Аналитическая геометрия
ГЛАВА 5. ИНВАРИАНТЫ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ

ЛЕКЦИЯ 15
Исследование общего уравнения поверхности второго порядка с помощью инвариантов

22 декабря 2016 г.

Содержание

Пусть в некоторой ДПСК $Oxyz$ поверхность второго порядка определяется общим уравнением:

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz+ \\ +2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где коэффициенты $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ одновременно в нуль не обращаются.

Пусть в некоторой ДПСК $Oxyz$ поверхность второго порядка определяется общим уравнением:

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz+ \\ +2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где коэффициенты $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ одновременно в нуль не обращаются.

Уравнение этой поверхности относительно другой ДПСК $O_1\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ получается из (1) после подстановки в это уравнение формул преобразования координат:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \alpha_{11}\bar{x} + \alpha_{21}\bar{y} + \alpha_{31}\bar{z}, \\ y &= y_0 + \alpha_{12}\bar{x} + \alpha_{22}\bar{y} + \alpha_{32}\bar{z}, \\ z &= z_0 + \alpha_{13}\bar{x} + \alpha_{23}\bar{y} + \alpha_{33}\bar{z}. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $O_1(x_0, y_0, z_0)$ – новое начало координат, $\mathbf{A} = \{\alpha_{ij}\}_{i,j=1}^{3,3}$ – ортогональная матрица. Преобразование (2) будем называть **ортогональным преобразованием** системы координат.

В результате преобразования координат уравнение поверхности второго порядка принимает вид:

$$\bar{a}_{11}\bar{x}^2 + \bar{a}_{22}\bar{y}^2 + \bar{a}_{33}\bar{z}^2 + 2\bar{a}_{12}\bar{x}\bar{y} + 2\bar{a}_{13}\bar{x}\bar{z} + 2\bar{a}_{23}\bar{y}\bar{z}+$$
$$+2\bar{a}_{14}\bar{x} + 2\bar{a}_{24}\bar{y} + 2\bar{a}_{34}\bar{z} + \bar{a}_{44} = 0.$$

В результате преобразования координат уравнение поверхности второго порядка принимает вид:

$$\bar{a}_{11}\bar{x}^2 + \bar{a}_{22}\bar{y}^2 + \bar{a}_{33}\bar{z}^2 + 2\bar{a}_{12}\bar{x}\bar{y} + 2\bar{a}_{13}\bar{x}\bar{z} + 2\bar{a}_{23}\bar{y}\bar{z} + \\ + 2\bar{a}_{14}\bar{x} + 2\bar{a}_{24}\bar{y} + 2\bar{a}_{34}\bar{z} + \bar{a}_{44} = 0.$$

Определение

Величину $\varphi(a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, ..., a_{34}, a_{44})$, не являющееся константой, называют **инвариантом** общего уравнения поверхности второго порядка относительно преобразования координат, если ее значение не зависит от системы координат, в которой рассматривается поверхность, т. е. каковы бы ни были ДПСК $Oxyz$ и $O_1\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ справедливо равенство:

$$\varphi(a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, ..., a_{34}, a_{44}) = \varphi(\bar{a}_{11}, \bar{a}_{22}, \bar{a}_{33}, \bar{a}_{12}, ..., \bar{a}_{34}, \bar{a}_{44}).$$

Теорема

Инвариантами общего уравнения поверхности второго порядка относительно преобразования координат являются величины:

$$J_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \quad J_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad J_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$J(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + J_1\lambda^2 - J_2\lambda + J_3.$$

Теорема

Величины

$$J_2^* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{14} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{24} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{34} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$J_3^* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{24} \\ a_{14} & a_{24} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{13} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$$

являются инвариантами общего уравнения поверхности второго порядка относительно однородного ортогонального преобразования системы координат (когда $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ в формулах (2)), то есть относительно поворота системы координат.

Теорема

Величины

$$J_2^* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{14} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{24} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{34} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$J_3^* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{24} \\ a_{14} & a_{24} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{13} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$$

являются инвариантами общего уравнения поверхности второго порядка относительно однородного ортогонального преобразования системы координат (когда $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ в формулах (2)), то есть относительно поворота системы координат.

Замечание. В общем случае величины J_2^* и J_3^* не являются инвариантами относительно параллельного переноса системы координат, а потому их называют **полуинвариантами** общего уравнения поверхности второго порядка относительно преобразования координат.

Теорема

Если в результате однородного ортогонального преобразования системы координат уравнение (1) приводится к виду, в котором отсутствует одна из координат, то величина J_3^* является инвариантом и относительно параллельного переноса системы координат.

Теорема

Если в результате однородного ортогонального преобразования системы координат уравнение (1) приводится к виду, в котором отсутствует одна из координат, то величина J_3^* является инвариантом и относительно параллельного переноса системы координат.

Теорема

Если в результате однородного ортогонального преобразования (поворота) системы координат уравнение (1) приводится к виду, в котором отсутствуют две координаты из трех, то величина J_2^* становится инвариантом и относительно параллельного переноса системы координат.

Пусть поверхность второго порядка задана общим уравнением:

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Подсчитаем инварианты $J_1, J_2, J_3, J_4, J(\lambda) = -\lambda^3 + J_1\lambda^2 - J_2\lambda + J_3$.

Пусть поверхность второго порядка задана общим уравнением:

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz+ \\ +2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Подсчитаем инварианты $J_1, J_2, J_3, J_4, J(\lambda) = -\lambda^3 + J_1\lambda^2 - J_2\lambda + J_3$. Выполним стандартное преобразование системы координат $Oxyz$ (два согласованных поворота). В результате относительно новой системы координат $Ox'y'z'$ уравнение поверхности запишется в виде:

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{33}z'^2 + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + 2a'_{34}z' + a_{44} = 0. \tag{4}$$

Пусть поверхность второго порядка задана общим уравнением:

$$\begin{gathered}a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ +2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.\end{gathered} \qquad (3)$$

Подсчитаем инварианты $J_1, J_2, J_3, J_4, J(\lambda) = -\lambda^3 + J_1\lambda^2 - J_2\lambda + J_3$.
Выполним стандартное преобразование системы координат $Oxyz$ (два согласованных поворота). В результате относительно новой системы координат $Ox'y'z'$ уравнение поверхности запишется в виде:

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{33}z'^2 + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + 2a'_{34}z' + a_{44} = 0. \qquad (4)$$

Вычислим значение инварианта $J(\lambda)$:

$$J(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11}-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & a'_{33}-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (a'_{11}-\lambda)(a'_{22}-\lambda)(a'_{33}-\lambda).$$

Следовательно, в уравнении (4) коэффициенты a'_{11}, a'_{22}, a'_{33} равны корням уравнения $J(\lambda) = 0 \iff -\lambda^3 + J_1\lambda^2 - J_2\lambda + J_3 = 0$.

Рассмотрим уравнение

$$J(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow -\lambda^3 + J_1\lambda^2 - J_2\lambda + J_3 = 0. \qquad (5)$$

I случай. Если $J_3 \neq 0$, то $J_3 = a'_{11}a'_{22}a'_{33} \neq 0$, а значит $a'_{11} \neq 0$, $a'_{22} \neq 0$, $a'_{33} \neq 0$. Следовательно уравнение $J(\lambda) = 0$ имеет три вещественных ненулевых корня. Поверхность в этом случае является центральной, обладающей единственным центром симметрии.

После параллельного переноса системы координат $Ox'y'z'$ в центр симметрии, уравнение поверхности приобретает вид

$$a'_{11}\bar{x}^2 + a'_{22}\bar{y}^2 + a'_{33}\bar{z}^2 + \bar{a}_{44} = 0,$$

причем $J_4 = \begin{vmatrix} a'_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a'_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{a}_{44} \end{vmatrix} = a'_{11}a'_{22}a'_{33}\bar{a}_{44} = J_3\bar{a}_{44} \Longrightarrow$

$\bar{a}_{44} = \dfrac{J_4}{J_3}$.

Таким образом, если $J_3 \neq 0$, то уравнение (3) с точностью до обозначения переменных приводится к виду

$$\lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 + \lambda_3 \bar{z}^2 + \frac{J_4}{J_3} = 0. \tag{6}$$

Здесь $\lambda_1 = a'_{11}, \ \lambda_2 = a'_{22},, \ \lambda_3 = a'_{33}$ – корни уравнения $J(\lambda) = 0$.

Таким образом, если $J_3 \neq 0$, то уравнение (3) с точностью до обозначения переменных приводится к виду

$$\lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 + \lambda_3 \bar{z}^2 + \frac{J_4}{J_3} = 0. \tag{6}$$

Здесь $\lambda_1 = a'_{11},\ \lambda_2 = a'_{22},,\ \lambda_3 = a'_{33}$ – корни уравнения $J(\lambda) = 0$.

II случай. Если $J_3 = 0, J_2 \neq 0$, то поверхность не является центральной. Так как $J_3 = a'_{11} a'_{22} a'_{33} = 0$, а $J_2 \neq 0$, то среди коэффициентов a'_{11}, a'_{22}, a'_{33} существует ровно два отличных от нуля.

В результате после соответствующего парал-го переноса системы координат уравнение (4) приводится к одному из двух уравнений:

$$a'_{11} \bar{x}^2 + a'_{22} \bar{y}^2 + 2\bar{a}_{34} \bar{z} = 0, \tag{7}$$

$$a'_{11} \bar{x}^2 + a'_{22} \bar{y}^2 + \bar{a}_{44} = 0. \tag{8}$$

Рассмотрим сначала уравнение (7):

$$a'_{11}\bar{x}^2 + a'_{22}\bar{y}^2 + 2\bar{a}_{34}\bar{z} = 0.$$

Инвариант J_4 равен: $J_4 = \begin{vmatrix} a'_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{a}_{34} \\ 0 & 0 & \bar{a}_{34} & 0 \end{vmatrix} = a'_{11}a'_{22}(-\bar{a}_{34}^2) =$

$J_2(-\bar{a}_{34}^2) \neq 0 \implies \bar{a}_{34} = \pm\sqrt{-\dfrac{J_4}{J_2}}.$

Рассмотрим сначала уравнение (7):

$$a'_{11}\bar{x}^2 + a'_{22}\bar{y}^2 + 2\bar{a}_{34}\bar{z} = 0.$$

Инвариант J_4 равен: $J_4 = \begin{vmatrix} a'_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{a}_{34} \\ 0 & 0 & \bar{a}_{34} & 0 \end{vmatrix} = a'_{11}a'_{22}(-\bar{a}_{34}^2) =$

$J_2(-\bar{a}_{34}^2) \neq 0 \implies \bar{a}_{34} = \pm\sqrt{-\dfrac{J_4}{J_2}}.$

Рассмотрим теперь уравнение (8):

$$a'_{11}\bar{x}^2 + a'_{22}\bar{y}^2 + \bar{a}_{44} = 0.$$

Здесь инвариант J_4 равен нулю и $J_3 = 0$. Но, в этом случае инвариантом является J_3^*, причем:

$$J_3^* = \begin{vmatrix} a'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{a}_{44} \end{vmatrix} = a'_{11}a'_{22}\bar{a}_{44} = J_2\bar{a}_{44} \implies \bar{a}_{44} = \frac{J_3^*}{J_2}.$$

III случай. Пусть теперь $J_3 = 0, J_2 = 0$. Так как $J_3 = 0$ и $J_2 = 0$, то два корня уравнения (5) равны нулю, а третий равен J_1. После соответствующего параллельного переноса (и, возможно, поворота) уравнение (4) приводится к одному из двух видов:

$$a'_{11}\bar{x}^2 + 2\bar{a}_{24}\bar{y} = 0, \tag{9}$$

$$a'_{11}\bar{x}^2 + \bar{a}_{44} = 0. \tag{10}$$

причем $a'_{11} = J_1$. И для (9), и для (10) инвариант $J_4 = 0$. Поэтому J_3^* инвариант. В случае (9) он равен: $J_3^* = -\bar{a}_{24}^2 J_1 \Longrightarrow \bar{a}_{24} = \pm\sqrt{-\dfrac{J_3^*}{J_1}}$.

III случай. Пусть теперь $J_3 = 0, J_2 = 0$. Так как $J_3 = 0$ и $J_2 = 0$, то два корня уравнения (5) равны нулю, а третий равен J_1. После соответствующего параллельного переноса (и, возможно, поворота) уравнение (4) приводится к одному из двух видов:

$$a'_{11}\bar{x}^2 + 2\bar{a}_{24}\bar{y} = 0, \tag{9}$$

$$a'_{11}\bar{x}^2 + \bar{a}_{44} = 0. \tag{10}$$

причем $a'_{11} = J_1$. И для (9), и для (10) инвариант $J_4 = 0$. Поэтому J_3^* инвариант. В случае (9) он равен: $J_3^* = -\bar{a}_{24}^2 J_1 \Longrightarrow \bar{a}_{24} = \pm\sqrt{-\dfrac{J_3^*}{J_1}}$.

В случае уравнения (10) $J_3 = J_2 = J_4 = J_3^* = 0$, а тогда J_2^* является инвариантом. Для уравнения (10) он равен: $J_2^* = \bar{a}_{44} J_1 \Longrightarrow \bar{a}_{44} = \dfrac{J_2^*}{J_1}$.

Итак, возможны следующие случаи:

1. если $J_3 \neq 0$, то $\lambda_1\bar{x}^2 + \lambda_2\bar{y}^2 + \lambda_3\bar{z}^2 + \dfrac{J_4}{J_3} = 0$,
где $\lambda_1 = a'_{11}$, $\lambda_2 = a'_{22}$, $\lambda_3 = a'_{33}$ – корни уравнения $J(\lambda) = 0$;

2. если $J_3 = 0$, $J_4 \neq 0$, $J_2 \neq 0$, то $\lambda_1\bar{x}^2 + \lambda_2\bar{y}^2 \pm 2\sqrt{-\dfrac{J_4}{J_2}}\,\bar{z} = 0$;

3. если $J_3 = 0$, $J_4 = 0$, $J_2 \neq 0$, то $\lambda_1\bar{x}^2 + \lambda_2\bar{y}^2 + \dfrac{J_3^*}{J_2} = 0$;

4. если $J_3 = 0$, $J_2 = 0$, $J_4 = 0$, $J_3^* \neq 0$, то $J_1\bar{x}^2 \pm 2\sqrt{-\dfrac{J_3^*}{J_1}}\,\bar{y} = 0$;

5. если $J_3 = 0$, $J_2 = 0$, $J_4 = 0$, $J_3^* = 0$, то $J_1\bar{x}^2 + \dfrac{J_2^*}{J_1} = 0$.