Аналитическая геометрия
ГЛАВА 1. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ
ЛЕКЦИЯ 3

22 сентября 2014 г.

Содержание

Определение

Аффинное пространство – это множество $\mathcal{A}$ элементов произвольной природы, называемых **точками**, которому сопоставлены:

1) линеал L, называемый присоединенным к $\mathcal{A}$;

2) соответствие, по которому любым двум точкам $A, B \in \mathcal{A}$ отвечает некоторый элемент $AB \in L$ с началом в A и с концом в B.

При этом выполняются следующие две аксиомы:

10^o. Для произвольной точки $A \in \mathcal{A}$ и любого элемента $v \in L$ существует единственная точка $B \in \mathcal{A}$ такая, что $AB = v$.

11^o. Для произвольных трех точек $A, B, C \in \mathcal{A}$ имеет место равенство $AB + BC = AC$.

1. Аффинные пространства

Определение

Аффинное пространство – это множество $\mathcal{A}$ элементов произвольной природы, называемых **точками**, которому сопоставлены:

1) линеал L, называемый присоединенным к $\mathcal{A}$;

2) соответствие, по которому любым двум точкам $A, B \in \mathcal{A}$ отвечает некоторый элемент $AB \in L$ с началом в A и с концом в B.

При этом выполняются следующие две аксиомы:

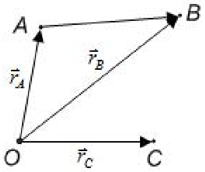
10^o. Для произвольной точки $A \in \mathcal{A}$ и любого элемента $v \in L$ существует единственная точка $B \in \mathcal{A}$ такая, что $AB = v$.

11^o. Для произвольных трех точек $A, B, C \in \mathcal{A}$ имеет место равенство $AB + BC = AC$.

Размерность аффинного пространства $\mathcal{A}$ совпадает с размерностью присоединенного линеала L и обозначается символом $\dim(\mathcal{A})$. Если $\dim(L) = n$, то $\dim(\mathcal{A}) = n$. Обозначение: $\mathcal{A}^n$.

Пример аффинного пространства

Рассмотрим точечное трехмерное пространство.
Фиксируем некоторую точку O и рассматриваем всевозможные радиус-векторы с началом в точке O.



Тогда точками аффинного пространства $\mathcal{A}^3$, с присоединенным линеалом V^3, являются концы радиус-векторов с началом в точке O. При этом двум точкам $A, B \in \mathcal{A}^3$ сопоставляется вектор

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{r}_B - \overrightarrow{r}_A \in V^3$$

. Таким образом, точке $A \in \mathcal{A}^3$ аффинного пространства ставится в соответствие радиус-вектор $\overrightarrow{r}_A$ присоединенного линеала V^3.

1. Аффинные пространства

В аналитической геометрии будем изучать аффинные пространства $\mathcal{A}^1$, $\mathcal{A}^2$, $\mathcal{A}^3$, с которыми ассоциированы линеалы V^1, V^2, V^3 и которые называются соответственно прямая, плоскость, трехмерное пространство.

Определение

Аффинной системой координат $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 ... \mathbf{e}_n$ в аффинном пространстве $\mathcal{A}^n$ называется совокупность, состоящая из точки $O \in \mathcal{A}$, называемой началом координат, и базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ из присоединенного линеала L^n.

Определение

Аффинной системой координат $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2...\mathbf{e}_n$ в аффинном пространстве $\mathcal{A}^n$ называется совокупность, состоящая из точки $O \in \mathcal{A}$, называемой началом координат, и базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ из присоединенного линеала L^n.

Важно! Аффинная система координат задается двумя разнородными объектами – точкой $O \in \mathcal{A}^n$ и базисом $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ линеала L^n.

Определение

Аффинной системой координат $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2...\mathbf{e}_n$ в аффинном пространстве $\mathcal{A}^n$ называется совокупность, состоящая из точки $O \in \mathcal{A}$, называемой началом координат, и базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ из присоединенного линеала L^n.

Важно! Аффинная система координат задается двумя разнородными объектами – точкой $O \in \mathcal{A}^n$ и базисом $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ линеала L^n.

Определение

Пусть $B \in \mathcal{A}^n$. Вектор $OB \in L^n$ называется радиус-вектором точки B и обозначается $r(B) = r_B = OB \in L^n$.

2. Аффинные системы координат

Определение

Аффинными координатами точки $B \in \mathcal{A}^n$ называются координаты ее радиус-вектора относительно базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$, то есть

$$B(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \in \mathcal{A}^n \Longrightarrow OB = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + ... + \beta_n\mathbf{e}_n$$

.

В силу единственности разложения по базису, аффинные координаты точки определяются **однозначно**.

Определение

Аффинными координатами точки $B \in \mathcal{A}^n$ называются координаты ее радиус-вектора относительно базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$, то есть

$$B(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \in \mathcal{A}^n \Longrightarrow OB = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + ... + \beta_n\mathbf{e}_n$$

.

В силу единственности разложения по базису, аффинные координаты точки определяются **однозначно**.

Произвольный элемент $AB \in L^n$ можно представить как разность соответствующих радиус-векторов: $AB = r_B - r_A$, где $A \in \mathcal{A}^n$ и $B \in \mathcal{A}^n$ – начало и конец вектора соответственно.
Если $A(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ и $B(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$, то координаты $AB \in L^n$ относительно того же базиса определяются в виде:

$$AB = (\beta_1 - \alpha_1)\mathbf{e}_1 + (\beta_2 - \alpha_2)\mathbf{e}_2 + ... + (\beta_n - \alpha_n)\mathbf{e}_n.$$

Обозначение: $AB(\beta_1 - \alpha_1, \beta_2 - \alpha_2, ..., \beta_n - \alpha_n)$.

Определение

Прямой в аффинном пространстве $\mathcal{A}^n$, проходящей через точку $C \in \mathcal{A}^n$ в направлении вектора $\mathbf{v} \in L^n$, называется множество всех точек $M \in \mathcal{A}^n$ таких что $CM = \lambda\mathbf{v}$, где λ – вещественное число, $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Определение

Прямой в аффинном пространстве $\mathcal{A}^n$, проходящей через точку $C \in \mathcal{A}^n$ в направлении вектора $\mathbf{v} \in L^n$, называется множество всех точек $M \in \mathcal{A}^n$ таких что $CM = \lambda\mathbf{v}$, где λ – вещественное число, $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Определение

Прямая, проходящая через точку $O \in \mathcal{A}^n$ в направлении вектора $\mathbf{e}_i$ называется i-ой **координатной осью**.

2. Аффинные системы координат

Определение

Прямой в аффинном пространстве $\mathcal{A}^n$, проходящей через точку $C \in \mathcal{A}^n$ в направлении вектора $\mathbf{v} \in L^n$, называется множество всех точек $M \in \mathcal{A}^n$ таких что $CM = \lambda \mathbf{v}$, где λ – вещественное число, $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

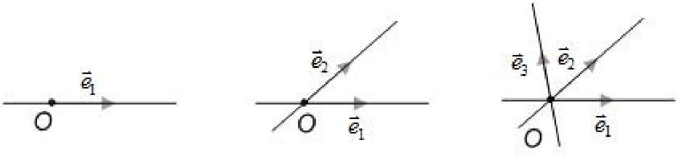
Определение

Прямая, проходящая через точку $O \in \mathcal{A}^n$ в направлении вектора $\mathbf{e}_i$ называется i-ой **координатной осью**.

Определение

Плоскостью в аффинном пространстве $\mathcal{A}^n$, проходящей через точку $C \in \mathcal{A}^n$ в направлении векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in L^n$, называется множество всех точек $M \in \mathcal{A}^n$ таких что $CM = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2$, где λ_1, λ_2 – вещественные числа, $\lambda_1, \lambda_2 \in (-\infty, \infty)$.

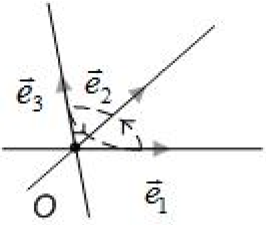
Рассмотрим аффинные пространства $\mathcal{A}^1$ (прямая), $\mathcal{A}^2$ (плоскость), $\mathcal{A}^3$ (пространство) с ассоциированными линеалами V^1, V^2, V^3.



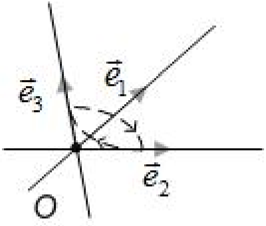
Введем в этих пространствах аффинные системы координат:
1) $\mathcal{A}^1$ (прямая): $O\vec{e}_1$ – координатная ось,
2) $\mathcal{A}^2$ (плоскость): $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, где $O\vec{e}_1$ и $O\vec{e}_2$ – координатные оси,
3) $\mathcal{A}^3$ (пространство): $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$, где $O\vec{e}_1$, $O\vec{e}_2$ и $O\vec{e}_3$ – координатные оси, а $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, $O\vec{e}_1\vec{e}_3$, $O\vec{e}_2\vec{e}_3$ – координатные плоскости.

Определение

Упорядоченная тройка базисных векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ называется **правой (левой)**, если по этим векторам после приведения их к общему началу можно направить соответсвенно большой, указательный и средний пальцы правой (левой) руки.



Правая тройка



Левая тройка

Если тройка векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – правая, то правыми также будут тройки векторов $\vec{e}_3, \vec{e}_1, \vec{e}_2$ и $\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1$.

Определение

Упорядоченная пара базисных векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ называется **правой (левой)**, если кратчайший поворот от первого вектора ко второму осуществляется против (по) ходу часовой стрелки.

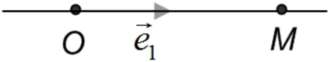
Определение

Упорядоченная пара базисных векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ называется **правой (левой)**, если кратчайший поворот от первого вектора ко второму осуществляется против (по) ходу часовой стрелки.

Определение

Аффинная система координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ называется **правой (левой)**, если $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – правая тройка векторов (левая тройка), а $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ – правая аффинная система координат, если $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ – правая пара.

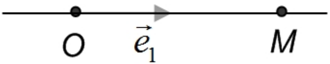
Рассмотрим аффинное пространство $\mathcal{A}^1$ (прямая) с присоединенным линеалом V^1.
Введем аффинную систему координат $O\vec{e}_1$.



$\overrightarrow{OM} = \vec{a}$, $\vec{a} || \vec{e}_1 \Longrightarrow \vec{a} = \lambda\vec{e}_1$, где число λ определяется однозначно.
Если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{e}_1$, то $\lambda = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{e}_1|}$, а если $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{e}_1$, то $\lambda = -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{e}_1|}$.

3. Геометрический смысл аффинных координат
На прямой

Рассмотрим аффинное пространство $\mathcal{A}^1$ (прямая) с присоединенным линеалом V^1.
Введем аффинную систему координат $O\vec{e}_1$.



$\overrightarrow{OM} = \vec{a}$, $\vec{a} || \vec{e}_1 \implies \vec{a} = \lambda\vec{e}_1$, где число λ определяется однозначно.
Если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{e}_1$, то $\lambda = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{e}_1|}$, а если $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{e}_1$, то $\lambda = -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{e}_1|}$.

Определение

Указанное число λ называется **алгебраической мерой** вектора $\vec{a}$ на оси, определяемой вектором $\vec{e}_1$.
Обозначение: $\lambda = mes_{\vec{e}_1} \vec{a}$

Согласно определению: $\vec{a} = (mes_{\vec{e}_1} \vec{a})\vec{e}_1$

Лемма

Справедливы соотношения:

1) $mes_{\vec{e}_1}(\mu\vec{a}) = \mu mes_{\vec{e}_1}\vec{a}$;
2) $mes_{\vec{e}_1}(\vec{a}+\vec{b}) = mes_{\vec{e}_1}\vec{a} + mes_{\vec{e}_1}\vec{b}$.

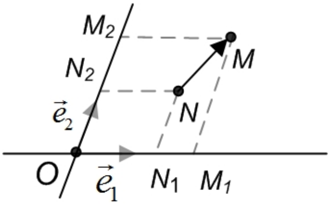
Лемма

Справедливы соотношения:

1) $mes_{\vec{e}_1}(\mu\vec{a}) = \mu mes_{\vec{e}_1}\vec{a}$;
2) $mes_{\vec{e}_1}(\vec{a}+\vec{b}) = mes_{\vec{e}_1}\vec{a} + mes_{\vec{e}_1}\vec{b}$.

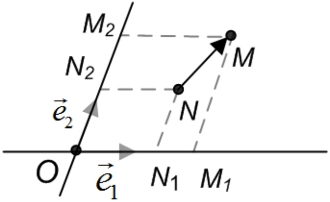
Вывод. Аффинная координата произвольной точки $M \in \mathcal{A}^1$ на прямой (оси) $=$ алгебраическая мера ее радиус-вектора на этой оси.

Рассмотрим аффинное пространство $\mathcal{A}^2$ (плоскость) с присоединенным линеалом V^2.
Введем аффинную систему координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$.



Пусть $\overrightarrow{NM} = \vec{a}$ – произвольный вектор. Спроектируем точки N и M на координатные оси.

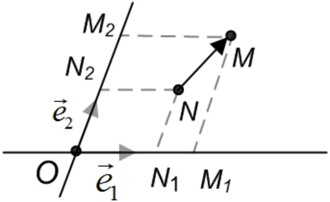
Рассмотрим аффинное пространство $\mathcal{A}^2$ (плоскость) с присоединенным линеалом V^2.
Введем аффинную систему координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$.



Пусть $\overrightarrow{NM} = \vec{a}$ – произвольный вектор. Спроектируем точки N и M на координатные оси.

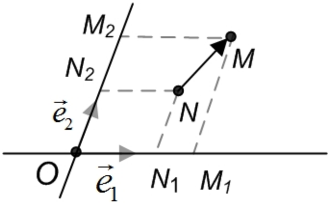
Определение

Вектор $\overrightarrow{N_1M_1}$ называется **геометрической проекцией** вектора $\overrightarrow{NM} = \vec{a}$ на координатную ось $O\vec{e}_1$. Аналогично, вектор $\overrightarrow{N_2M_2}$ – **геометрическая проекция** вектора $\overrightarrow{NM} = \vec{a}$ на ось $O\vec{e}_2$.



Обозначение геометрической проекции:
$\overrightarrow{N_1M_1} = Proj_{\vec{e}_1}\overrightarrow{NM} = Proj_{\vec{e}_1}\vec{a}$, $\overrightarrow{N_2M_2} = Proj_{\vec{e}_2}\overrightarrow{NM} = Proj_{\vec{e}_2}\vec{a}$

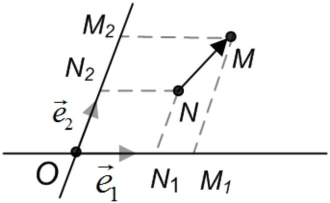
Ясно, что $\vec{a} = Proj_{\vec{e}_1}\vec{a} + Proj_{\vec{e}_2}\vec{a}$.
С другой стороны, $Proj_{\vec{e}_1}\vec{a} = \lambda_1\vec{e}_1 = (mes_{\vec{e}_1}(Proj_{\vec{e}_1}\vec{a}))\vec{e}_1 = (Apr_{\vec{e}_1}\vec{a})\vec{e}_1$.
Аналогично, $Proj_{\vec{e}_2}\vec{a} = \lambda_2\vec{e}_2 = (mes_{\vec{e}_2}(Proj_{\vec{e}_2}\vec{a}))\vec{e}_2 = (Apr_{\vec{e}_2}\vec{a})\vec{e}_2$.



Определение

Величины $Apr_{\vec{e}_1}\vec{a}$ и $Apr_{\vec{e}_2}\vec{a}$ называются **алгебраическими проекциями** вектора $\vec{a}$ на координатные оси, определяемые векторами $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$.
Таким образом, **алгебраической проекцией** вектора $\vec{a}$ на ось, определяемую вектором $\vec{e}_1$, называется алгебраическая мера геометрической проекции вектора $\vec{a}$ на ось $\vec{e}_1$.

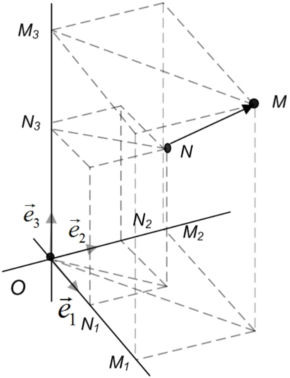
Тогда $\vec{a} = (Apr_{\vec{e}_1}\vec{a})\vec{e}_1 + (Apr_{\vec{e}_2}\vec{a})\vec{e}_2$.



$$\vec{a} = (Apr_{\vec{e}_1}\vec{a})\vec{e}_1 + (Apr_{\vec{e}_2}\vec{a})\vec{e}_2$$

Вывод. В силу единственности разложения по базису, аффинными координатами произвольного вектора служат алгебраические проекции этого вектора на координатные оси, а аффинными координатами произвольной точки – аффинные координаты ее радиус-вектора.

Рассмотрим аффинное пространство $\mathcal{A}^3$ (пространство) с присоединенным линеалом V^3. Введем аффинную систему координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$.
Пусть $\overrightarrow{NM} = \vec{a}$ – произвольный вектор. Спроектируем точки N и M на координатные оси $O\vec{e}_1$, $O\vec{e}_2$, $O\vec{e}_3$. В результате получим три вектора $\overrightarrow{N_1M_1}$, $\overrightarrow{N_2M_2}$, $\overrightarrow{N_3M_3}$, называемых **геометрическими проекциями** вектора $\overrightarrow{NM} = \vec{a}$ на координатные оси.



$\overrightarrow{N_1M_1} = Proj_{\vec{e}_1}\vec{a}$, $\overrightarrow{N_2M_2} = Proj_{\vec{e}_2}\vec{a}$, $\overrightarrow{N_3M_3} = Proj_{\vec{e}_3}\vec{a}$.

Ясно, что $\vec{a} = \overrightarrow{N_1M_1} + \overrightarrow{N_2M_2} + \overrightarrow{N_3M_3} = Proj_{\vec{e}_1}\vec{a} + Proj_{\vec{e}_2}\vec{a} + Proj_{\vec{e}_3}\vec{a}$.

Очевидно, что $Proj_{\vec{e}_i}\vec{a} = \lambda_i\vec{e}_i$, где $\lambda_i = mes_{\vec{e}_i}(Proj_{\vec{e}_i}\vec{a}) = Apr_{\vec{e}_i}\vec{a}$.

Следовательно, $\vec{a} = (Apr_{\vec{e}_1}\vec{a})\vec{e}_1 + (Apr_{\vec{e}_2}\vec{a})\vec{e}_2 + (Apr_{\vec{e}_3}\vec{a})\vec{e}_3$.

Вывод

Аффинными координатами произвольного вектора служат алгебраические проекции этого вектора на координатные оси, а аффинными координатами произвольной точки – аффинные координаты ее радиус-вектора.

Определение

Базис называется **ортонормированным**, если базисные векторы имеют единичную длину и попарно перпендикулярны.

Определение

Базис называется **ортонормированным**, если базисные векторы имеют единичную длину и попарно перпендикулярны.

Определение

Аффинная система координат с ортонормированным базисом называется **декартовой прямоугольной системой координат** (ДПСК).

В трехмерном пространстве ДПСК обозначается $O\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$ $(Oxyz)$, где $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ и $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{i} \perp \vec{k}$, $\vec{j} \perp \vec{k}$.
Оси координат: $O\vec{i}$ – ось абсцисс, $O\vec{j}$ – ось ординат, $O\vec{k}$ – ось аппликат.

Определение

Базис называется **ортонормированным**, если базисные векторы имеют единичную длину и попарно перпендикулярны.

Определение

Аффинная система координат с ортонормированным базисом называется **декартовой прямоугольной системой координат** (ДПСК).

В трехмерном пространстве ДПСК обозначается $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ $(Oxyz)$, где $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ и $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{i} \perp \vec{k}$, $\vec{j} \perp \vec{k}$.
Оси координат: $O\vec{i}$ – ось абсцисс, $O\vec{j}$ – ось ординат, $O\vec{k}$ – ось аппликат.

Определение

Координатная ось ДПСК называется **декартовой осью**.

Так как ДПСК частный случай аффинной системы координат, то для любого вектора $\vec{a}$ справедливо равенство:

$$\vec{a} = (Apr_{\vec{i}}\vec{a})\vec{i} + (Apr_{\vec{j}}\vec{a})\vec{j} + (Apr_{\vec{k}}\vec{a})\vec{k},$$

то есть декартовы координаты вектора (абсцисса, ордината и аппликата) – это алгебраические проекции вектора $\vec{a}$ на декартовы оси.

Так как ДПСК частный случай аффинной системы координат, то для любого вектора $\vec{a}$ справедливо равенство:

$$\vec{a} = (Apr_{\vec{i}}\vec{a})\vec{i} + (Apr_{\vec{j}}\vec{a})\vec{j} + (Apr_{\vec{k}}\vec{a})\vec{k},$$

то есть декартовы координаты вектора (абсцисса, ордината и аппликата) – это алгебраические проекции вектора $\vec{a}$ на декартовы оси.

Рассмотрим ДПСК $O\vec{i}$ **на прямой**.
Ясно, что $Apr_{\vec{i}}\vec{a} = |\vec{a}|$, если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{i}$, и $Apr_{\vec{i}}\vec{a} = -|\vec{a}|$, если $\vec{a} \downarrow\uparrow \vec{i}$.

Рассмотрим ДПСК $O\vec{i}\vec{j}$ **на плоскости**.

Определение

Углом наклона вектора к декартовой оси называется наименьший угол, на который нужно повернуть орт декартовой оси до его совпадения с ортом данного вектора после приведения их к общему началу.

Рассмотрим ДПСК $O\vec{i}\,\vec{j}$ **на плоскости**.

Определение

Углом наклона вектора к декартовой оси называется наименьший угол, на который нужно повернуть орт декартовой оси до его совпадения с ортом данного вектора после приведения их к общему началу.

Теорема

Алгебраическая проекция вектора на декартову ось равна произведению модуля этого вектора на косинус угла наклона этого вектора к декартовой оси, то есть $Apr_{\vec{i}}\overrightarrow{NM} = |\overrightarrow{NM}|\cos\alpha$, где α – угол наклона вектора к оси.

Рассмотрим ДПСК $O\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$ **в пространстве**.
Декартовы прямоугольные координаты вектора в трехмерном пространстве равны алгебраическим проекциям данного вектора на оси координат.