{1}{p-3}$, $X(p) = \dfrac{1}{(p+1)(p-3)^2}$

разложим дробь на простейшие

$$\frac{1}{(p+1)(p-3)^2} = \frac{A}{(p-3)^2} + \frac{B}{(p-3)} + \frac{C}{p+1} \text{ , } 1 = A(p+1) + B(p-3)(p+1) + C(p-3)^2 .$$

При p= -1 имеем 1=16C , т.е $C = \dfrac{1}{16}$

При p=3 имеем 1=4A , т.е $A = \dfrac{1}{4}$

Сравнивая коэффициенты при p^2 : B+C=0 , B= $-\dfrac{1}{16}$

Итак $X(p) = \dfrac{1}{4(p-3)^2} - \dfrac{1}{16(p-3)} + \dfrac{1}{16(p+1)} \to \dfrac{1}{4}te^{3t} - \dfrac{1}{16}e^{3t} + \dfrac{1}{16}e^{-t}$

Решение д.у. $x(t) = \dfrac{1}{16}e^{-t} + \left(\dfrac{t}{4} - \dfrac{1}{16}\right)e^{3t}$.

Решить задачу Коши:

85. $x' + x = e^t$**,** $x(0) = 0$**.**
Ответ: $x = sht$

86. $x' - 2x = 0$, $x(0) = 1$.
Ответ: $x = e^{2t}$

87. $x'' + x' - 2x = e^t$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$.
Ответ: $x = \dfrac{1}{3}te^t - \dfrac{7}{9}e^t - \dfrac{2}{9}e^{-2t}$

88. $x'' + x' = t\cos t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.
Ответ: $x = \dfrac{1}{4}\left(t^2 \sin t + t\cos t - \sin t\right)$

89. $x'' - 2\alpha x' + \left(\alpha^2 + \beta^2\right)x = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.
Ответ: $x = \dfrac{1}{\beta}e^{\alpha t} \sin\beta t$

90. $x''' + 4x = \cos 3t$, $x(0) = x'(0) = 2$.
Ответ: $x = \dfrac{11}{5}\cos 2t - \dfrac{1}{5}\cos 3t + \sin 2t$

91. $x''' - 6x'' - 11x - 6x = 0$**,** $x(0) = 0$**,** $x'(0) = 1$**,** $x''(0) = 0$

Ответ: $x=-\frac{5}{2}e^{t}+4e^{2t}-\frac{3}{2}e^{3t}$

92. $x'''+x'=e^{2t}$, $x(0)=x'(0)=x''(0)=0$.
Ответ: $x=-\frac{1}{2}+\frac{1}{10}e^{2t}+\frac{2}{5}\cos t-\frac{1}{5}\sin t$

93. $4x'''-8x''-x'-3x=-8e^{t}$, $x(0)=x'(0)=x''(0)=1$.
Ответ: $x=e^{t}$

94. $x^{(4)}+x'''=\cos t$, $x(0)=x'(0)=x''(0)=0$, $x'''(0)=2$.
Ответ: $x=t^{2}-t+1-\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{2}\sin t$

95. $x^{(4)}+4x=t^{2}$, $x(0)=x'(0)=x''(0)=x'''(0)=0$
Ответ: $x=\frac{1}{4}\left(t^{2}-sht\cdot\sin t\right)$

96. $x^{(5)}+2x'''+x'=2t+\cos t$, $x(0)=x'(0)=x''(0)=x'''(0)=x^{(4)}(0)=0$
Ответ: $x=t^{2}-4+\left(4-\frac{3}{8}t\right)\cos t+\left(\frac{3}{8}+t-\frac{1}{8}t^{2}\right)\sin t$

8. Интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений

Метод интегрирования системы линейных дифференциальных уравнений сходен с методом интегрирования одного уравнения. В результате применения преобразования Лапласа получается система алгебраических уравнений для изображений.

Пример 97**.** Решить систему д.у. $\begin{cases} x'-\alpha x-\beta y=\beta e^{\alpha t} \\ y'+\beta x-\alpha y=0 \end{cases}$
При начальных условиях $x(0)=0$, $y(0)=1$.

Решение**.** Переход к уравнениям в изображениях $X\to x(t)$, $Y\to y(t)$ дает

$$\begin{cases} pX-\alpha X-\beta Y=\dfrac{\beta}{p-\alpha} \\ pY+\beta X-\alpha Y=1 \end{cases}$$

решение имеет вид $X=\dfrac{2\beta}{(p-\alpha)^{2}+\beta^{2}}$, $Y=\dfrac{(p-\alpha)^{2}-\beta^{2}}{(p-\alpha)\left((p-\alpha)^{2}+\beta^{2}\right)}$

$$X=\frac{2\beta}{(p-\alpha)^{2}+\beta^{2}}\to x(t)=2e^{\alpha t}\sin\beta t\text{**,**}\ Y=\frac{2(p-\alpha)}{(p-\alpha)^{2}+\beta^{2}}-\frac{1}{p-\alpha}\to y(t)=2e^{\alpha t}\cos\beta t-e^{\alpha t}.$$

Пример 98. Решить систему д.у. $\begin{cases} x'=x+2y \\ y'=2x+y+1 \end{cases}$
при начальных условиях $x(0)=0$, $y(0)=5$.

Решение**.** Переходя к изображениям, получаем

$$\begin{cases} pX = X + 2Y \\ pY - 5 = 2X + Y + \dfrac{1}{p} \end{cases}$$

её решение

$$X = \frac{10p+2}{p(p+1)(p-3)},\ Y = \frac{5p^2-4p-1}{p(p+1)(p-3)}$$

Разложим на простейшие дроби

$$X = \frac{10p+2}{p(p+1)(p-3)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p-3},\ A(p^2-2p-3) + B(p^2-3p) + C(p^2+p) = 10p+2$$

$$\left.\begin{array}{r} p^2: A+B+C=0 \\ p:-2A-3B+C=10 \\ 1:-3A=2 \end{array}\right\},\qquad \left.\begin{array}{r} A=-\dfrac{2}{3} \\ -3A-4B=10 \\ C=-A-B \end{array}\right\},\qquad \left.\begin{array}{r} A=-\dfrac{2}{3} \\ B=-2 \\ C=\dfrac{8}{3} \end{array}\right\},$$

$$X = -\frac{2}{3}*\frac{1}{p} - \frac{2}{p+1} + \frac{8}{3(p-3)} \to x(t) = -\frac{2}{3} - 2e^{-t} + \frac{8}{3}e^{3t}$$

Аналогично найдем $y(t) = \dfrac{1}{3} + 2e^{-t} + \dfrac{8}{3}e^{3t}$.

Найти решение следующих систем дифференциальных уравнений

99. $\begin{cases} x' = 2y \\ y' = 2x \end{cases}$ $\quad x(0) = 2, y(0) = 2$.

Ответ: $x = \dfrac{5}{2}e^{2t} - \dfrac{1}{2}e^{-2t}$, $y = \dfrac{5}{2}e^{2t} - \dfrac{1}{2}e^{-2t}$.

100. $\begin{cases} x' = 3x + 4y \\ y' = 4x - 3y \end{cases}$ $\quad x(0) = y(0) = 1$.

Ответ: $x = \dfrac{6}{5}e^{5t} - \dfrac{1}{5}e^{-5t}$, $y = \dfrac{3}{5}e^{5t} + \dfrac{2}{5}e^{-5t}$.

101. $\begin{cases} x' + y = 0 \\ y' - 2x - 2y = 0 \end{cases}$ $\quad x(0) = y(0) = 1$.

Ответ: $x = e^t(\cos t - 2\sin t)$, $y = e^t(\cos t + 3\sin t)$

102. $\begin{cases} x' + 2x + 2y = 10e^{2t} \\ y' - 2x + y = 7e^{2t} \end{cases}$ $\quad x(0) = 1, y(0) = 3$

Ответ: $x = e^{2t}$, $y = 3e^{2t}$.

103. $\begin{cases} 2x' + y' - 3x = 0 \\ x'' + y' - 2y = e^{2t} \end{cases}$ $\quad x(0) = -1, x'(0) = 1, y(0) = 0$

Ответ: $x = -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{3}{4}e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{23}}{2}t + \frac{11}{4\sqrt{23}}e^{\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{23}}{2}t$

$y = -\frac{1}{2}e^t - \frac{1}{8}e^{2t} + \frac{5}{8}e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{23}}{2}t - \frac{73}{8\sqrt{23}}e^{\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{23}}{2}t$

104. $\begin{cases} x' = y - z \\ y' = x + y \\ z' = x + z \end{cases}$ $\quad x(0) = 1, y(0) = 2, z(0) = 3$

Ответ: $x = 2 - e^t, y = -2 + 4e^t - te^t, z = -2 + 5e^t - te^t$.

9. Применение интеграла Дюамеля к интегрированию дифференциальных уравнений

Интеграл Дюамеля (формула 18 пункта 5.7) может быть использован при интегрировании дифференциальных уравнений.

Выведем формулу для интеграла Дюамеля. Пусть $F(p) \to f(t), G(p) \to g(t)$.
По теореме умножения изображений (формула (17) пункта 5.6) имеем:

$$F(p) * G(p) \to \int_0^t f(\theta)g(t-\theta)d\theta \qquad (30)$$

По теореме о дифференцировании оригинала (правой части (30)) по формуле пункта 5.10:

$$pF(p)G(p) \to \frac{d}{dt}\int_0^t f(\theta)g(t-\theta)d\theta$$

По правилу дифференцирования интеграла по параметру

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} \varphi(\theta,t)d\theta = \varphi(b(t),t)\frac{db}{dt} - \varphi(a(t),t)\frac{da}{dt} + \int_a^b \frac{d\varphi}{dt}(\theta,t)d\theta \qquad (31)$$

получим

$$pF(p)G(p) \to f(t)g(0) + \int_0^t f(\theta)g_t'(t-\theta)d\theta \qquad (32)$$

Правую часть этой формулы называют интегралом Дюамеля. В силу равноправности функций f и g ее можно записать и так

$$pF(p)G(p) \to g(t)f(0) + \int_0^t g(\theta)f_t'(t-\theta)d\theta \qquad (33)$$

Применим интеграл Дюамеля к интегрированию дифференциальных уравнений. Пусть требуется найти решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}x' + a_nx = f(t), \qquad (34)$$

удовлетворяющее нулевым (для простоты) начальным условиям

$$x(0) = x'(0) = \ldots = x^{(n-1)}(0) = 0 \qquad (35)$$

Наряду с этим уравнением будем рассматривать дифференциальное уравнение с такой же левой частью, но правой частью, равной 1(метод толчков):

$$z^{(n)} + a_1z^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}z' + a_nz = 1 \qquad (36)$$

и будем искать его решение, также удовлетворяющее нулевым начальным данным

$$z(0) = z'(0) = \ldots = z^{(n-1)}(0) = 0 \qquad (37)$$

Эти дифференциальные уравнения переходят в уравнение в изображениях

$p^nX + a_1p^{n-1}X + \ldots + a_{n-1}pX + a_nX = F(p)$

$$p^nZ + a_1p^{n-1}Z + ... + a_{n-1}pZ + a_nZ = \frac{1}{p}$$

Их операторные решения

$$X(p) = \frac{F(p)}{Q_n(p)}, Z(p) = \frac{1}{pQ_n(p)} \qquad (38)$$

где $Q_n(p) = p^n + a_1p^{n-1} + ... + a_n$.

Из них выражаем $X(p) = pF(p) * Z(p)$. Используя формулу (32)

$$X(p) = pF(p)Z(p) \to x(t) = f(t)Z(0) + \int_0^t f(\theta)Z_t'(t-\theta)d\theta \qquad (39)$$

Если известно решение z(t) уравнения (36) , то по (39) мы получим решение x(t) в виде квадратур.

Пример 105**.** Найти решение д.у. $x'' + x = 5t^2$ при начальных условиях $x(0) = x'(0) = 0$

Решение. Сначала найдем решение $z'' + z = 1$, удовлетворяющее условиям $z(0) = z'(0) = 0$. Его уравнение в изображениях $p^2Z + Z = \frac{1}{p}$ дает $Z(p) = \frac{1}{p(p^2+1)} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1}$. Следовательно, $z(t) = 1 - \cos t$.

Для отыскания решения исходного уравнения применим формулу (39). Имеем $z'(t) = \sin t, f(t) = 5t^2$, так что $x(t) = \int_0^t 5\theta^2 \sin(t-\theta)d\theta = 5(t^2 - 2 + 2\cos t)$.

Замечание. Особенно удобно применять интеграл Дюамеля для интегрирования нескольких дифференциальных уравнений с одинаковыми левыми и различными правыми частями. В этом случае интеграл Дюамеля значительно сокращает объем вычислительной работы.

Пример 106**.** Решить д.у. $x'' - x = \frac{1}{1+e^t}$ с начальными условиями $x(0) = x'(0) = 0$.

Решение. Сначала решим задачу Коши для дифференциального уравнения $z'' - z = 1$, $z(0) = z' = 0$. Его уравнение в изображениях $p^2Z(p) - Z(p) = \frac{1}{p}$, имеет решение $Z(p) = \frac{1}{p(p^2-1)} = \frac{p}{p^2-1} - \frac{1}{p}$. Отсюда $z(t) = \text{ch}t - 1$. по формуле Дюамеля (32)

$$x(t) = \int_0^t \frac{1}{1+e^\Theta}\text{sh}(t-\Theta)\text{d}\Theta = \int_0^t \frac{e^{t-\Theta} - e^{-t+\Theta}}{2(1+e^\Theta)}\text{d}\Theta = \frac{e^t}{2}\int_0^t \frac{e^{-\Theta}\text{d}\Theta}{1+e^\Theta} - \frac{e^{-t}}{2}\int_0^t \frac{\text{d}(e^\Theta+1)}{e^\Theta+1} =$$

$$= \frac{e^{-t}}{2}\ln\frac{e^t+1}{2} - \frac{e^t}{2}\int_0^t \frac{e^{-\Theta}\text{d}(e^{-\Theta})}{e^{-\Theta}+1} = -\frac{e^{-t}}{2}\ln\frac{e^t+1}{2} - \frac{e^t}{2}(e^{-t}-1) + \frac{e^t}{2}\int_0^t \frac{\text{d}(e^{-\Theta}+1)}{e^{-\Theta}+1} =$$

$$= -\frac{e^{-t}}{2}\ln\frac{e^t+1}{2} - \frac{e^t}{2}(e^t-1) + \frac{e^t}{2}\ln\frac{e^{-\Theta}+1}{2} = \text{sh}t\ln\frac{e^t+1}{2} + \frac{1}{2}(e^t - te^t - 1).$$

Применив интеграл Дюамеля, решить дифференциальные уравнения

107. $x'' + x' = t, \qquad x(0) = x'(0) = 0$

Ответ: $x = \frac{1}{2}t^2 - t + 1 - e^{-t}$

108. $x''' + x' = e^t, \qquad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$

Ответ: $x = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}\cos t - 1$

109. $x'' - 2x' = t^2e^t, \quad x(0) = x'(0) = 0$

Ответ: $x = 1 + e^{2t} - 2e^t - t^2e^t$.

110. $x'' + 2x' + 2x = \sin t, \qquad x(0) = x'(0) = 0.$

Ответ: $\quad x = \frac{1}{5}\sin t(1+e^{-t}) - \frac{2}{5}(1-e^{-t})\cos t.$

111. $x'' = \operatorname{arctg} t, \qquad x(0) = x'(0) = 0$

Ответ: $\quad x = \frac{1}{2}(t^2-1)\operatorname{arctg} t - \frac{t}{2}\ln(1+t^2) + \frac{t}{2}.$

112. $x'' + x = \frac{1}{2+\cos t}, \qquad x(0) = x'(0) = 0$

Ответ: $\quad x = t\sin t - \frac{4}{\sqrt{3}}\sin t \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{\sqrt{3}} + \cos t\,\ln(2+\cos t) - \ln 3\cos t.$

113. $x'' + x = \frac{1}{4+\operatorname{tg}^2 t}, \qquad x(0) = x'(0) = 0$

Ответ:

$$x = \frac{1}{3} - \frac{9 - \pi\sqrt{3}}{27}\cos t + \frac{\sqrt{3}}{36}\sin t\,\ln\left|\frac{\sqrt{3}\sin t - 2}{\sqrt{3}\sin t + 2}\right| - \frac{\sqrt{3}}{9}\cos t\,\operatorname{arctg}(\sqrt{3}\cos t)$$

114. $x'' + x = \cos t, \qquad x(0) = x'(0) = 0$

Ответ: $\quad x = \frac{1}{2}(\sin t - \cos t + e^{-t})$

115. $x'' + x = \frac{1}{1+\cos^2 t}, \qquad x(0) = x'(0) = 0$

Ответ: $\quad x = \cos t\,\operatorname{arcth}(\cos t) - \frac{\pi}{4}\cos t - \frac{1}{2\sqrt{2}}\sin t\,\ln\left|\frac{\sin t - \sqrt{2}}{\sin t + \sqrt{2}}\right|$

116. $x'' - x = \operatorname{sh} t, \qquad x(0) = x'(0) = 0$

Ответ: $\quad x = \frac{1}{2}(t\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} \mathrm{t})$

117. $x'' - 2x' + x = \operatorname{ch} t, \qquad x(0) = x'(0) = 0$

Ответ: $\quad x = \frac{1}{4}t^2e^t + \frac{1}{2}t\operatorname{sh} t + \frac{1}{4}t\,e^{-t} - \frac{1}{4}\operatorname{sh} t.$

118. $x''' + x' = \frac{1}{2+\sin t}, \qquad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$

Ответ: $\quad x = \ln 2\cos t - \cos t\,\ln(2+\sin t) - t\sin t + \frac{2}{\sqrt{3}}(2\sin t + 1)\left(\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}+1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}\right)$

119. $x'' - x = \operatorname{th} t, \qquad x(0) = x'(0) = 0$

Ответ: $x=\operatorname{ch}t-\operatorname{sh}t+2\operatorname{ch}t\left(\operatorname{arctg}e^{t}-\dfrac{\pi}{4}\right)$

10. Интегрирование дифференциальных уравнений с переменными (функциональными) коэффициентами

Пример 120. Решить д.у. Бесселя $t\,x''+x'+tx=0$ с начальными условиями $x(0)=1,\quad x'(0)=0.$

Решение. Перейдем к изображениям $x(t)\leftarrow X(p),\quad x'\leftarrow pX-1,\quad x''\leftarrow p^2X-p.$ Для нахождения изображений tx и tx'' воспользуемся формулой дифференцирования изображений (формула (23) пункта 5.11) $F'(p)$ ч> $-tf(p)$. Тогда $tx\leftarrow-\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}p}=-X'$, $tx''\leftarrow-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(p^2X-p\right)=-2pX-p^2X'+1$

Тогда уравнение в изображениях $-2pX-p^2X'+1+pX-1-X'=0$ или $\left(p^2+1\right)X'+pX=0.$ Уравнение с разделяющимися переменными

$$-\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{X}}=\frac{p\,\mathrm{d}p}{p^2+1},\qquad -\ln X=\frac{1}{2}\ln\left(p^2+1\right)-\ln C,$$

$$-\frac{1}{X}=\frac{\sqrt{p^2+1}}{C},\qquad X(p)=\frac{C}{\sqrt{p^2+1}},$$

Выберем ветвь корня, для которой $\sqrt{1}=1.$

$$X(p)=\frac{C}{p}\left(1+\frac{1}{p^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{C}{p}\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^2}+\frac{1\cdot3}{2^2\cdot2!}\cdot\frac{1}{p^4}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2^3\cdot3!}\cdot\frac{1}{p^6}+\ldots\right)=$$

$$=C\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2\cdot1!}\cdot\frac{1}{p^3}+\frac{1\cdot3}{2^2\cdot2!}\cdot\frac{1}{p^5}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2^3\cdot3!}\cdot\frac{1}{p^7}+\ldots\right)\div\rangle\ x(t)=$$

$$=C\left(1-\frac{1}{2\cdot1!}\cdot\frac{t^2}{2!}+\frac{1\cdot3}{2^2\cdot2!}\cdot\frac{t^4}{4!}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2^3\cdot3!}\cdot\frac{t^6}{6!}+\ldots\right)=\begin{vmatrix}C=1\\ т.к.\ x(0)=1\end{vmatrix}=$$

$$=1-\frac{t^2}{2^2(1!)^2}+\frac{t^4}{2^2(2!)^2}-\frac{t^6}{2^6(3!)^2}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}=I_0(t)$$

— так называемая функция Бесселя нулевого порядка.

11. О функциях с запаздывающим аргументом и их изображениях

Как уже было сказано в пункте 2, единичная функция Хевисайда $\eta(t)$ может превратить в оригинал любую функцию $f(t)$, ’’ выключая’’ ее значения при $t<0$ и сохраняя при $t>0$:

$$f(t)\eta(t)=\begin{cases}0, t<0\\ f(t), t>0\end{cases}$$

Имеется большое количество функций $f(t-\tau)$,которые описывают процессы ,начинающиеся не в $t=0$, а с опозданием $\tau>0$. С помощью функции Хевисайда

$$\eta(t-\tau)=\begin{cases}0, t<\tau\\ 1, t>\tau\end{cases}$$

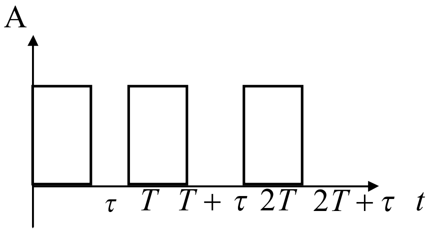
запаздывающую функцию записывают так

$$f(t-\tau)\eta(t-\tau)=\begin{cases}0, t<\tau\\ f(t-\tau), t>\tau\end{cases} \qquad (40)$$

заметим, что множитель способен ''включать'' или ''гасить'' значения некоторых функций. Эта функция удобна для записи как периодических, так и других составных функций.
По теореме запаздывания (пункт.5.3) изображения этих оригиналов (40) выражаются формулой

$$f(t-\tau)\eta(t-\tau)\leftarrow e^{-p\tau}F(p), где$$
$$F(p)\to f(t) \qquad (41)$$

Пример 121.Найти изображение периодического с периодом T прямоугольного импульса $f(t)$ величины A и продолжительностью τ.



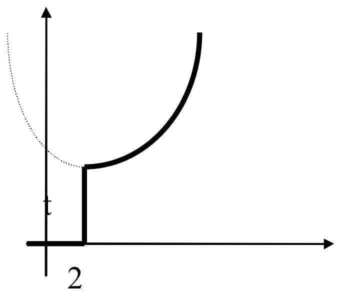
Решение. Постоянная функция $f(t)=A$ должна быть '' погашена'', начиная с момента τ. Это можно записать как

$$f(t)=A-A\cdot\eta(t-\tau)=\begin{cases}A, 0<t<\tau\\ 0, \tau<t<T\end{cases}$$

Далее с момента $t=T$ опять ''включаем'' функцию $f(t)=A$ и ''гасим'' ее в момент $T+\tau$. В этом случае следует записать как $f(t)=A-A\eta(t-\tau)+A\eta(t-T-\tau)$ и т. д. Окончательно
$f(t)=A-A\eta(t-\tau)+A\eta(t-T)-A\eta(t-T-\tau)+A\eta(t-2T)-A\eta(t-2T-\tau)+\ldots$
Изображение

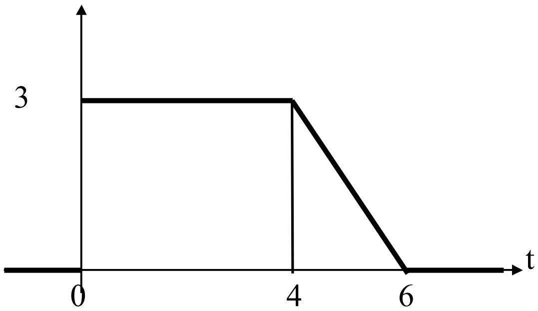
$$F(p)=\frac{A}{p}-\frac{A}{p}(e^{-pt})+\frac{A}{p}(e^{-pT})-\frac{A}{p}(e^{-p(T+\tau)})+\frac{A}{p}(e^{-p2T})-\frac{A}{p}(e^{-p(2T+\tau)})+\ldots=$$
$$=\frac{A}{p}(1-e^{-p\tau})\left[1+e^{-pT}+e^{-2pT}+\ldots\right]$$

Так как $\left|e^{-pT}\right|<\left|e^{-(s+iw)T}\right|=e^{-ST}<1$, то, суммируя геометрическую прогрессию в квадратных скобках со знаменателями $e^{-pT}=q$, получим $F(p)=\frac{A}{p}\cdot\frac{1-e^{-p\tau}}{1-e^{-pT}}$. Этот же результат можно было бы получить по формулам (20), (21).
Пример 122. Построить график функции $f(t)=(t^2-6t+11)\eta(t-2)$ и найти ее изображение.
Решение. Функция $f(t)$ описывает некоторый процесс, ''включаемый'' с запаздыванием $\tau=2$. Для того чтобы решить , какой это процесс , нужно функцию представить в форме



$$f(t) = \varphi(t-2)\eta(t-2),$$
$$f(t) = (t^2 - 6t + 11)\eta(t-2) = \left[(t-2)^2 - 2(t-2) + 3\right]\eta(t-2),$$
$$f(t) = \varphi(t-2)\eta(t-2) \leftarrow (\frac{2}{p^3} - \frac{2}{p^2} + \frac{3}{p})e^{-2p}.$$

Пример 123**.** Найти изображение составной функции $f(t)$, предварительно записав ее с помощью функции Хевисайда одним аналитическим выражением.
Функция имеет вид и график.



$$f(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 3, 0 \le t \le 4 \\ 9 - \frac{3}{2}t, 4 \le t \le 6 \\ 0, t > 6 \end{cases}$$

Решение**.** Функция $f(t) = 0$ при $t < 0$. В момент $t = 0$ '' включается'' функция ,равная 3. В момент $F = 4$ она ''гасится'' и '' включается'' функция $9 - \frac{3}{2}t$.
В момент $\tau = 6$ '' гасится'' эта функция .Эту последовательность действий можно описать формулой

$$f(t) = 3\eta(t) - 3\eta(t-4) + (9 - \frac{3}{2}t)\eta(t-4) - (9 - \frac{3}{2}t)\eta(t-6) =$$
$$= 3\eta(t) + (6 - \frac{3}{2}t)\eta(t-4) - (9 - \frac{3}{2}t)\eta(t-6).$$

Надо организовать сдвиги аргумента t в множителях при функциях Хевисайда: во втором слагаемом надо сделать $t-4$, а в третьем $t-6$:

$$f(t) = 3\eta(t) + \left[6 - \frac{3}{2}(t-4) - 6\right]\eta(t-4) - \left[9 - \frac{3}{2}(t-6) - 9\right]\eta(t-6) =$$
$$= 3\eta(t) - \frac{3}{2}(t-4) + \frac{3}{2}(t-6)\eta(t-6).$$

Изображение $F(p) = \frac{3}{p} - \frac{3}{2p^2}e^{-4p} + \frac{3}{2p^2}e^{-6p}.$

В следующих задачах, записав с помощью функции Хевисайда одним аналитическим выражением составную функцию $f(t)$, найти ее изображение:

124. $f(t)=\begin{cases} t, & 0\le t\le 1\\ 1, & 1\le t\le 3\\ 0, & t>3\end{cases}$ Ответ: $F(p)=\frac{1}{p^2}(1-e^{-p})-\frac{1}{p}e^{-3p}$.

125. $f(t)=\begin{cases} 2t & \text{при } 0\le t\le 1\\ 4-2t & \text{при } 1\le t\le 2\\ 0 & \text{при } t\ge 2\end{cases}$ Ответ: $F(p)=\frac{2}{p^2}(1-2e^{-p}+e^{-2p})$

126. $f(t)=\begin{cases} 5 & \text{при } 0\le t\le 2\\ 5-2t & \text{при } 2\le t\le 3\\ 6-2t & \text{при } t>3\end{cases}$ Ответ: $F(p)=\frac{1}{p}(5-4e^{-2p}+e^{-3p})-\frac{2}{p^2}e^{-2p}$

Построить график функции f(t) и найти её изображение

127. $f(t)=t-(t-3)\eta(t-1)$

Ответ: $f(t)=\begin{cases} t, & 0\le t\le 1\\ 3, & t>1\end{cases}$ $F(p)=\frac{1}{p^2}(1-e^{-p})+\frac{2}{p}e^{-p}$

127. $f(t)=\begin{cases} 5, & 0\le t\le 2\\ 5-2t, & 2\le t\le 3\\ 6-2t, & t>3\end{cases}$ $F(p)=\frac{1}{p}(5-4e^{-2p}+e^{-3p})-\frac{2}{p^2}e^{-2p}$

128. $f(t)=1+e^{-t}\eta(t-1)$

Ответ: $f(t)=\begin{cases} 1, & 0\le t\le 1\\ 1+e^{-t}, & t>1\end{cases}$ $F(p)=\frac{1}{p}+\frac{1}{e}\cdot\frac{e^{-p}}{p+1}$

129. $f(t)=\sin t\left[\eta(t-2\pi)-\eta(t-3\pi)\right]$

Ответ: $f(t)=\begin{cases} 0, & t\le 2\pi\\ \sin t, & 2\pi\le t\le 3\pi\\ 0, & t\ge 3\pi\end{cases}$ $F(p)=\frac{1}{p^2+1}(e^{-2p\pi}+e^{-3p\pi})$

130. $f(t)=2\left[1-\eta(t-\frac{1}{2})-\eta(t-\frac{3}{2})\right]+\left[\eta(t-\frac{1}{2})-\eta(t-\frac{3}{2})\right]\sin 2\pi t$

Ответ: $f(t)=\begin{cases} 2, & 0\le t<\frac{1}{2}\\ \sin 2\pi t, & \frac{1}{2}\le t\le\frac{3}{2}\\ -2, & t>\frac{3}{2}\end{cases}$

$$F(p)=\frac{2}{p}(1-e^{-\frac{p}{2}}-e^{-\frac{3}{2}p})+\frac{2\pi}{p+4\pi^2}(e^{-\frac{3}{2}p}-e^{-\frac{p}{2}})$$

131. $f(t)=1-t-(t^2-5t+4)\eta(t-1)+(t^2-3t)\eta(t-3)$

Ответ: $f(t)=\begin{cases} 1-t & , \quad 0 \le t \le 1 \\ -t^2+4t-3 & , \quad 1 \le t < 3 \\ t-3 & , \quad t > 3 \end{cases}$

$$F(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}(1-3e^{-p}-3e^{-3p})-\frac{2}{p^3}(e^{-p}-e^{-3p})$$

12. Интегрирование дифференциальных уравнений, содержащих в правой части функцию Хевисайда

Имеется широкий диапазон проблем, описываемых дифференциальными уравнениями, в правой части которых присутствует функция Хевисайда, например, уравнения динамики систем, которые подвержены воздействию сил не непрерывно, а только в некоторые моменты времени.

Применяя объяснения предыдущего пункта, можно эти дифференциальные уравнения записать в изображениях.

Пример 132. Решить дифференциальные уравнения $x''(t)+3x'(t)=4\eta(t)-(t+2)\eta(t-3)$, удовлетворяющее условиям $x(0)=x'(0)=0$.

Решение. Перейдем к уравнению в изображениях.

$$p^2X+3pX=\frac{4}{p}-\left(\frac{1}{p^2}+\frac{5}{p}\right)e^{-3p}$$

Найдем $$X(p)=\frac{4}{p^2(p+3)}-\frac{5}{p^2(p+3)}e^{-3p}-\frac{1}{p^3(p+3)}e^{-3p}$$

Имеем $\dfrac{1}{p^2(p+3)}=\dfrac{1}{3p^2}-\dfrac{1}{9p}+\dfrac{1}{9(p+3)} \xrightarrow{\cdot} \dfrac{t}{3}-\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{9}e^{-3t}$,

$$\frac{1}{p^3(p+3)}=\frac{1}{3p^3}-\frac{1}{9p^2}+\frac{1}{27p}-\frac{1}{27(p+3)} \xrightarrow{\cdot} \frac{t^2}{6}-\frac{t}{9}+\frac{1}{27}-\frac{1}{27}e^{-3t},$$

$$X(p) \xrightarrow{\cdot} \frac{4}{3}t-\frac{4}{9}e^{-3t}-5\left[\frac{t-3}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}e^{-3(t-3)}\right]\eta(t-3)-\left[\frac{(t-3)^2}{6}-\frac{t-3}{9}+\frac{1}{27}-\frac{1}{9}e^{-3(t-3)}\right]\eta(t-3)-\left[\frac{(t-3)^2}{6}-\frac{t-3}{9}+\frac{1}{27}-\frac{1}{27}e^{-(t-3)}\right]\eta(t-3)$$

$$-\left[\frac{(t-3)^2}{6}-\frac{t-3}{9}+\frac{1}{27}-\frac{1}{27}e^{-(t-3)}\right]\eta(t-3)$$

Окончательно

$$x(t)=\frac{4}{3}t-\frac{4}{9}+\frac{4}{9}e^{-3t}-\left[\frac{t^2}{6}+\frac{5}{9t}-\frac{54}{27}+\frac{14}{27}e^{-3(t-3)}\right]\eta(t-3).$$

Замечание. Правая часть исходного дифференциального уравнения является разрывной функцией, которую в обычном классическом анализе записывают в виде нескольких аналитических выражений. Операционный метод решения таких уравнений позволяет записать правую часть в виде одного выражения.

Решить дифференциальные уравнения

133. $x'' - 2x' + 2x = 1 + \eta(t-1)$, $x(0) = x'(0) = 0$

ответ: $x = \frac{1}{2}(1 - e^t(\cos t - \sin t))\eta(t) + \frac{1}{2}(1 - e^{t-1}(\cos(t-1) - \sin(t-1)))\eta(t-1)$

134. $x'' + \omega^2 x = a(\eta(t) - \eta(t-\tau))$, $x(0) = x'(0) = 0$

ответ: $x = \frac{2a}{\omega^2}\sin^2\frac{\omega t}{2}(\eta(t) - \eta(t-\tau))$

13. Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом

Существуют несколько типов дифференциальных уравнений, когда аргументы функций являются как просто *t*, так и более сложные выражения.

$x'(t) = \varphi(t, x(t), x(t - \tau(t)))$ —это дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом.

Если $\tau = const$, то имеем дифференциально–разностные уравнения. Наконец, имеется дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом (описывающее процессы с последствием), когда аргумент старшей производной *t*, а других функций – $(t-\tau)$.

$$x^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)}(t - \tau_k) + f(t), \tag{41}$$

где $a_k = const$, $\tau_k = const$, $0 \le t \le +\infty$.

Ради простоты начальные условия выберем нулевые:

$$x(0) = x'(0) = \cdots = x^{(n-1)}(0) = 0 \tag{42}$$

Считаем, что все функции являются оригиналами и $X(p) \risingdotseq x(t)$, $F(p) \risingdotseq f(t)$. Тогда

$$p^n X(p) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k X(p) e^{-p\tau_k} + F(p) \tag{43}$$

$$X(p) = \frac{F(p)}{p^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k e^{-p\tau_k}} \tag{44}$$

Пример 135. Решить дифференциальное уравнение $x'(t) = x(t-1) + 1$, $x(0) = 0$.

Решение. Перейдем к изображениям

$$pX(p) = X(p)e^{-p} + \frac{1}{p},$$

$$X(p) = \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p - e^{-p}} = \frac{1}{p^2}\cdot\frac{1}{1 - \frac{e^{-p}}{p}} = \frac{1}{p}\left(1 + \frac{e^{-p}}{p} + \frac{e^{-2p}}{p^2} + \ldots + \frac{e^{-np}}{p^n} + \ldots\right)$$

$$x(t) = t\eta(t) + \frac{(t-1)^2}{2!}\eta(t-1) + \ldots + \frac{(t-n)^{n+1}}{(n+1)!}\eta(t-n) + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t-k)^{k+1}}{(k+1)!}\eta(t-k).$$

Решить следующие уравнения.

136. $x''(t) - x(t-1) = t$, $x(0) = x'(0) = 0$

ответ: $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t-k)^{2k+3}}{(2k+3)!}\eta(t-k)$

137. $x''(t) - 2x'(t-1) = t$, $x(0) = x'(0) = 0$

ответ: $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k(t-k)^{k+3}}{(k+3)!}\eta(t-k)$

138. $x''(t) = 2x'(t-1) - x(t-2) + 1$, $x(0) = x'(0) = 0$

ответ: $x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)(t-k)^{k+2}}{(k+2)!}\eta(t-k)$

139. $x''(t)+2x'(t-2)+x(t-4)=t$, $x(0)=x'(0)=0$

ответ: $x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(t-2k)^{k+3}}{(k+3)!}\eta(t-2k)$

14. Решение интегральных уравнений

Пример 140. Решить интегральное уравнение: $y=\int_0^t y\,dt+1$.

Решение. Переходим к изображениям, используя формулу интегрирования оригинала (24) пункта 5.1

$$\int_0^t f(\theta)\,d\theta \leftarrow \frac{F(p)}{p}$$

Имеем: $Y(p)=\frac{Y(p)}{p}+\frac{1}{p}$, $Y(p)=\frac{1}{p-1}\risingdotseq y(t)=e^t$.

Далее будем рассматривать интегральные уравнения Вольтерра с ядрами специального вида:

$$y(x)=f(x)+\int_0^x K(x-t)\,y(t)\,dt \qquad (45)$$

$K(x-t)$ – ядро интегрального уравнения.

Пусть $F(p)\risingdotseq f(x)$, $L(p)\risingdotseq K(x)$, $Y(p)\risingdotseq y(x)$. Применим к обеим частям (45) MV преобразование Лапласа и пользуясь формулой свертки (17) пункта 5.6, получим

$$Y(p)=F(p)+L(p)\cdot Y(p),\ Y(p)=\frac{F(p)}{1-L(p)}\risingdotseq y(x).$$

Пример 141. Решить интегральное уравнение: $\int_0^t y(\theta)\,e^{t-\theta}\,d\theta=y(t)-e^t$.

Решение. Левая часть является сверткой функций $y(t)$ и e^t. Переходя к изображениям, получим: $Y(p)\cdot\frac{1}{p-1}=Y(p)-\frac{1}{p-1}$, $Y(p)=\frac{1}{p-2}\risingdotseq y(t)=e^{2t}$.

Пример 142. Решить интегральное уравнение: $y(x)=\cos x+\int_0^x (x-t)\,y(t)\,dt$.

Решение. Получим уравнение в изображениях $Y(p)=\frac{1}{p^2+1}+\frac{1}{p^2}Y(p)$,

$$Y(p)=\frac{p^3}{(p^2+1)(p^2-1)}=\frac{p^3}{2p^2}\left(\frac{1}{p^2+1}+\frac{1}{p^2-1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{p}{p^2+1}+\frac{p}{p^2-1}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{2}\left(\frac{p}{p-1}+\frac{p}{p+1}\right)\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p-1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p+1}$$

$$y(x)=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}(e^x+e^{-x})=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\operatorname{ch} x.$$

Решить следующие интегральные уравнения:

143. $\int_0^x y(t)(x-t)^2\,dt=\frac{1}{3}x^3$.

ответ: $y(x)=1$.

144. $\int\limits_0^x y(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}\,t = 1-\cos x$.

ответ: $y(x)=x$.

145. $y(x)=\dfrac{x^2}{2}+\int\limits_0^x (x-t)\,\mathrm{e}^{-(t-x)}\,y(t)\,\mathrm{d}\,t$.

ответ: $y(x)=-\dfrac{1}{16}-\dfrac{1}{8}x+\dfrac{3}{8}x^2+\dfrac{1}{16}\mathrm{e}^{2x}-\dfrac{1}{12}x^3$.

Аналогично, но несколько проще, решаются интегральные уравнения Вольтерра 1-го рода.

$$\int\limits_0^x K(x-t)y(t)dx = f(x) \qquad (46)$$

В этом случае $L(p)Y(p)=F(t)$ *и* $Y(p)=\dfrac{F(p)}{L(p)}$

Пример 146 . Решить интегральное уравнение

$$\int\limits_0^x \cos(x-t)y(t)dt = x+x^2$$

Решение: В изображениях:

$$\frac{p}{p^2+1}Y(t)=\frac{1}{p^2}+\frac{2}{p^3}$$

$$Y(p)=\frac{p+2}{p^3\cdot p}(p^2+1)=\frac{(p^2+1)(p+2)}{p^4}=\frac{p^3+p+2p^2+2}{p^4}=$$

$$=\frac{1}{p}+\frac{2}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\frac{2}{p^4}\longrightarrow 1+2x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3$$

Решить интегральные уравнения:

147. $\int\limits_0^x e^{x-t}y(t)dt = x$ Ответ: $y(x)=1-x$.

148. $\int\limits_0^x e^{2(x-t)}y(t)dt = x^2e^x$ Ответ: $y(x)=2xe^x+x^2e^x$..

149. $\cos(x-t)y(t)dt=\sin x$ Ответ: $y(x)=1$.

150. $\int\limits_0^x e^{x-t}y(t)dt=\sin x$ Ответ: $y(x)=e^{-x}$.

Указанный метод применим к системе интегральных уравнений Вольтерра вида:

$$\varphi_j(x) = f_j(x)+\sum_{k=1}^{s}\int\limits_0^x K_{jk}(x-t)\,\varphi_k(t)dt \quad j=\overline{1,s} \qquad (47)$$

В изображениях

$$\Phi_j(p)=F_j(p)+\sum_{k=1}^{s}K_{jk}\Phi_k(p) \qquad (48)$$

Получается система линейных уравнений относительно $\Phi_j(p)$

Пример 151. Решить систему интегральных уравнений:

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = x + \int\limits_0^x e^{-(x-t)}\varphi_1(t)dt + \int\limits_0^x (x-t)\varphi_2(t)dt \\ \varphi_2(x) = 1 + \int\limits_0^x sh\,(x-t)\varphi_1(t)dt - \int\limits_0^x e^{x-t}\varphi_2(t)dt \end{cases}$$

Решение. В изображениях

$$\begin{cases} \Phi_1(p) = \dfrac{1}{p^2} + \dfrac{1}{p+1}\Phi_1(p) + \dfrac{1}{p^2}\Phi_2(p) \\ \Phi_2(p) = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p-1}\Phi_1(p) - \dfrac{1}{p-1}\Phi_2(p) \end{cases}$$

$$\Phi_1(p) = \frac{p^2+p-1}{p(p-1)(p^2+1)} \quad , \qquad \Phi_2(p) = \frac{p^3-p^2+1}{(p-1)(p+1)(p^2+1)}$$

Разлагая на простейшие дроби, найдем оригиналы

$$\varphi_1(x) = 1 + \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\sin x - \frac{3}{2}\cos x$$

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{2}(\cos x + ch\,x) - \sin x$$

152. Решить систему интегральных уравнений

$$\varphi_1(x) = x + \int\limits_0^x \varphi_1(t)dt + \int\limits_0^x (x-t)\varphi_2(t)dt$$

$$\varphi_2(x) = 1 - \int\limits_0^x e^{x-t}\varphi_1(t)dt + \int\limits_0^x \varphi_2(t)dt$$

Ответ: $\varphi_1(x) = \dfrac{1}{3}e^{\frac{3}{2}x}(\sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \cos\dfrac{\sqrt{3}}{2x}) - \dfrac{1}{3}$

$\varphi_2(x) = e^{\frac{3}{2}x}(\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x)$

153. Решить систему интегральных уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = 2 - \int\limits_0^x (x-t)\varphi_1(t)dt - 4\int\limits_0^x \varphi_2(t)dt \\ \varphi_2(x) = 1 - \int\limits_0^x \varphi_1(t)dt - \int\limits_0^x (x-t)\varphi_2(t)dt \end{cases}$$

Ответ: $\varphi_1(x) = 2\,e^{-x}(1-x)$

$\varphi_2(x) = e^{-x}(1-x)$

15. Решение нестационарных задач математической физики

Операционный метод может быть применён для решения нестационарных задач мат. физики. Рассмотрим случай, когда некая функция *u(x,t)* зависит лишь от пространственной координаты x и времени t.

Для уравнения теплопроводности будем решать I краевую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

$a^2 =$ const $u(x,0)=\varphi(x)$ — начальные условия и $u(0,t)=\psi_1(t)$, $u(l,t)=\psi_2(t)$, $0\le x\le l$ — краевые условия.

Пусть все функции являются оригинальными. Обозначим $U(p,x)=\int\limits_0^\infty e^{-pt}u(x,t)dt$ — изображение по Лапласу. $F(p,x)=\!\!\!\longrightarrow f(x,t)$. Тогда,

$$\frac{\partial u}{\partial x}\leftarrow\int\limits_0^\infty\frac{\partial u}{\partial x}e^{-pt}\,dt=\frac{dU}{dx}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\leftarrow\frac{d^2U}{dx^2}\quad,\quad\frac{\partial u}{\partial t}\leftarrow pU-\varphi(x)$$

$$\psi_1(t)\leftarrow\psi_1(p)\qquad\psi_2(t)\leftarrow\psi_2(p).$$

Тогда краевые условия:

$$\mathrm{U}\big|_{x=0}=\Psi_1(p)$$

$$\mathrm{U}\big|_{x=l}=\Psi_2(p)$$

Уравнение в изображениях:

$$\mathrm{a}^2\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{U}}{\mathrm{d}x^2}-p\,\mathrm{U}+\varphi(x)+\mathrm{F}(p,x)=0$$

Пример 154._ Концы струны $x=0$, $x=l$ закреплены жестко. Начальные отклонения заданы равенством:

$$u(x,0)=\mathrm{A}\sin(\frac{\pi x}{l}),\quad 0\le x\le l.$$

Начальные скорости равны нулю. Найти отклонения $u(x,t)$ при $t>0$.

Решение: Процесс описывается волновым уравнением:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x}-\frac{1}{\mathrm{a}^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

Дано:

$$u(x,0)=\mathrm{A}\sin(\frac{\pi x}{l}),$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t^2}=0$$

$$u(t,0)=u(l,x)=0$$

В изображениях:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{U}}{\mathrm{d}x^2}-\frac{p^2}{\mathrm{a}^2}\mathrm{U}=-\frac{p\mathrm{A}}{\mathrm{a}^2}\sin(\frac{\pi x}{l})$$

$$\mathrm{U}\big|_{x=0}=\mathrm{U}\big|_{x=l}=0\,.$$

Решение этого уравнения:

$$\mathrm{U}(x,p)=C_1\,\mathrm{e}^{\frac{p}{\mathrm{a}}x}+C_1\,\mathrm{e}^{-\frac{p}{\mathrm{a}}x}+\frac{\mathrm{A}p}{p^2+\frac{\mathrm{a}^2\pi^2}{l^2}}\sin(\frac{\pi x}{l})$$

или с учетом краевых условий:

$$U(x,p)=\frac{Ap}{p^2+\frac{a^2\pi^2}{l^2}}\sin(\frac{\pi x}{l}) :\to u(x,t)=A\cos(\frac{a\pi}{l}t)\cdot\sin(\frac{\pi x}{l})$$

-синусоиду по x с амплитудой, зависящей от времени t.

Пример 155. Найти решение уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

удовлетворяющее начальным и граничным условиям:

$$u(x,0)=0,$$
$$u(0,t)=u_0,$$
$$0\le x\le\infty,$$
$$t>0$$

Решение: Запишем операторное уравнение:

$$\frac{\partial^2 U(x,p)}{\partial x}-\frac{p}{a^2}U(x,p)=0.$$

Общее решение этого дифференциального уравнения есть:

$$U(x,p)=C_1e^{-\frac{x\sqrt{p}}{a}}+C_2e^{\frac{x\sqrt{p}}{a}}.$$

Так как функции $u(x,t)$ и $U(x,p)$ при $x\to\infty$ является ограниченной, то $C_2=0$.

Используя граничные условия: $U(x,p)\big|_{x=0}=\frac{u_0}{p}$

Находим:

$$C_1=\frac{u_0}{p}.$$

Тогда $U(x,p)=\frac{u_0}{p}e^{-\frac{x\sqrt{p}}{a}}$

Имеется формула:

$$\frac{1}{p}e^{-a\sqrt{p}} :\to \mathrm{Erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right),$$

тогда: $u(x,t)=u_0\,\mathrm{Erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)=u_0\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_t^\infty e^{-\theta^2}\,d\theta$

Пример 156: Решить краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad (x>0,t>0),$$
$$u(0,t)=a\cos\omega t,\quad u(x,0)=0.$$

Ответ:

$$u(x,t)=a\,e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2k}}}\cos\left(\omega t-x\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right)-\frac{a}{\pi}\int_0^\infty e^{-\theta t}\sin\left(x\sqrt{\frac{\theta}{k}}\right)\frac{\theta\,d\theta}{\theta^2+\omega^2}$$

16. Индивидуальные задания по теме «Решение обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами операционным методом»

Решить дифференциальные уравнения с начальными условиями (задача Коши):

Вариант 1.

1.1. $y'' + 2y' + 2y = 0$, $y(0) = B,\ y'(0) = A$

1.2. $y'' - 4y = 4x$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

1.3. $y^{(4)} + 2y'' + y = x \sin x$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$

Вариант 2.

2.1. $y'' - 6y' + 9y = 0$, $y(0) = A,\ y'(0) = B$

2.2. $y'' + 4y = 8x$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 4$

2.3. $y''' + y' = 10e^{2x}$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

Вариант 3.

3.1. $y'' - y' - 6y = 2$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

3.2. $y'' + 4y = 2\cos 2x$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 4$

3.3. $y''' - y'' - 4y' + 4y = x^2 - 8$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

Вариант 4.

4.1. $y'' - 9y = 2 - x$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

4.2. $y'' + 4y = 4\sin x$, $y(0) = 4,\ y'(0) = 0$

4.3. $y''' + y' = 1$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

Вариант 5.

5.1. $y'' + 2y' + y = e^{x}$, $y(0) = 0,\ y'(0) = -2$

5.2. $y'' + 2y' = x\sin x$, $y(0) = y'(0) = 0$

5.3. $y''' - y'' = \sin x$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

Вариант 6.

6.1. $y'' - 3y' = 6$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

6.2. $y'' + 2y' + y = \sin x$, $y(0) = 0,\ y'(0) = -1$

6.3. $y''' + y' = x$, $y(0) = 0, y'(0) = -1, y''(0) = 0$

Вариант 7.

7.1. $y'' + y = x^2 + 2x$, $y(0) = 4,\ y'(0) = -2$

7.2. $y'' - 2y' + y = e^x$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$

7.3. $y''' + 2y'' + 5y' = 0$, $y(0) = -1, y'(0) = 2, y''(0) = 0$

Вариант 8.

8.1. $y'' - 2y' + y = 4$, $y(0) = 4, y'(0) = 2$

8.2. $y'' + y' = \cos x$, $y(0) = 2, y'(0) = 0$

8.3. $y''' + y'' = x$, $y(0) = -3, y'(0) = 1, y''(0) = 0$

Вариант 9.

9.1. $y'' - 5y' + 6y = 2e^x$, $y(0) = 1, y'(0) = 1$

9.2. $y'' - 2y' + 2y = 1$, $y(0) = y'(0) = 0$

9.3. $y''' + y'' = \sin x$, $y(0) = y'(0) = 1, y''(0) = 0$

Вариант 10.

10.1. $y'' + y = x^3 + 6x$, $y(0) = y'(0) = 0$

10.2. $y'' + y = \cos x$, $y(0) = -1, y'(0) = 1$

10.3. $y^{(4)} - y'' = 1$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$

Вариант 11.

1.1. $y'' + y = \sin 2x$, $y(0) = y'(0) = 0$

11.2. $y'' + 2y' + y = x^2$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$

11.3. $y''' + y = 0$, $y(0) = 0, y'(0) = -1, y''(0) = 2$

Вариант 12.

12.1. $y'' + y = \cos x$, $y(0) = y'(0) = 0$

12.2. $y'' + 2y' + 5y = 3$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$

12.3. $y''' + y' = e^x$, $y(0) = 0, y'(0) = 2, y''(0) = 0$

Вариант 13.

13.1. $y'' + y = \cos x + \sin 2x$, $y(0) = y'(0) = 0$

13.2. $y'' + 2y' + 2y = 1$, $y(0) = y'(0) = 0$

13.3. $y''' + y'' = \cos x$, $y(0) = -2, y'(0) = y''(0) = 0$

Вариант 14.

14.1. $y'' + y = e^x + 2$, $y(0) = y'(0) = 0$

14.2. $y'' + 4y = x$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

14.3. $y^{(4)} - y'' = \cos x$, $y(0) = 0, y'(0) = -1, y''(0) = y'''(0) = 0$

Вариант 15.

15.1. $y'' - 4y = 4e^{2x}$, $y(0) = y'(0) = 0$

15.2. $y'' + y = 1$, $y(0) = -1,\ y'(0) = 0$

15.3. $y''' + y' = \cos x$, $y(0) = 0, y'(0) = -2, y''(0) = 0$

Вариант 16.

16.1. $y'' - 3y' + 2y = e^{-x}$, $y(0) = y'(0) = 0$

16.2. $y'' - 2y' + 5y = 1 - x$, $y(0) = y'(0) = 0$

16.3. $y''' + y = e^x$, $y(0) = 0, y'(0) = 2, y''(0) = 0$

Вариант 17.

17.1. $y'' + y' = \cos x$, $y(0) = 2,\ y'(0) = 0$

17.2. $y'' + 4y = 2\cos x \cos 3x$, $y(0) = y'(0) = 0$

17.3. $y''' - 2y'' + y' = 4$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 2, y''(0) = -2$

Вариант 18.

18.1. $y'' - y' = xe^x$, $y(0) = y'(0) = 0$

18.2. $y'' + y' = 4\sin^2 x$, $y(0) = 0,\ y'(0) = -1$

18.3. $y''' + y = \frac{1}{2}x^2 e^x$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

Вариант 19.

19.1. $y'' + 2y' + y = x$, $y(0) = y'(0) = 0$

19.2. $y'' + y = xe^x + 4\sin x$, $y(0) = y'(0) = 0$

19.3. $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 1 + x + x^2$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

Вариант 20.

20.1. $y'' - y' + y = e^{-x}$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

20.2. $y'' - y' = x^2$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

20.3. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 1$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

Вариант 21.
21.1. $y'' - y = \sin x$, $y(0) = -1, y'(0) = 0$

21.2. $y'' - 3y' + 2y = e^{x}$, $y(0) = y'(0) = 0$

21.3. $y'' + y' + y = xe^{x}$, $y(0) = y'(0) = 0$

Вариант 22.
22.1. $y'' + y = 2\sin x$, $y(0) = 1, y'(0) = 1$

22.2. $y'' + y = x\cos 2x$, $y(0) = y'(0) = 0$

22.3. $y^{(4)} + y''' = \cos x$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, y'''(0) = \gamma$

Вариант 23.
23.1. $y'' - 2y' + y = x - \sin x$, $y(0) = y'(0) = 0$

23.2. $y'' + 4y = \sin x$, $y(0) = y'(0) = 0$

23.3. $y^{(4)} - 5y'' + 10y' - 6y = 0$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 6,\ y'''(0) = -14$

Вариант 24.
24.1. $y'' + 2y' + y = 2\cos^2 x$, $y(0) = y'(0) = 0$

24.2. $y'' - y' = xe^{x}$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$

24.3. $y''' + 3y'' - 4y = 0$, $y(0) = y'(0) = 0,\ y''(0) = 2$

Вариант 25.
25.1. $y' + ay = b$, $y(0) = 0$

25.2. $y'' - 4y = \sin\frac{3}{2}x \cdot \sin\frac{1}{2}x$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$

25.3. $y''' + y = 1$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

17. Ответы для индивидуальных заданий по теме «Решение обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами операционным методом»

Вариант 1

1.1. $y(x) = Be^{-x}\cos x + (A + B)e^{-x}\sin x$

1.2. $y(x) = \frac{1}{4}\left(3e^{2x} + e^{-2x} - 4x\right)$

1.3. $y(x) = -\frac{x}{24}(3x\cos x + (x^2 - 3)\sin x)$

Вариант 2

2.1. $y(x) = Ae^{3x} + (B - 3A)xe^{3x}$

2.2. $y(x) = 2x + \sin 2x$

2.3. $y(x) = e^{2x} + 4\cos x - 2\sin x - 5$

Вариант 3

3.1. $y(x) = \frac{1}{15}(12e^{-2x} + 8e^{3x} - 5)$

3.2. $y(x) = 2\sin 2x + \frac{x}{2}\sin 2x$

3.3. $y(x) = \frac{1}{16}(32e^{x} - 15e^{2x} + 5e^{-2x} + 4x^2 + 8x - 22)$

Вариант 4

4.1. $y(x) = \frac{1}{27}(3x - 6 + 7e^{3x} - e^{-3x})$

4.2. $y(x) = \frac{1}{3}(4\sin x + 12\cos 2x - 2\sin 2x)$

4.3. $y(x) = x - \sin x$

Вариант 5

5.1. $y(x) = \frac{1}{2}(shx - 5xe^{-x})$

5.2. $y(x) = \frac{2}{25}e^{-2x} - \frac{2}{25}\cos x + \frac{14}{25}\sin x - \frac{1}{5}x\sin x - \frac{2}{5}x\cos x$

5.3. $y(x) = \frac{1}{2}e^{x} - x - 1 + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$

Вариант 6

6..1. $y(x) = e^{3x} - 2x$

6.2. $y(x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - xe^{-x} - \cos x)$

6.3. $y(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1 + \cos x - \sin x$

Вариант 7

7.1. $y(x) = 2x - 2 + x^2 + 6\cos x - 4\sin x$

7.2. $y(x) = \frac{1}{2}x^2e^{x} + xe^{x}$

7.3. $y(x) = \frac{3}{5}e^{-x}\sin 2x - \frac{4}{5}e^{-x}\cos 2x - \frac{1}{5}$

Вариант 8

8.1. $y(x) = 4 + 2xe^{x}$

8.2. $y(x) = 2 + \frac{1}{2}(e^{-x} - \cos x + \sin x)$

8.3. $y(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x - 4 + e^{-x}$

Вариант 9

9.1. $y(x) = e^x$

9.2. $y(x) = \frac{1}{2}(1 - e^x \cos x + e^x \sin x)$

9.3. $y(x) = 2x + \frac{1}{2}(e^{-x} + \cos x - \sin x)$

Вариант 10

10.1. $y(x) = x^3$

10.2. $y(x) = \frac{1}{2}x \sin x - \cos x + \sin x$

10.3. $y(x) = chx - \frac{1}{2}x^2 - 1$

Вариант 11

11.1. $y(x) = \frac{1}{3}(2 \sin x - \sin 2x)$

11.2. $y(x) = x^2 - 4x + 6 - 5e^{-x} - xe^{-x}$

11.3. $y(x) = e^{-x} + e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x - \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

Вариант 12

12.1. $y(x) = \frac{1}{2}x \sin x$

12.2. $y(x) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5}e^{-x} \cos 2x + \frac{1}{5}e^{-x} \sin 2x$

12.3. $y(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x - 1$

Вариант 13

13.1. $y(x) = \frac{1}{6}(3x \sin x + 4 \sin x - 2 \sin 2x)$

13.2. $y(x) = \frac{1}{2}(1 - e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x)$

13.3. $y(x) = -1 - \frac{1}{2}(\sin x + \cos x + e^{-x})$

Вариант 14

14.1. $y(x) = \frac{1}{2}(\sin x - 5 \cos x + e^{-x} + 4)$

14.2. $y(x) = \frac{1}{4}x + \cos 2x - \frac{1}{8}\sin 2x)$

14.3. $y(x) = \frac{1}{2}(\cos x + chx) - x - 1$

Вариант 15

15.1. $y(x) = xe^{2x} - \frac{1}{2} sh2x$

15.2. $y(x) = 1 - 2\cos x$

15.3. $y(x) = -\frac{3}{2}\sin x - \frac{1}{2} x\cos x$

Вариант 16

16.1. $y(x) = \frac{1}{6}(e^{-x} - 3e^{x} + 2e^{2x})$

16.2. $y(x) = \frac{3}{25} - \frac{x}{5} - \frac{3}{25}e^{x}\cos 2x + \frac{4}{25}e^{x}\sin 2x$

16.3. $y(x) = \frac{1}{2}e^{x} - \frac{5}{6}e^{-x} + \frac{1}{3}e^{\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$

Вариант 17

17.1. $y(x) = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}e^{x}(\sin x - \cos x)$

17.2. $y(x) = \frac{x}{4}\sin 2x + \frac{1}{12}(\cos 2x - \cos 4x)$

17.3. $y(x) = 4x + 3 - 2e^{x}$

Вариант 18

18.1. $y(x) = e^{x}(1 - x + \frac{1}{2}x^{2}) - 1$

18.2. $y(x) = 2x - 3 + 3e^{-x} + \frac{1}{5}(\sin 2x - 2\cos 2x + 2e^{-x})$

18.3. $y(x) = \frac{1}{4}e^{x}(x^{2} - 3x + \frac{3}{2}) - \frac{1}{24}e^{-x} + \frac{1}{3}e^{\frac{x}{2}}(\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x - \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x)$

Вариант 19

19.1. $y(x) = 2e^{-x} + xe^{-x} + x - 2$

19.2. $y(x) = xe^{x} - e^{x} + \cos x + 2\sin x - 2x\cos x$

19.3. $y(x) = \frac{1}{6}x^{2} - \frac{4}{9} + \frac{35}{64} - e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-2x} - \frac{4}{27}e^{-3x}$

Вариант 20

20.1. $y(x) = \frac{1}{3}e^{-x} - \frac{1}{3}e^{\frac{x}{2}}(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x - 3\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$

20.2. $y(x) = 3e^{x} - 3 - 2x - x^{2} - \frac{x^{3}}{3}$

20.3. $y(x) = 1 - e^{-x}(\frac{1}{2}x^{2} + x + 1)$

Вариант 21

21.1. $y(x) = -\frac{1}{4}e^{x} - \frac{3}{4}e^{-x} - \frac{1}{2}\sin x$

21.2. $y(x) = e^{2x} - e^{x} - xe^{x}$

21.3. $y(x) = \frac{1}{3}e^{x}(x-1) + \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{2}}(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$

Вариант 22

22.1. $y(x) = \cos x - x\sin x$

22.2. $y(x) = \frac{4}{9}\sin 2x - \frac{5}{9}\sin x - \frac{1}{3}x\cos 2x$

22.3. $y(x) = \frac{1}{2}\gamma x^{2} + (1-\gamma)x + (\gamma - 1) + (\frac{1}{2} - \gamma)e^{-x} + \frac{1}{2}(\cos x - \sin x)$

Вариант 23

23.1. $y(x) = 2 + x - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}xe^{x} - \frac{3}{2}e^{x}$

23.2. $y(x) = \frac{1}{3}\sin x - \frac{1}{6}\sin 2x$

23.3. $y(x) = e^{x}(\cos x + \sin x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}e^{-3x}$

Вариант 24

24.1. $y(x) = 1 - \frac{22}{25}e^{-x} - \frac{6}{5}xe^{-x} - \frac{3}{25}\cos 2x + \frac{4}{25}\sin 2x$

24.2. $y(x) = e^{x}(\frac{1}{2}x^{2} - x + 1)$

24.3. $y(x) = \frac{2}{9}\left(e^{x} - (3x+1)e^{-2x}\right)$

Вариант 25

25.1. $y(x) = \frac{b}{a}\left(1 - e^{-ax}\right)$

25.2. $y(x) = \frac{83}{80}ch2x - \frac{1}{10}\cos x + \frac{1}{16}\cos 2x$

25.3. $y(x) = 1 - \frac{1}{3}e^{-x} - \frac{2}{3}e^{\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$

18. Литература по операционному исчислению

1. Ван-дер Поль Б., Бремер Х. Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа.–М., ИЛ, 1952
2. Диткин В.А., Кузнецов П.И. Справочник по операционному исчислению.–М.-Л., 1951.-256 с.
3. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление.– М, Физматгиз, 1961
4. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление.– М, Физматгиз, 1974.-542 с.
5. Карслоу Х., Егер Д. Операционные методы в прикладной математике.–М., ИЛ, 1948
6. Кожевников Н.И., Краснощекова Т.И., Шишкин Н.Е. Ряды и интегралы Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразования Лапласа.–М., Наука, 1964
7. Краснов М.Л., Макаренко Г.И. Операционное исчисление. Устойчивость движения.–М., Наука, 1964.-103 с.
8. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного, операционное исчисление, теория устойчивости. Задачи и упражнения.–М., 1971.-255 с.
9. Микусинский Я. Операторное исчисление.–М., ИЛ, 1956
10. Римский-Корсаков Б.С. Операционное исчисление.–М., 1960
11. Романовский П.И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразования Лапласа.–М., Наука, 1980.-336 с.
12. Шахно К.У. Элементы теории функций комплексной переменной и операционного исчисления. Уч.пособие.–Л., изд. СЗПИ, 1961
13. Шелковников Л.А., Такайшвили К.Г. Сборник упражнений по операционному исчислению.– М., Высшая школа, 1961.-154 с.
14. Шостак Р.Я. Операционное исчисление.–М., 1968.-192 с.

19. Вопросы для собеседования или тестирования

1. Сформулировать теорему об интегрировании оригиналов
2. Сформулируйте теорему о дифференцировании изображения.
3. Напишите теорему об интегрировании изображения.
4. Какое изображение имеет оригинал $f(4t)$, если $f(t) \leftarrow F(p)$?
5. Напишите теорему умножения изображений.
6. Напишите теорему об изображении периодических оригиналов.
7. Формула для дифференцирования оригиналов $f^{(n)}(t) \leftarrow ...$
8. Какое изображение имеет оригинал $f\left(\dfrac{t}{4}\right)$, если $f(t) \leftarrow F(p)$?
9. Формула для дифференцирования оригиналов $f^{(IV)}(t) \leftarrow ...$
10. Сформулируйте теорему запаздывания.