Аналитическая геометрия
ГЛАВА 1. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ
ЛЕКЦИЯ 2

8 сентября 2014 г.

Содержание

1. Линейное пространство (линеал)

Определение

Линейным пространством (линеалом) называется множество $L = \{x, y, z, ..., s, p, ...\}$ элементов произвольной природы, называемых векторами, для которого:

1) Задано правило, по которому любым двум элементам $x \in L$, $y \in L$ сопоставляется элемент $s \in L$, называемый их **суммой** и обозначаемый $s = x + y$.

2) Задано правило, по которому любому элементу $x \in L$ и любому вещественному числу $\lambda \in R$ сопоставляется элемент $p \in L$, называемый **произведением** x на λ и обозначаемый $p = \lambda x$.

3) Заданные правила при любых $x \in L$, $y \in L$, $z \in L$ и любых вещественных числах $\lambda \in R$, $\mu \in R$ подчинены аксиомам:

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. существует $\mathbf{0} \in L : x + \mathbf{0} = x$
4. для каждого $x \in L$ существует $x' \in L$, что $x + x' = \mathbf{0}$
5. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$
6. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
7. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
8. $1 \cdot x = x$.

Примеры линеалов

Линеал V^1 – множество всех свободных векторов на прямой.

Примеры линеалов

Линеал V^1 – множество всех свободных векторов на прямой.

Линеал V^2 – множество всех свободных векторов на плоскости.

Примеры линеалов

Линеал V^1 – множество всех свободных векторов на прямой.

Линеал V^2 – множество всех свободных векторов на плоскости.

Линеал V^3 – множество всех свободных векторов в трехмерном пространстве.

Примеры линеалов

Линеал V^1 – множество всех свободных векторов на прямой.

Линеал V^2 – множество всех свободных векторов на плоскости.

Линеал V^3 – множество всех свободных векторов в трехмерном пространстве.

Линеал $\{\mathbf{0}\}$ – простейший линеал, состоящий из одного нулевого элемента.

Примеры линеалов

Линеал V^1 – множество всех свободных векторов на прямой.

Линеал V^2 – множество всех свободных векторов на плоскости.

Линеал V^3 – множество всех свободных векторов в трехмерном пространстве.

Линеал $\{\mathbf{0}\}$ – простейший линеал, состоящий из одного нулевого элемента.

Линеал R^n – множество всевозможных упорядоченных наборов из n вещественных чисел $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$, в котором сумма двух элементов и произведение на вещественное число определяются по следующим правилам:

$$\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\} + \{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n\} = \{\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, ..., \alpha_n + \beta_n\},$$

$$\lambda\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\} = \{\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, ..., \lambda\alpha_n\}.$$

2. Базис линейного пространства (линеала)

Определение

Упорядоченная совокупность линейно независимых элементов $e_1, e_2, ..., e_n$ линейного пространства L называется **базисом линейного пространства**, если для любого элемента $x \in L$ найдутся вещественные числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, такие что $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_n e_n$. При этом говорят, что элемент x разложен по базису $e_1, e_2, ..., e_n$.

2. Базис линейного пространства (линеала)

Определение

Упорядоченная совокупность линейно независимых элементов $e_1, e_2, ..., e_n$ линейного пространства L называется **базисом линейного пространства**, если для любого элемента $x \in L$ найдутся вещественные числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, такие что $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_n e_n$. При этом говорят, что элемент x разложен по базису $e_1, e_2, ..., e_n$.

Примеры

1) В линейном пространстве V^1 произвольный ненулевой вектор может быть взят в качестве базисного.

2. Базис линейного пространства (линеала)

Определение

Упорядоченная совокупность линейно независимых элементов $e_1, e_2, ..., e_n$ линейного пространства L называется **базисом линейного пространства**, если для любого элемента $x \in L$ найдутся вещественные числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, такие что $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_n e_n$. При этом говорят, что элемент x разложен по базису $e_1, e_2, ..., e_n$.

Примеры

1) В линейном пространстве V^1 произвольный ненулевой вектор может быть взят в качестве базисного.
2) В линейном пространстве V^2 упорядоченная пара неколлинеарных векторов образует базис.

2. Базис линейного пространства (линеала)

Определение

Упорядоченная совокупность линейно независимых элементов $e_1, e_2, ..., e_n$ линейного пространства L называется **базисом линейного пространства**, если для любого элемента $x \in L$ найдутся вещественные числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, такие что $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_n e_n$. При этом говорят, что элемент x разложен по базису $e_1, e_2, ..., e_n$.

Примеры

1) В линейном пространстве V^1 произвольный ненулевой вектор может быть взят в качестве базисного.
2) В линейном пространстве V^2 упорядоченная пара неколлинеарных векторов образует базис.
3) В линейном пространстве V^3 упорядоченная тройка некомпланарных векторов образует базис.

Определение

Упорядоченная совокупность линейно независимых элементов $e_1, e_2, ..., e_n$ линейного пространства L называется **базисом линейного пространства**, если для любого элемента $x \in L$ найдутся вещественные числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, такие что $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_n e_n$. При этом говорят, что элемент x разложен по базису $e_1, e_2, ..., e_n$.

Примеры

1) В линейном пространстве V^1 произвольный ненулевой вектор может быть взят в качестве базисного.
2) В линейном пространстве V^2 упорядоченная пара неколлинеарных векторов образует базис.
3) В линейном пространстве V^3 упорядоченная тройка некомпланарных векторов образует базис.
4) В пространстве R^n элементы $e_1 = \{1, 0, ..., 0\}, e_2 = \{0, 1, 0, ..., 0\}, ...,$ $e_n = \{0, 0, ..., 1\}$ являются линейно независимыми и образуют базис.

Отметим, что для базиса **порядок элементов существенен**. Переставляя элементы базиса, мы получаем снова базис, но уже **другой**.

Определение

Числа $\alpha_1, ..., \alpha_n$, фигурирующие в разложении элемента $x \in L$ по заданному базису $e_1, e_2, ..., e_n$ называются **координатами** данного элемента относительно рассматриваемого базиса.

2. Базис линейного пространства (линеала)

Отметим, что для базиса **порядок элементов существенен**. Переставляя элементы базиса, мы получаем снова базис, но уже **другой**.

Определение

Числа $\alpha_1, ..., \alpha_n$, фигурирующие в разложении элемента $x \in L$ по заданному базису $e_1, e_2, ..., e_n$ называются **координатами** данного элемента относительно рассматриваемого базиса.

Теорема

Координаты элемента линейного пространства L относительно заданного базиса определяются однозначно.

Отметим, что для базиса **порядок элементов существенен**. Переставляя элементы базиса, мы получаем снова базис, но уже **другой**.

Определение

Числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, фигурирующие в разложении элемента $x \in L$ по заданному базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$ называются **координатами** данного элемента относительно рассматриваемого базиса.

Теорема

Координаты элемента линейного пространства L относительно заданного базиса определяются однозначно.

Теорема

При сложении элементов линейного пространства L их координаты относительно заданного базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ складываются, а при умножении на число – координаты умножаются на это число.

Теорема

Если каждый из элементов $y_0, y_1, ..., y_n \in L$ представим в виде линейной комбинации линейно независимых элементов $e_1, e_2, ...e_n \in L$, то элементы $y_0, y_1, ..., y_n$ линейно зависимы.

Теорема

Если каждый из элементов $y_0, y_1, ..., y_n \in L$ представим в виде линейной комбинации линейно независимых элементов $e_1, e_2, ...e_n \in L$, то элементы $y_0, y_1, ..., y_n$ линейно зависимы.

Следствие

Любые $(n+1)$ элементов в пространстве R^n линейно зависимы.

Теорема

Если каждый из элементов $y_0, y_1, ..., y_n \in L$ представим в виде линейной комбинации линейно независимых элементов $e_1, e_2, ...e_n \in L$, то элементы $y_0, y_1, ..., y_n$ линейно зависимы.

Следствие

Любые $(n+1)$ элементов в пространстве R^n линейно зависимы.

Следствие

Любые два базиса одного линейного пространства L содержат одно и то же число элементов.

3. Размерность линейного пространства

Определение

Линейное пространство L называется n-**мерным**, если в нем существует базис, состоящий из n элементов.

Обозначение: $n = dim\, L, L = L^n$

Определение

Линейное пространство L называется n-**мерным**, если в нем существует базис, состоящий из n элементов.

Обозначение: $n = dim\, L, L = L^n$

Таким образом, размерность пространства – это наибольшее число его линейно независимых компонент.

Определение

Линейное пространство L называется n-**мерным**, если в нем существует базис, состоящий из n элементов.

Обозначение: $n = dim\, L, L = L^n$

Таким образом, размерность пространства – это наибольшее число его линейно независимых компонент.

Пример: $dim\, V^1 = 1, dim\, V^2 = 2, dim\, V^3 = 3, dim\, R^n = n.$

Линеал, содержащий единственный нулевой элемент является нуль-мерным.

Определение

Линейное пространство называется бесконечномерным, если в нем не существует базиса, содержащего конечное число элементов.

Пример

Множество непрерывных на отрезке [0,1] функций – бесконечномерное линейное пространство.

Определение

Линейное пространство называется бесконечномерным, если в нем не существует базиса, содержащего конечное число элементов.

Пример

Множество непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций – бесконечномерное линейное пространство.

Теорема

Для того, чтобы линеал L был n-мерным необходимо и достаточно, чтобы в нем существовала система, состоящая из n линейно независимых элементов, а любая система из $(n+1)$ элемента была линейно зависимой.

Таким образом, имеют место следующие утверждения:
1) Если $dim\, L = n$, то любая система из $(n+1)$-го вектора линеала L является линейно зависимой.
2) Если $dim\, L = n$, то в линеале L существуют линейно независимые системы, состоящие из n элементов.

Таким образом, имеют место следующие утверждения:
1) Если $dim\, L = n$, то любая система из $(n+1)$-го вектора линеала L является линейно зависимой.
2) Если $dim\, L = n$, то в линеале L существуют линейно независимые системы, состоящие из n элементов.

Аксиома размерности

Линейное пространство L конечномерно и его размерность равна n.