Аналитическая геометрия
ГЛАВА 5. ИНВАРИАНТЫ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ

ЛЕКЦИЯ 14
Исследование линий второго порядка с помощью инвариантов

30 декабря 2014 г.

Содержание

1. Инварианты общего уравнения линии второго порядка
2. Исследование общего уравнения линии второго порядка с помощью инвариантов

Рассмотрим общее уравнение линии второго порядка:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \tag{1}$$

где коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} одновременно в нуль не обращаются.

Рассмотрим общее уравнение линии второго порядка:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \tag{1}$$

где коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} одновременно в нуль не обращаются.

При переходе от ДПСК Oxy к другой ДПСК $O_1\bar{x}\bar{y}$ в общем случае изменяются все коэффициенты уравнения (1) и уравнение линии принимает вид:

$$a'_{11}\bar{x}^2 + 2a'_{12}\bar{x}\bar{y} + a'_{22}\bar{y}^2 + 2a'_{13}\bar{x} + 2a'_{23}\bar{y} + a'_{33} = 0.$$

Рассмотрим общее уравнение линии второго порядка:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \qquad (1)$$

где коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} одновременно в нуль не обращаются.

При переходе от ДПСК Oxy к другой ДПСК $O_1\bar{x}\bar{y}$ в общем случае изменяются все коэффициенты уравнения (1) и уравнение линии принимает вид:

$$a'_{11}\bar{x}^2 + 2a'_{12}\bar{x}\bar{y} + a'_{22}\bar{y}^2 + 2a'_{13}\bar{x} + 2a'_{23}\bar{y} + a'_{33} = 0.$$

Определение

Выражение $f(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33})$, не являющееся константой, называют **инвариантом** уравнения линии l второго порядка относительно преобразования координат, если его значения не зависят от системы координат, в которой рассматривается линия, т. е. каковы бы ни были ДПСК Oxy и $O_1\bar{x}\bar{y}$ справедливо равенство:

$$f(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33}) = f(a'_{11}, a'_{12}, a'_{22}, a'_{13}, a'_{23}, a'_{33}).$$

Теорема

Инвариантами общего уравнения линии l второго порядка относительно преобразования координат являются величины:

$$J_1 = a_{11} + a_{22}, \quad J_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad J_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$J(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - J_1\lambda + J_2.$$

Теорема

Инвариантами общего уравнения линии l второго порядка относительно преобразования координат являются величины:

$$J_1 = a_{11} + a_{22}, \quad J_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad J_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$J(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - J_1\lambda + J_2.$$

Теорема

Величина

$$J_2^* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

является инвариантом общего уравнения линии l второго порядка относительно поворота системы координат.

Замечание. В общем случае J_2^* не является инвариантом относительно параллельного переноса системы координат и поэтому называется полуинвариантом.

Замечание. В общем случае J_2^* не является инвариантом относительно параллельного переноса системы координат и поэтому называется полуинвариантом.

Теорема

Если $J_2 = 0, J_3 = 0$, то J_2^* является инвариантом и относительно параллельного переноса системы координат.

Рассмотрим общее уравнение линии второго порядка:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \qquad (2)$$

где коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} одновременно в нуль не обращаются.

Выполним поворот системы Oxy на угол φ: $ctg 2\varphi = \dfrac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}$.
В результате относительно новой системы координат $Ox'y'$ уравнение линии l запишется в виде:

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0. \qquad (3)$$

Рассмотрим общее уравнение линии второго порядка:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \qquad (2)$$

где коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} одновременно в нуль не обращаются.

Выполним поворот системы Oxy на угол φ: $ctg 2\varphi = \dfrac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}$.
В результате относительно новой системы координат $Ox'y'$ уравнение линии l запишется в виде:

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0. \qquad (3)$$

Вычислим значение инварианта $J(\lambda)$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} - \lambda & 0 \\ 0 & a'_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (a'_{11} - \lambda)(a'_{22} - \lambda).$$

Следовательно, в уравнении (3) коэффициенты a'_{11}, a'_{22} равны корням уравнения $J(\lambda) = 0 \iff \lambda^2 - J_1\lambda + J_2 = 0$.

Рассмотрим уравнение $J(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda^2 - J_1\lambda + J_2 = 0$.

I случай. Если $J_2 \neq 0$, то $J_2 = a'_{11}a'_{22} \neq 0$, а значит $a'_{11} \neq 0,\ a'_{22} \neq 0$. Следовательно уравнение $J(\lambda) = 0$ имеет два вещественных ненулевых корня.

Выполним параллельный перенос системы координат $Ox'y'$ в соответствующую точку O_1, освобождаясь от линейной части. В результате уравнение (3) относительно системы $O_1\bar{x}\bar{y}$ примет вид

$$a'_{11}\bar{x}^2 + a'_{22}\bar{y}^2 + \bar{a}_{33} = 0,$$

причем $J_3 = \begin{vmatrix} a'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{a}_{33} \end{vmatrix} = a'_{11}a'_{22}\bar{a}_{33} = J_2\bar{a}_{33} \Longrightarrow \bar{a}_{33} = \dfrac{J_3}{J_2}$.

Таким образом, если $J_2 \neq 0$, то уравнение (2) с точностью до обозначения переменных приводится к виду

$$\lambda_1\bar{x}^2 + \lambda_2\bar{y}^2 + \frac{J_3}{J_2} = 0. \qquad (4)$$

Здесь $\lambda_1 = a'_{11},\ \lambda_2 = a'_{22}$ – корни уравнения $J(\lambda) = 0$.

II случай. Если $J_2 = 0$, то линия (2) не является центральной. Так как $J_2 = a'_{11}a'_{22} = 0$, то один из коэффициентов либо a'_{11}, либо a'_{22} равен нулю. При этом один из корней уравнения $J(\lambda) = 0$ равен нулю, а другой J_1. В результате уравнение (3) принимает вид

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0, \text{ либо } a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0.$$

В первом случае $a'_{11} = J_1$, $a'_{22} = 0$, а во втором $a'_{11} = 0$, $a'_{22} = J_1$.

II случай. Если $J_2 = 0$, то линия (2) не является центральной. Так как $J_2 = a'_{11}a'_{22} = 0$, то один из коэффициентов либо a'_{11}, либо a'_{22} равен нулю. При этом один из корней уравнения $J(\lambda) = 0$ равен нулю, а другой J_1. В результате уравнение (3) принимает вид

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0, \text{ либо } a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0.$$

В первом случае $a'_{11} = J_1$, $a'_{22} = 0$, а во втором $a'_{11} = 0$, $a'_{22} = J_1$.

Рассмотрим первое уравнение. Выполним параллельный перенос системы координат $Ox'y'$ в соответствующую точку O_1, выделяя полный квадрат по переменной x'. В результате уравнение линии относительно новой системы $O_1\bar{x}\bar{y}$ приводится к одному из двух уравнений (в зависимости от значения a'_{23}):

$$J_1\bar{x}^2 + 2\bar{a}_{23}\bar{y} = 0, \qquad (5)$$

$$J_1\bar{x}^2 + \bar{a}_{33} = 0. \qquad (6)$$

Аналогично, для второго уравнения.

Для уравнения (5) инвариант J_3 равен:

$$J_3 = \begin{vmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{a}_{23} \\ 0 & \bar{a}_{23} & 0 \end{vmatrix} = -J_1\bar{a}_{23}^2 \implies \bar{a}_{23} = \pm\sqrt{-\frac{J_3}{J_1}}.$$

Итак, если $J_2 = 0$, $J_3 \neq 0$, то уравнение линии (2) в соответствующей системе координат имеет вид:

$$J_1\bar{x}^2 \pm 2\sqrt{-\frac{J_3}{J_1}}\bar{y} = 0.$$

Для уравнения (5) инвариант J_3 равен:

$$J_3 = \begin{vmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{a}_{23} \\ 0 & \bar{a}_{23} & 0 \end{vmatrix} = -J_1 \bar{a}_{23}^2 \implies \bar{a}_{23} = \pm\sqrt{-\frac{J_3}{J_1}}.$$

Итак, если $J_2 = 0$, $J_3 \neq 0$, то уравнение линии (2) в соответствующей системе координат имеет вид:

$$J_1 \bar{x}^2 \pm 2\sqrt{-\frac{J_3}{J_1}}\bar{y} = 0.$$

Для уравнения (6) инвариант J_3 равен нулю. Но, в этом случае

инвариантом является J_2^*, причем:

$$J_2^* = \begin{vmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & \bar{a}_{33} \end{vmatrix} = J_1 \bar{a}_{33} \implies \bar{a}_{33} = \frac{J_2^*}{J_1}.$$

Таким образом, если $J_2 = 0$, $J_3 = 0$, то уравнение линии (2) в соответствующей системе координат имеет вид:

$$J_1 \bar{x}^2 + \frac{J_2^*}{J_1} = 0.$$

Итак, возможны следующие случаи:

1. если $J_2 \neq 0$, то $\lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 + \dfrac{J_3}{J_2} = 0$;
2. если $J_2 = 0$, $J_3 \neq 0$, то $J_1 \bar{x}^2 \pm 2\sqrt{-\dfrac{J_3}{J_1}}\,\bar{y} = 0$;
3. если $J_2 = 0$, $J_3 = 0$, то $J_1 \bar{x}^2 + \dfrac{J_2^*}{J_1} = 0$.