Поверхностные интегралы

§1. Мера Лебега на поверхностях

Пусть на множестве $E \subset \mathbb{R}^d$ задана вектор-функция φ со значениями в $\mathbb{R}^N$, $N \geq d$, класса $C^{(r)}(E)$, $r \geq 1$, т.е. $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_N)$, $\varphi_j : \ E \longrightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, N$, и каждая функция φ_j имеет все непрерывные частные производные порядка r (условие $\varphi \in C^{(r)}(E)$ также называют гладкостью отображения φ порядка r). Для такой вектор-функции определена матрица Якоби

$$\varphi' = \frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_N)}{\partial(t_1, \ldots, t_d)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_N}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_N}{\partial t_d} \end{pmatrix}.$$

Определение 1.1. *Множество $S \subset \mathbb{R}^N$ называется d-мерной* поверхностью *класса $C^{(r)}$, $r \geq 1$, в $\mathbb{R}^N$, $N \geq d$, если существует открытое связное множество $E \subset \mathbb{R}^d$ и вектор-функция $\varphi \in C^{(r)}(E)$, взаимно однозначно отображающая E на S, и такая, что* $\operatorname{rang} \varphi' = d$ *на E.*

Таким образом, поверхность определяется отображением $\varphi : \ E \longrightarrow S$, которое часто называют параметрическим заданием поверхности. В случае, когда не существенно, какого класса данная поверхность, мы не будем упоминать число r, всегда предполагая при этом, что $r \geq 1$.

Отметим, что на практике в случае $N = d$, как правило, термин "поверхность"не употребляют, вместо этого используют слова "область"или "тело”, а в случае $d = 1$ поверхности называют кривыми. С другой стороны, поверхностями часто называют (например в задачниках) множества в $\mathbb{R}^N$, не являющиеся таковыми в смысле данного определения. Например, часть некоторой поверхности, которая является образом (при отображении φ) замкнутого множества $E_1 \subset E$, или объединение нескольких поверхностей.

В добавление к определению 1.1, условимся считать 0-мерной поверхностью любой не более чем счетный набор точек в $\mathbb{R}^N$.

Пример 1. Пусть $d = 1$, $N = 2$, $E = (0, 3\pi/2)$, $\varphi : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$.
Поскольку $\varphi'(t) = (-\sin t, \cos t)^T$ а функции sin и cos одновременно не обращаются в ноль, $\operatorname{rang} \varphi'(t) = 1$ для всех t. Поэтому данное отображение φ задает одномерную поверхность (кривую), являющуюся частью единичной окружности, заключенной в 1-3-м квадрантах. Если E заменить на $E_1 = (-\pi, \pi/2)$, то получим другую часть окружности. Объединение этих частей покроет всю окружность, но сама окружность не является поверхностью в смысле определения 1.1.

Пример 2. Пусть $d = 1$, $N = 3$, $E = (-\infty, \infty)$, $\varphi : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.
Нетрудно видеть, что матрица φ' постоянна, $\operatorname{rang} \varphi' = 1$, и отображение φ задает кривую в трехмерном пространстве, совпадающую с координатной осью x.

Пример 3. Пусть $d = 2$, $N = 3$, $E = \mathbb{R}^2$, $\varphi : \begin{cases} x = 0 \\ y = u \\ z = v \end{cases}.$ Нетрудно видеть, что матрица φ' постоянна, $\operatorname{rang} \varphi' = 2$, и отображение φ задает двумерную поверхность в трехмерном пространстве, совпадающую с координатной плоскостью yz.

Будем называть отображение f заданное на d-мерной поверхности S в $\mathbb{R}^N$ гладким, если для любой точки $x_0 \in S$ существует d-мерная поверхность S_1, $S_1 \subset S$, $x_0 \in S_1$, и отображение F, определенное и непрерывно дифференцируемое в некоторой N-мерной окрестности точки x_0, такое что $F|_{S_1} = f$. Отображение f, взаимно однозначно отображающее d-мерную поверхность S на d-мерную поверхность T, назовем *диффеоморфизмом*, если f и f^{-1} – гладкие отображения.

Теорема 1.2. *Если вектор-функция $\varphi : E \longrightarrow S$ задает поверхность S, то φ – диффеоморфизм.*

`Доказательство.` По определению поверхности φ является взаимно однозначным отображением и $\varphi \in C^{(1)}(E)$. Пусть $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_N^0) \in S$, положим $t^0 = (t_1^0, \ldots, t_d^0) = \varphi^{-1}(x^0)$. Так как $\operatorname{rang} \varphi'(t^0) = d$, существуют номера $k_1, \ldots, k_d$, такие что

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_{k_1}}{\partial t_1}(t_0) & \ldots & \frac{\partial \varphi_{k_1}}{\partial t_d}(t_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_{k_d}}{\partial t_1}(t_0) & \ldots & \frac{\partial \varphi_{k_d}}{\partial t_d}(t_0). \end{vmatrix} \neq 0.$$

Не умаляя общности, можно считать, что $k_l = l$, $l = 1, \ldots, d$. Для произвольного $x = (x_1, \ldots, x_N)$ условимся обозначать соответствующий d-мерный вектор с координатами $x_1, \ldots, x_d$ через $\widetilde{x}$, в частности, $\widetilde{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_d^0)$. Рассмотрим систему уравнений

$$\varphi_k(t) = u_k, \quad k = 1, \ldots, d,$$

с неизвестными $t_1, \ldots, t_d, u_1, \ldots, u_d$ и разрешим ее относительно $t_1, \ldots, t_d$ в окрестности точки $(t^0, \widetilde{x}^0)$. По теореме о неявной функции существуют $E_\varepsilon \subset E$, $E_\delta \subset \mathbb{R}^d$ – окрестности (кубические) точек t^0, $\widetilde{x}^0$ соответственно, и единственный набор функций

$$t_k^*: \quad E_\delta \longrightarrow (t_k^0 - \varepsilon, t_k^0 + \varepsilon), \quad k = 1, \ldots, d,$$

таких что $t_k^*(\widetilde{x}^0) = t_k^0$ и $\varphi_k(t_1^*(u), \ldots, t_d^*(u)) = u_k$ для всех $u \in E_\delta$, причем эти функции непрерывно дифференцируемы. Положим $S_1 = \varphi(t^*(E_\delta))$. Если $x \in S_1$, то $x = \varphi(t^*(u))$, $u \in E_\delta$, что влечет $x_k = \varphi_k(t_1^*(u), \ldots, t_d^*(u)) = u_k$ для всех $k = 1, \ldots, d$, т.е. $\widetilde{x}^0 = u$. Таким образом, если $x \in S_1$, то $x = \varphi(t^*(\widetilde{x}))$, а значит $\varphi^{-1}(x) = t^*(\widetilde{x})$. Осталось заметить, $\psi(x) := t^*(\widetilde{x})$ непрерывно дифференцируема в некоторой N-мерной окрестности точки x^0, поскольку от переменных x_k, $k = d+1, \ldots, N$, она не зависят, а непрерывная дифференцируемость функций t_k^*, $k = 1, \ldots, d$, установлена, и $\psi|_{S_1} = \varphi^{-1}$. $\Diamond$

Пусть d-мерная поверхность S задана вектор-функцией $\varphi: \ E \longrightarrow S$. Обозначим σ-алгебру измеримых по Лебегу множеств в $\mathbb{R}^d$ через $\mathfrak{A}(\mathbb{R}^d)$ и введем совокупность подмножеств множества S

$$\mathfrak{A}(S) := \{e \subset S: \quad \varphi^{-1}(e) \in \mathfrak{A}(\mathbb{R}^d)\}.$$

Предложение 1.3. *Совокупность $\mathfrak{A}(S)$ является σ-алгеброй.*

`Доказательство.` Пусть дан не более чем счетный набор множеств $e_n \in \mathfrak{A}(S)$, тогда $\varphi^{-1}(e_n) \in \mathfrak{A}(\mathbb{R}^d)$, а значит и объединение этих множеств измеримо (поскольку $\mathfrak{A}(\mathbb{R}^d)$ является σ-алгеброй). Равенство

$$\varphi^{-1}\left(\bigcup_n e_n\right) = \bigcup_n \varphi^{-1}(e_n),$$

влечет $\bigcup\limits_n e_n \in \mathfrak{A}(S)$. Аналогично, используя равенство

$$\varphi^{-1}(S \setminus e) = \varphi^{-1}(S) \setminus \varphi^{-1}(e),$$

устанавливаем, что если $e \in \mathfrak{A}(S)$, то $S \setminus e \in \mathfrak{A}(S)$. $\Diamond$

Построенная σ-алгебра формально зависит от φ, ниже будет показано, что на самом деле этой зависимости нет.

Далее нам будет удобно использовать для квадратных матриц следующие обозначения

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =: \{a_{kl}\}$$

Рассмотрим матрицу Грама [1] вектор-функции φ

$$G_\varphi = (\varphi')^T \cdot \varphi' = \left\{ \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_k}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_l} \right\rangle \right\}, \quad \text{где} \quad \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_k}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_l} \right\rangle = \sum_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_l}.$$

Из алгебры известно, что определитель матрицы Грама неотрицателен и обращается в ноль только в случае, когда векторы $\frac{\partial \varphi}{\partial t_k}$, $k = 1, \dots, d$, линейно зависимы. Поскольку $\operatorname{rang} \varphi' = d$ на E, векторы $\frac{\partial \varphi}{\partial t_k}$, $k = 1, \dots, d$, линейно независимы, и значит определитель матрицы Грама вектор-функции φ строго положителен на E.

Определим на σ-алгебре $\mathfrak{A}(S)$ функцию множеств, сопоставляющую каждому $e \in \mathfrak{A}(S)$ значение

$$s\, e = \int\limits_{\varphi^{-1}(e)} \sqrt{\det G_\varphi}\, d\mu, \tag{1}$$

[1] Иорген Грам (1850-1916) – датский математик.

где $\mu = \mu_d$ – мера Лебега в $\mathbb{R}^d$. Отметим, что этот интеграл имеет смысл, так как множество $\varphi^{-1}(e)$ измеримо в $\mathbb{R}^d$, а подинтегральная функция непрерывна и положительна.

Предложение 1.4. *Функция множеств s, определенная равенством (1), является полной σ-конечной мерой в S.*

`Доказательство.` Проверим счетную аддитивность s. Пусть дан не более чем счетный набор попарно дизъюнктных множеств $e_n \in \mathfrak{A}(S)$, $e = \bigcup\limits_n e_n$, тогда ввиду взаимной однозначности отображения φ множества $\varphi^{-1}(e_n)$ также попарно дизъюнктны, и

$$\varphi^{-1}(e) = \varphi^{-1}\left(\bigcup_n e_n\right) = \bigcup_n \varphi^{-1}(e_n),$$

поэтому, используя счетную аддитивность интеграла Лебега, имеем

$$s\,e = \int\limits_{\varphi^{-1}(e)} \sqrt{\det G_\varphi}\,d\mu = \sum_n \int\limits_{\varphi^{-1}(e_n)} \sqrt{\det G_\varphi}\,d\mu = \sum_n s\,e_n.$$

Чтобы убедиться в том, что s – мера, осталось проверить свойство $s\,\emptyset = 0$, которое очевидно. Теперь докажем полноту этой меры. Пусть $e \in \mathfrak{A}(S)$, $s\,e = 0$, $e' \subset e$. Тогда

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(e)} \sqrt{\det G_\varphi}\,d\mu = 0,$$

что ввиду положительности подинтегральной функции влечет $\mu(\varphi^{-1}e) = 0$. Поскольку $\varphi^{-1}(e') \subset \varphi^{-1}(e)$, а мера μ полная, отсюда следует, что $\varphi^{-1}(e') \in \mathfrak{A}(\mathbb{R}^d)$ и $\mu\varphi^{-1}(e') = 0$, а значит $e' \in \mathfrak{A}(S)$ и

$$s\,e' = \int\limits_{\varphi^{-1}(e')} \sqrt{\det G_\varphi}\, d\mu = 0.$$

Проверим, что мера s σ-конечна. Пусть $e \in \mathfrak{A}(S)$. Ввиду σ-конечности меры Лебега μ существует не более чем счетный набор измеримых множеств E_k, таких что $E_k \subset E$, $\mu E_k < \infty$ и $\varphi^{-1}(e) = \bigcup\limits_k E_k$. Положим

$$E_{kl} = \{x \in E_k :\ l-1 < \sqrt{\det G_\varphi} \le l\},\ l = 1, 2, \ldots.$$

Очевидно, что $E_{kl} \subset E_k$, $E_k = \bigcup\limits_l E_{kl}$ и

$$s(\varphi(E_{kl})) = \int\limits_{E_{kl}} \sqrt{\det G_\varphi}\, d\mu < \infty.$$

Осталось заметить, что $e = \bigcup\limits_{k,l} \varphi(E_{kl})$. $\Diamond$

Построенная мера формально зависит от φ. Сейчас будет показано, что на самом деле завсимости нет.

Теорема 1.5. *σ-алгебра $\mathfrak{A}(S)$ и мера s, определенная равенством (1), не зависят от способа задания поверхности S.*

`Доказательство.` Пусть d-мерная поверхность S в $\mathbb{R}^N$ задана двумя вектор-функциями: $\varphi :\ E \longrightarrow S$ и $\widetilde{\varphi} :\ \widetilde{E} \longrightarrow S$. По теореме 1.2 оба отображения $\varphi, \widetilde{\varphi}$ являются диффеоморфизмами, а значит и отображение $\Phi := \varphi^{-1} \circ \widetilde{\varphi}$, действующее из $\widetilde{E}$ в E, – тоже диффеоморфизм, т.е. оба отображения Φ, Φ^{-1} являются гладкими. Поскольку гладкое отображение сохраняет измеримость в $\mathbb{R}^d$, для любого $e \subset S$ множества $\varphi^{-1}(e)$,

$\widetilde{\varphi}^{-1}(e)$ измеримы или не измеримы по Лебегу одновременно. Это означает, что $\mathfrak{A}(S)$ не зависит от φ.

Пусть $e \in \mathfrak{A}(S)$. Заменяя переменную в интеграле, имеем

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(e)} \sqrt{\det G_\varphi}\, d\mu = \int\limits_{\Phi^{-1}\circ\varphi^{-1}(e)} \sqrt{\det G_\varphi \circ \Phi}\, |\det \Phi'|\, d\mu = \int\limits_{\widetilde{\varphi}^{-1}(e)} \sqrt{(\det G_\varphi \circ \Phi)\ \det^2 \Phi'}\, d\mu.$$

Для доказательства теоремы осталось проверить тождество

$$(\det G_\varphi \circ \Phi) \det^2 \Phi' = \det G_{\widetilde{\varphi}}. \tag{2}$$

Поскольку $\widetilde{\varphi} = \varphi \circ \Phi$, имеем

$$G_{\widetilde{\varphi}} = (\widetilde{\varphi}')^T \cdot \widetilde{\varphi}' = ((\varphi' \circ \Phi)\cdot \Phi')^T \cdot ((\varphi' \circ \Phi)\cdot \Phi') = (\Phi')^T \cdot ((\varphi' \circ \Phi)^T \cdot (\varphi' \circ \Phi)) \cdot (\Phi').$$

Отсюда, поскольку матрица Φ' квадратная, следует

$$\det G_{\widetilde{\varphi}} = \det(\Phi')^T \det(\Phi') \det((\varphi' \circ \Phi)^T \cdot (\varphi' \circ \Phi))$$

что с учетом равенства

$$\det\big((\varphi' \circ \Phi)^T \cdot (\varphi' \circ \Phi)\big) = \det(G_\varphi \circ \Phi) = \det G_\varphi \circ \Phi$$

влечет (2). $\lozenge$

Итак, для каждой поверхности S существует мера, определенная равенством (1), которая зависит только от самой поверхности S и не зависит от способа ее задания. Назовем ее *мерой Лебега* на S.

Теперь обсудим геометрический смысл меры Лебега на поверхности. По-прежнему считаем, что поверхность S задана вектор-функцией $\varphi: \ E \longrightarrow S$, $E \subset \mathbb{R}^d$, $S \subset \mathbb{R}^N$. Поскольку множество E открыто, его можно представить в виде объединения попарно дизъюнктных кубических ячеек, соответственно поверхность S разобьется на образы этих ячеек. Пусть Δ– одна из ячеек, $e = \varphi(\Delta)$. Выбрав подходящие системы координат в $\mathbb{R}^d$ и $\mathbb{R}^N$, мы можем считать, что $\Delta = [0, \delta)^d$, $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Если $t \in \Delta$, то по формуле Тейлора $\varphi(t) = Dt + \|t\|\alpha(t)$, где $\alpha(t) \in \mathbb{R}^N$, $\lim\limits_{t\to\mathbf{0}} \alpha(t) = \mathbf{0}$, а D – касательное отображение:

$$D(t) = \varphi'(\mathbf{0}) \cdot t, \quad t \in \mathbb{R}^d.$$

Касательной плоскостью к поверхности S в точке $x = \mathbf{0}$ назовем поверхность, заданную вектор-функцией D.

Покажем, что мера малого участка поверхности близка к объему соответствующей части касательной плоскости (в том смысле, что мала их относительная погрешность). Образом ячейки Δ (при отображении D) будет некоторый косоугольный параллелепипед P. Заметим, что функция $G_D(t)$ постоянна. Обозначим меру Лебега на касательной плоскости через s_D и вычислим значение

$$s_D P = \int\limits_{D^{-1}P} \sqrt{\det G_D}\, d\mu = \int\limits_{\Delta} \sqrt{\det G_D}\, d\mu = C\,\delta^d.$$

Теперь заметим, что $G_D(t) = G_\varphi(\mathbf{0})$ для всех $t \in \mathbb{R}^d$. Ввиду гладкости φ для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что $|\sqrt{\det G_\varphi(t)} - \sqrt{\det G_\varphi(\mathbf{0})}| < \varepsilon$ для всех $t \in \Delta$, и значит

$$|se - s_D P| \le \int\limits_{\Delta} |\sqrt{\det G_D} - \sqrt{\det G_\varphi}|\, d\mu \le \varepsilon\delta^d.$$

Таким образом, относительная погрешность уклонения $s_D P$ от se мала. С другой стороны, по теореме 1.5 величина $s_D P$ не зависит от способа задания поверхности, и мы можем задать касательную плоскость с помощью вектор-функции $\widetilde{D}$:

$$\widetilde{D}_k(t) = t_k, \quad k = 1, \ldots, d; \quad \widetilde{D}_k(t) = 0, \quad k = d+1, \ldots, N.$$

Ясно, что $G_{\widetilde{D}}$ – единичная матрица, и $\widetilde{D}^{-1}(P) = P$, поэтому

$$s_D P = \int\limits_P d\mu = \mu P.$$

Поэтому естественно истолковывать меру s множества $e \subset S$ как его объем (площадь).

Определив меру на поверхности, мы получили соответствующий набор измеримых относительно этой меры функций, заданных на поверхности или на какой-то ее части.

Предложение 1.6. *Пусть d-мерная поверхность S задана вектор-функцией $\varphi: \ E \longrightarrow S$, $e \in \mathfrak{A}(S)$. Функция f измерима на e тогда и только тогда, когда функция $f \circ \varphi$ измерима на $\varphi^{-1}(e)$.*

`Доказательство.` Доказываемое утверждение следует из равенства

$$\{x \in e : \ \ f(x) \geq a\} = \{x = \varphi(t) : \ \ t \in \varphi^{-1}(e), f(\varphi(t)) \geq a\} = \varphi\{t : \ \ t \in \varphi^{-1}(e), (f \circ \varphi)(t) \geq a\}. \Diamond$$

Имея полную меру s на поверхности S, для функции f, заданной на S и измеримой (относительно s), и множества $e \in \mathfrak{A}(S)$ мы можем рассматривать интеграл

$$\int\limits_e f \, ds,$$

определенный в соответствии с общей теорией интеграла Лебега. Такие интегралы называют *поверхностными интегралами первого рода.*

Теорема 1.7. *Пусть d-мерная поверхность S задана вектор-функцией $\varphi: \ E \longrightarrow S$, $e \in \mathfrak{A}(S)$, функция f измерима на e, тогда*

$$\int\limits_e f\,ds = \int\limits_{\varphi^{-1}(e)} f \circ \varphi \sqrt{\det G_\varphi}\,d\mu, \qquad (3)$$

причем интегралы в левой и правой части имеют или не имеют смысла одновременно.

`Доказательство.` 1. Предположим сначала, что функция f суммируема на e.

a) Пусть $f = \chi_{e'}$, $e' \in \mathfrak{A}(S)$, $e' \subset e$, тогда

$$\int\limits_e f\,ds = \int\limits_{e'} ds = s\,e' = \int\limits_{\varphi^{-1}e'} \sqrt{\det G_\varphi}\,d\mu =$$

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(e)} \chi_{\varphi^{-1}(e')} \sqrt{\det G_\varphi}\,d\mu = \int\limits_{\varphi^{-1}(e)} f \circ \varphi \sqrt{\det G_\varphi}\,d\mu.$$

b) Пусть f – простая неотрицательная функция, т.е. существует не более чем счетный набор попарно дизъюнктных множеств $e_n \in \mathfrak{A}(S)$, таких что $e = \bigcup\limits_n e_n$ и $f = \sum\limits_n c_n \chi_{e_n}$, $c_n \geq 0$. Используя доказанное в п. a), мы имеем

$$\int\limits_e f\,ds = \int\limits_e \sum_n c_n \chi_{e_n}\,ds = \sum_n c_n \int\limits_{e_n} \chi_{e_n}\,ds =$$

$$\sum_n c_n \int\limits_{\varphi^{-1}(e_n)} \chi_{e_n} \circ \varphi \sqrt{\det G_\varphi}\,d\mu = \int\limits_{\varphi^{-1}(e)} f \circ \varphi \sqrt{\det G_\varphi}\,d\mu.$$

В этой цепочки равенств мы могли вынести знак суммы из под интеграла в силу теоремы Лебега (функция f суммируема и неотрицательна, и поэтому является мажорантой для частичных сумм ряда), внесение знака суммы под интеграл оправдано следствием к теореме Леви.

c) Пусть $f \geq 0$. В этом случае существует последовательность простых функций f_n, таких что $f_n \leq f_{n+1} \leq f$, $f_n \geq 0$, $f_n \to f$ почти везде на e. Используя доказанное в п. b), мы имеем

$$\int\limits_e f\,ds = \int\limits_e \lim_{n\to\infty} f_n\,ds = \lim_{n\to\infty}\int\limits_e f_n\,ds =$$

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\varphi^{-1}(e)} f_n\circ\varphi\sqrt{\det G_\varphi}\,d\mu = \int\limits_{\varphi^{-1}(e)} f\circ\varphi\sqrt{\det G_\varphi}\,d\mu.$$

В этой цепочке равенств мы могли вынести знак предела из под интеграла в силу первой теоремы Леви, внесение знака предела под интеграл оправдано второй теоремой Леви.

d) Произвольную суммируемую на e функцию представим в виде $f = f_+ - f_-$. Используя доказанное в п. c) для функций f_+, f_-, приняв во внимание, что $f_\pm\circ\varphi = (f\circ\varphi)_\pm$, получим (3).

2. Теперь предположим, что функция f не суммируема на e.

a) Пусть $f \geq 0$. В этом случае для любого $n\in\mathbb{N}$ существует множество конечной меры e_n, $e_n\subset e$, на котором функция f ограничена (и стало быть суммируема), и

$$\int\limits_{e_n} f\,ds > n.$$

В силу уже доказанного для суммируемых функций равенства (3) отсюда следует, что

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(e_n)} f \circ \varphi \sqrt{\det G_\varphi}\, d\mu > n.$$

Это означает, что интеграл в правой части (3) равен бесконечности.

b) Пусть интеграл в левой части (3) равен бесконечности. В этом случае конечен один и только один из двух интегралов

$$\int\limits_e f_+\, ds, \quad \int\limits_e f_-\, ds. \tag{4}$$

Используя доказанное в пп. 1c), 2a) для функций f_+, f_-, устанавливаем, что интеграл в правой части (3) тоже равен бесконечности.

c) Пусть интеграл в левой части (3) не имеет смысла. В этом случае оба интеграла (4) бесконечны. Используя доказанное в п. 2a) для функций f_+, f_-, устанавливаем, что интеграл в правой части (3) тоже не имеет смысла.

3. Для доказательства теоремы осталось заметить, что из пп. 1d), 2b), 2c) от противного следует, что интеграл в правой части (3) имеет смысл тогда и только тогда, когда имеет смысл интеграл в левой части. $\Diamond$

§2. Мера Лебега на многообразиях

Определение 2.1. *Множество $M \subset \mathbb{R}^N$ называется d-мерным* многообразием (без края) *в $\mathbb{R}^N$, $N \geq d$, класса $C^{(r)}$, $r \geq 1$, если оно является объединением не более чем счетного набора d-мерных поверхностей класса $C^{(r)}$ и обладает* *свойством $\mathcal{M}$: для любой d-мерной поверхности $S \subset M$ и для любого $x^0 \in S$ существует такое $\varepsilon > 0$, что*

$$M \cap \{x \in \mathbb{R}^N : \ \rho(x, x^0) < \varepsilon\} \subset S.$$

Пример 1. Пусть одномерные поверхности S_1, S_2 заданы соответственно вектор-функциями $\varphi_j : \ E_j \longrightarrow S_j$, $j = 1, 2$, $E_1 = (0, 3\pi/2)$, $E_2 = (-\pi, \pi/2)$, $\varphi_1 = \varphi_2 : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$.
Уже обсуждалось, что объединением этих поверхностей будет окружность, которая сама не является поверхностью. Ясно, что свойство $\mathcal{M}$ выполнено, и, таким образом, окружность является многообразием.

Пример 2. Положим $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ -1 < x_1 < 1, x_2 = 0\}$, $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ -1 < x_2 < 1, x_1 = 0\}$. Ясно, что S_1, S_2 – одномерные поверхности, но их объединение не будет многообразием, так как свойство $\mathcal{M}$ не выполняется при $x^0 = \mathbf{0}$.

Лемма 2.2. *Пусть M – d-мерное многообразие , S, S' – d-мерные поверхности , $S, S' \subset M$, $S \cap S' \neq \emptyset$. Тогда $S \cap S'$ – d-мерная поверхность, $S \cap S' \in \mathfrak{A}(S)$.*

`Доказательство.` Пусть поверхность S задана вектор-функцией $\varphi : \ E \longrightarrow S$. Покажем, что множество $\widetilde{E} := \varphi^{-1}(S \cap S')$ открыто в $\mathbb{R}^d$. Возьмем произвольную точку $t^0 \in \widetilde{E}$ и положим $x^0 = \varphi(t^0)$. По свойству $\mathcal{M}$ существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$M \cap \{x \in \mathbb{R}^N : \ \rho(x, x^0) < \varepsilon\} \subset S'.$$

Поскольку множество E открытое, а отображение φ гладкое, существует окрестность точки t^0, которая целиком содержится в E, а ее образ попадет в ε-окрестность точки x^0. Значит образ этой окрестности содержится в $S \cap S'$, что и доказывает открытость $\widetilde{E}$. Отсюда по определению поверхности и $\mathfrak{A}(S)$ следуют оба утверждения леммы. $\diamondsuit$

Следствие 2.3. *Если в условиях леммы 2.2* $e \subset S \cap S'$, *то* $e \in \mathfrak{A}(S)$ *тогда и только тогда, когда* $e \in \mathfrak{A}(S')$, *и имеет место равенство* $s\,e = s'\,e$, *где* $s,\ s'$ *– меры Лебега соответственно на поверхностях* S, S'.

`Доказательство.` Из доказательства леммы 2.2 ясно, что поверхность $S \cap S'$ может быть задана сужением вектор-функции φ, задающей S, на $\varphi^{-1}(S \cap S')$. Отсюда ясно, что условия $e \in \mathfrak{A}(S)$ и $e \in \mathfrak{A}(S \cap S')$ равносильны. Точно так же устанавливаем, что $e \in \mathfrak{A}(S')$ равносильно $e \in \mathfrak{A}(S \cap S')$. Из тех же рассуждений, учитывая, что значение меры Лебега множества e на поверхности $S \cap S'$ не зависит от выбора способа задания поверхности, приходим к выводу, что оно совпадает и с $s\,e$, и с $s'\,e$.$\diamondsuit$

Теорема 2.4. *Пусть* M *–* d*-мерное многообразие,*

$$M = \bigcup_n S_n, \tag{5}$$

где $S_n,\ n \in \mathbb{N}$, *–* d*-мерные поверхности (не обязательно различные),*

$$\mathfrak{A}(M) := \left\{ e \subset M :\ e = \mathop{\cup}_n e_n,\ e_n \in \mathfrak{A}(S_n) \right\}. \tag{6}$$

Тогда совокупность множеств $\mathfrak{A}(M)$ *является* σ*-алгеброй и не зависит от выбора представления (5).*

`Доказательство.` В первую очередь отметим, что $S_n \in \mathfrak{A}(S_n)$, поэтому из (5) следует $M \in \mathfrak{A}(M)$. Пусть $e = \mathop{\cup}_k e_k$, $e_k \in \mathfrak{A}(M)$, тогда $e_k = \underset{n}{\cup} e_{nk}$, $e_{nk} \in \mathfrak{A}(S_n)$, и значит $e = \underset{n}{\cup} e'_n$, $e'_n = \underset{k}{\cup} e_{nk}$, $e'_n \in \mathfrak{A}(S_n)$, что означает $e \in \mathfrak{A}(M)$. Теперь предположим, что $e \in \mathfrak{A}(M)$, $e = \underset{k}{\cup} e_k$, $e_k \in \mathfrak{A}(S_k)$, тогда

$$M \setminus e = \bigcup_n (S_n \setminus e) = \bigcup_n \bigcap_k (S_n \setminus e_k),$$
$$S_n \setminus e_k = (S_n \setminus (S_k \cap S_n)) \cup ((S_n \cap S_k) \setminus e_k).$$

По лемме 2.2 $S_n \setminus (S_k \cap S_n) \in \mathfrak{A}(S_n)$, $(S_n \cap S_k) \setminus e_k \in \mathfrak{A}(S_k)$, но тогда $(S_n \cap S_k) \setminus e_k \in \mathfrak{A}(S_n)$ ввиду следствия 2.3, а значит $S_n \setminus e_k \in \mathfrak{A}(S_n)$ для любого k, что влечет $M \setminus e \in \mathfrak{A}(M)$. Мы доказали, что $\mathfrak{A}(M)$ – σ-алгебра.

Теперь предположим, что $M = \underset{k}{\cup} S'_k$, где S'_k, $k \in \mathbb{N}$, – d-мерные поверхности. Покажем, что если

$$e = \underset{k}{\cup} e'_k,\ e'_k \in \mathfrak{A}(S'_k),$$

то $e \in \mathfrak{A}(M)$. Поскольку $\mathfrak{A}(M)$ – σ-алгебра, достаточно проверить, что $e'_k \in \mathfrak{A}(M)$. Положим $e_{nk} = e'_k \cap S_n = e'_k \cap (S_n \cap S'_k)$. По лемме 2.2 $e_{nk} \in \mathfrak{A}(S'_k)$, но тогда $e_{nk} \in \mathfrak{A}(S_n)$ ввиду следствия 2.3. Осталось заметить, что $e'_k = \underset{n}{\cup} e_{nk}$. $\Diamond$

Лемма 2.5. *Пусть M – d-мерное многообразие, S, S' – d-мерные поверхности , $S, S' \subset M$, $e \in \mathfrak{A}(S)$, $e' \in \mathfrak{A}(S')$, тогда $e \cap e' \in \mathfrak{A}(S)$, $e \setminus e' \in \mathfrak{A}(S)$.*

`Доказательство.` Из леммы 2.2 следует $e \cap (S \cap S') \in \mathfrak{A}(S)$, $e' \cap (S \cap S') \in \mathfrak{A}(S')$, но тогда $e' \cap (S \cap S') \in \mathfrak{A}(S)$ ввиду следствия 2.3, а значит

$$e \cap e' = (e \cap (S \cap S')) \cap (e' \cap (S \cap S')) \in \mathfrak{A}(S).$$

Второе включение следует из равенства $e \setminus e' = e \setminus (e \cap e')$. $\Diamond$

Следствие 2.6. *Пусть d-мерное многообразие M представимо в виде (5), тогда для любого множества $e \in \mathfrak{A}(M)$ имеет место разложение*

$$e = \underset{n}{\cup} e_n, \ e_n \in \mathfrak{A}(S_n), \quad e_n \cap e_k = \emptyset \text{ при } n \neq k. \tag{7}$$

`Доказательство.` По определению σ-алгебры $\mathfrak{A}(M)$ существует набор множеств $e'_n \in \mathfrak{A}(S_n)$, $n \in \mathbb{N}$, таких что $e = \underset{n}{\cup} e'_n$. Положив $e_1 = e'_1$, $e_2 = e'_2 \setminus e'_1$, $e_3 = (e'_3 \setminus e'_2) \setminus e'_1$ и т.д., ввиду леммы 2.5, получим требуемые множества e_n, $n \in \mathbb{N}$. $\Diamond$

Теорема 2.7. *Пусть d-мерное многообразие M представимо в виде (5), множество $e \in \mathfrak{A}(M)$ представимо в виде (7),*

$$s\,e := \sum_n s_n e_n, \tag{8}$$

где s_n – мера Лебега на S_n. Тогда $s\,e$ не зависит от выбора набора множеств e_n в (7) и набора поверхностей S_n в (5), а определенная таким образом на $\mathfrak{A}(M)$ функция множеств s является полной мерой.

`Доказательство.` Рассмотрим другое представление многообразия: $M = \underset{k}{\cup} S'_k$ и другое представление множества e:

$$e = \underset{k}{\cup} e'_k, \ e'_k \in \mathfrak{A}(S'_k), \quad e'_n \cap e'_k = \emptyset \text{ при } n \neq k.$$

Положим $e_{nk} = e_n \cap e'_k$. Пусть s'_n – мера Лебега на поверхности S'_n. Из очевидных равенств $e_n = \underset{k}{\cup} e_{nk}$, $e'_k = \underset{n}{\cup} e_{nk}$, принимая во внимание лемму 2.5 и счетную аддитивность мер s_n s'_n, получим

$$s\,e = \sum_n s_n e_n = \sum_n \sum_k s_n e_{nk} = \sum_k \sum_n s'_k e_{nk} = \sum_k s'_k e'_k.$$

Для проверки счетной аддитивности функции множеств s рассмотрим набор попарно дизъюнктных множеств $e'_n \in \mathfrak{A}(M)$, и пусть для e'_n представление (7) имеет вид

$$e'_n = \bigcup_k e'_{nk}, \ \ e'_{nk} \in \mathfrak{A}(S_k), \quad e'_{nk} \cap e'_{nl} = \emptyset \text{ при } l \neq k,$$

тогда

$$\sum_n s\, e'_n = \sum_n \sum_k s_k\, e'_{nk} = \sum_k s_k\, \left(\bigcup_n e'_{nk}\right).$$

Ясно, что множества $e_k := \bigcup\limits_n e'_{nk}$ попарно дизъюнктны, $e_k \in \mathfrak{A}(S_k)$ и $e = \bigcup\limits_k e_k$, откуда следует, что $\sum\limits_k s\, e_k = s\, e$.

Свойство $s\,\emptyset = 0$ и полнота меры очевидны. $\Diamond$

Имея полную меру s на многообразии M, для множества $e \in \mathfrak{A}(M)$ и функции f, заданной и измеримой на e (относительно s), мы можем рассматривать интеграл

$$\int\limits_e f\, ds,$$

определенный в соответствии с общей теорией интеграла Лебега. Такие интегралы тоже будем называть *поверхностными интегралами первого рода.*

§3. Дифференциальные формы

Пусть $N \in \mathbb{N}$, $d+1 \in \mathbb{N}$, введем множество $\mathcal{I}_d$ векторов $i = (i_1, \ldots, i_d) \in \mathbb{R}^d$, $i_k \in \{1, \ldots, N\}$, $k = 1, \ldots, d$. В случае $d = 0$ считаем, что $\mathcal{I}_d$ – пустое множество.

Будем говорить, что функция f, определенная на произвольном множестве $U \subset \mathbb{R}^N$, принадлежит классу $C^{(r)}$, $r \geq 1$, если она задана на некотором открытом множестве $U' \subset \mathbb{R}^N$, содержащем U, и имеет на нем все непрерывные частные производные порядка r. При этом для нас существенны лишь значения функции и ее производных на U. Таким образом, можно отождествить две различные на U' функции класса $C^{(r)}$, у которых на U совпадают значения самих функций и всех их частных производных до порядка r включительно. Будем говорить, что функция f, определенная на множестве $U \subset \mathbb{R}^N$, принадлежит классу $C^{(0)}$, если она непрерывна на U.

Определение 3.1. *Пусть* $U \subset \mathbb{R}^N$, дифференциальной формой *в* $\mathbb{R}^N$*, заданной на* U*, порядка* d *(или* d *-формой) назовем набор непрерывных на* U *функций* f_i*,* $i \in \mathcal{I}_d$*, (при* $d = 0$ *считаем, что этот набор состоит из единственной функции без индекса). Если все функции, определяющие* d*-форму, принадлежат* $C^{(r)}$ $r \geq 0$*, то будем говорить, что это форма* класса $C^{(r)}$.

Любая d-форма является формой класса $C^{(0)}$. Если речь идет о дифференциальной форме и не уточняется ее класс, то считаем, что это форма класса $C^{(0)}$.

Пока это новое понятие введено чисто формально и не несет содержательного смысла, он появится, когда для дифференциальных форм будут введены различные действия и операции, а также будут постулированы правила, позволяющие отождествлять некоторые формы.

В случае, когда U – измеримое подмножество некоторой поверхности или многообразия, можно расширить понятие дифференциальной формы, потребовав от функций f_i их измеримость вместо непрерывности. Однако, поскольку основной результат будет связан с формами, в которых – f_i гладкие функции, мы ограничимся рассмотрением непрерывных функций.

Определим *сложение дифференциальных форм.* Суммой d-форм ω, ω', определенных соответственно функциями f_i, f'_i, $i \in \mathcal{I}_d$, называется d-форма $\omega + \omega'$, определенная функциями $f_i + f'_i$, $i \in \mathcal{I}_d$. Очевидно, что сложение дифференциальных форм коммутативно и ассоциативно.

Теперь каждую дифференциальную форму можно рассматривать как сумму одночленных форм (определяемых единственной ненулевой функцией).

Для одночленной дифференциальной d-формы ω, определенной функцией f_i, будем использовать обозначение

$$\omega = f_i\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_d}.$$

Тогда произвольная d-форма ω, определенная функциями f_i, $i \in \mathcal{I}_d$, имеет вид

$$\omega = \sum_{i \in \mathcal{I}_d} f_i\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_d}.$$

Если все f_i тождественно равны нулю на U, то будем писать $\omega = 0$. В случае $d = 0$ будем писать $\omega = f$. Далее будет понятно, почему такая форма записи удобна, но одно из удобств отметим сразу. Индекс функции i присутствует и в стоящем после нее дифференциальном выражении, поэтому при обозначении функций разными буквами его можно опускать. При малых размерностях переменные $dx_{i_1}, dx_{i_2}, \ldots$ можно также обозначать разными буквами. Например, дифференциальную форму

$$f_{12}\, dx_1 \wedge dx_2 + f_{23}\, dx_2 \wedge dx_3 + f_{31}\, dx_3 \wedge dx_1, \ (N = 3, d = 2)$$

переобозначив $f_{12} = P, f_{23} = Q, f_{31} = R$, можно переписать в виде

$$P\, dx \wedge dy + Q\, dy \wedge dz + R\, dz \wedge dx. \tag{9}$$

Далее мы не всегда будем уточнять, на каком множестве U задана дифференциальная форма, в частности, если такого уточнения нет для нескольких обсуждаемых форм, то будем считать, что они заданы на одном и том же U.

Две d-формы класса $C^{(r)}$, $r \geq 0$, будем считать равными тогда и только тогда, когда у них равны друг другу одночленные компоненты с одинаковыми номерами, и постулируем следующие правила для одночленных форм:

$$f_i = f_i' \Rightarrow f_i\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_d} = f_i'\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_d}; \quad (10)$$

$$i_k = i_l, l \neq k \Rightarrow f_i\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_d} = 0; \quad (11)$$

$$f_i\, dx_{i_1} \wedge \ldots dx_{i_k} \wedge dx_{i_{k+1}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_d} = (-f_i)\, dx_{i_1} \wedge \ldots dx_{i_{k+1}} \wedge dx_{i_k} \wedge \ldots \wedge dx_{i_d}. \quad (12)$$

Правило (11) говорит, что ненулевыми одночленными дифференциальными формами могут быть лишь те, у которых все координаты номера различны. В частности, при $d > N$ не существует ненулевых дифференциальных форм. По правилу (12), перемена местами двух соседних координат номера равносильна перемене знака у функции, например,

$$P\, dx \wedge dy \wedge dz = -P\, dy \wedge dx \wedge dz = P\, dy \wedge dz \wedge dx.$$

Отметим, что две различные дифференциальные формы класса $C^{(r)}$ могут совпадать как дифференциальные формы класса $C^{(r-1)}$.

При рассмотрении дифференциальных форм, у которых функции f_i измеримые, равенство функций f_i, f_i' в свойстве (10) следует заменить на их эквивалентность.

Определим *умножение дифференциальных форм.* Произведением одночленных d- и k-форм

$$\omega = f_i\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_d},\ \omega' = f_j'\, dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k}$$

называется $(d+k)$-форма

$$(f_i \cdot f'_j)\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_d} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k} =: \omega \wedge \omega'.$$

Чтобы определить произведение произвольных дифференциальных форм постулируем две дистрибутивности:

$$\omega \wedge (\omega_1 + \omega_2) = \omega \wedge \omega_1 + \omega \wedge \omega_2,$$
$$(\omega_1 + \omega_2) \wedge \omega = \omega_1 \wedge \omega + \omega_2 \wedge \omega.$$

На основании этих равенств рекурсивно (по количеству слагаемых в формах) определим произведение произвольных d- и k-форм. В случае умножения 0-формы $\omega' = f$ на d-форму ω их произведение будем записывать в виде $f \cdot \omega$. В частности, если $f \equiv \mathrm{const}$, то это действие можно воспринимать как умножение дифференциальной формы на число. Ясно, что умножение ассоциативно. Коммутативности, вообще говоря, нет, но в случае, когда один из сомножителей является 0-формой, она, очевидно, есть.

Теперь каждую одночленную d-форму можно рассматривать как произведение $(d+1)$-го сомножителя, один из которых – 0-форма, а остальные – 1-формы.

Определим понятие *дифференциала дифференциальной формы*. Для d-формы класса $C^{(1)}$ в $\mathbb{R}^N$

$$\omega = \sum_{i \in \mathcal{I}_d} f_i\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_d},$$

дифференциалом называется $(d+1)$-форма

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_d} \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\, dx_j \right) \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_d} =: d\omega.$$

В случае 0-формы $\omega = f$ мы имеем обычную формулу для дифференциала функции f.

Отметим очевидное свойство дифференциала:

$$d(\omega + \omega') = d\omega + d\omega'. \tag{13}$$

Лемма 3.2. *Пусть ω и ω' – соответственно d- и k-формы класса $C^{(1)}$ в $\mathbb{R}^N$, тогда*

$$d(\omega \wedge \omega') = d\omega \wedge \omega' + (-1)^d \omega \wedge d\omega'.$$

Доказательство. Ясно, что достаточно проверить утверждение для одночленных форм. Пусть

$$\omega = f\,dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_d}, \quad \omega' = g\,dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k}.$$

Положим $\beta = dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_d}$, $\beta' = dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k}$. Из определения дифференциала, используя (12), имеем

$$d(\omega \wedge \omega') = \sum_{l=1}^{N} \frac{\partial (fg)}{\partial x_l}\,dx_l \wedge \beta \wedge \beta' =$$

$$\sum_{l=1}^{N} g\frac{\partial f}{\partial x_l}\,dx_l \wedge \beta \wedge \beta' + (-1)^d \sum_{l=1}^{N} f\frac{\partial g}{\partial x_l}\,\beta \wedge dx_l \wedge \beta' =$$

$$\left(\sum_{l=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_l}\,dx_l \wedge \beta\right) \wedge (g\,\beta') + (-1)^d (f\,\beta) \wedge \left(\sum_{l=1}^{N} \frac{\partial g}{\partial x_l} dx_l \wedge \beta'\right) =$$

$$d\omega \wedge \omega' + (-1)^d \omega \wedge d\omega'.\diamondsuit$$

Предложение 3.3. *Пусть ω – дифференциальная форма класса $C^{(2)}$, тогда*

$$d^2\omega := d(d\omega) = 0.$$

`Доказательство.` Сначала предположим, что ω – 0-форма, $\omega = f$. Тогда, используя (11), (12), имеем

$$d^2\omega = \sum_{l=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k}\, dx_l \wedge dx_k =$$

$$\sum_{k<l} \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k}\, dx_l \wedge dx_k - \sum_{k>l} \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k}\, dx_k \wedge dx_l = 0.$$

Теперь докажем общий случай. Ясно, что достаточно проверить утверждение для одночленных форм. Пусть $\omega = f\beta$ (используем обозначения леммы 3.2). тогда по лемме 3.2

$$d^2\omega = d(df \wedge \beta) = d^2 f \wedge \beta - (df \wedge d\beta).$$

Отсюда из уже доказанного случая и очевидного равенства $d\beta = 0$ получаем $d^2\omega = 0$. $\Diamond$

Пусть $U \subset \mathbb{R}^N$, $V \subset \mathbb{R}^M$, Φ– вектор-функция класса $C^{(1)}$, действующая из U в V, и пусть на V задана d-форма

$$\omega = \sum_{i \in \mathcal{I}_d} f_i\, dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_d}.$$

Положим

$$\omega_\Phi = \sum_{i \in \mathcal{I}_d} f_i \circ \Phi\, d\Phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\Phi_{i_d}.$$

Подставив в правую часть равенства $d\Phi_{i_k} = \sum\limits_{j=1}^{N} \frac{\partial \Phi_{i_k}}{\partial x_j}\, dx_j$, и воспользовавшись дистрибутивностью умножения, после приведения подобных членов (с использованием (11), (12)) мы преобразуем ее к виду

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_d} g_i\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_d},$$

показав тем самым, что ω_Φ – d-форма в $\mathbb{R}^N$, определенная на U. Преобразование $\omega \to \omega_\Phi$ называют *заменой переменной в дифференциальной форме.* Отметим, в 0-форме $\omega = f$ замена переменной означает подстановку, т.е. $\omega_\Phi = \omega \circ \Phi$.

Теорема 3.4. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^N$, $V \subset \mathbb{R}^M$, Φ – вектор-функция класса $C^{(1)}$, $\Phi: \ U \longrightarrow V$, ω и ω' – соответственно d- и k-формы в $\mathbb{R}^M$, заданные на V. Тогда*

(i) $(\omega \wedge \omega')_\Phi = \omega_\Phi \wedge \omega'_\Phi$,

(ii) если $k = d$, то $(\omega + \omega')_\Phi = \omega_\Phi + \omega'_\Phi$,

(iii) если ω класса $C^{(1)}$, а Φ класса $C^{(2)}$, то $d(\omega_\Phi) = (d\omega)_\Phi$.

`Доказательство.` Утверждение (ii) очевидно, а из него вместе с дистрибутивностью умножения и (13) следует, что остальные утверждения достаточно проверить для одночленных форм. Пусть

$$\omega = f\, dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_d}, \ \ \omega' = g\, dy_{j_1} \wedge \ldots \wedge dy_{j_k},$$

тогда

$$(\omega \wedge \omega')_\Phi = (fg) \circ \Phi\, d\Phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\Phi_{i_d} \wedge d\Phi_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\Phi_{j_k} =$$
$$(f \circ \Phi\, d\Phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\Phi_{i_d}) \wedge (g \circ \Phi\, d\Phi_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\Phi_{j_k}) = \omega_\Phi \wedge \omega'_\Phi.$$

Осталось проверить (iii). Сначала предположим, что ω – 0-форма, $\omega = f$. Тогда

$$d(\omega_\Phi) = d(f \circ \Phi) = \sum_{l=1}^{N} \frac{\partial (f \circ \Phi)}{\partial x_l}\, dx_l =$$
$$\sum_{l=1}^{N} \sum_{k=1}^{M} \left(\frac{\partial f}{\partial y_k} \circ \Phi \right) \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_l}\, dx_l = \sum_{k=1}^{M} \left(\frac{\partial f}{\partial y_k} \circ \Phi \right) \sum_{l=1}^{N} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_l}\, dx_l =$$
$$\sum_{k=1}^{M} \left(\frac{\partial f}{\partial y_k} \circ \Phi \right) d\Phi_k = \left(\sum_{k=1}^{M} \frac{\partial f}{\partial y_k}\, dy_k \right)_\Phi = (d\omega)_\Phi.$$

В общем случае из уже доказанного для 0-форм, леммы 3.2 и утверждения (i) следует

$$(d\omega)_\Phi = (df)_\Phi \wedge (dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_d})_\Phi =$$
$$d(f \circ \Phi) \wedge (d\Phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\Phi_{i_d}) = d(\omega_\Phi) - (f \circ \Phi)\, d(d\Phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\Phi_{i_d}).$$

С другой стороны, опять используя лемму 3.2 и предложение 3.3, имеем

$$d(d\Phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\Phi_{i_d}) = d^2\Phi_{i_1} \wedge (d\Phi_{i_2} \wedge \ldots \wedge d\Phi_{i_d}) -$$
$$d\Phi_{i_1} \wedge d(d\Phi_{i_2} \wedge \ldots \wedge d\Phi_{i_d}) = -d\Phi_{i_1} \wedge d(d\Phi_{i_2} \wedge \ldots \wedge d\Phi_{i_d}) =$$
$$\ldots = (-1)^{d-1}(d\Phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\Phi_{i_{d-1}}) \wedge d^2\Phi_{i_d} = 0.\Diamond$$

Теорема 3.5. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^N$, $V \subset \mathbb{R}^M$, $W \subset \mathbb{R}^L$, Φ, Ψ – вектор-функции класса $C^{(1)}$, $\Phi : \; U \longrightarrow V$, $\Psi : \; V \longrightarrow W$, ω – d-форма в $\mathbb{R}^L$, заданная на W. Тогда*

$$(\omega_\Psi)_\Phi = \omega_{\Psi\circ\Phi}.$$

Доказательство. Ввиду свойства (ii) теоремы 3.4 имеют место равенства

$$\begin{aligned}((\omega + \omega')_\Psi)_\Phi &= (\omega_\Psi + \omega'_\Psi)_\Phi = (\omega_\Psi)_\Phi + (\omega'_\Psi)_\Phi,\\ (\omega + \omega')_{\Psi\circ\Phi} &= \omega_{\Psi\circ\Phi} + \omega'_{\Psi\circ\Phi},\end{aligned}$$

поэтому утверждение теоремы достаточно доказать для одночленной формы

$$\omega = f\, dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_d}.$$

Из свойства (i) теоремы 3.4 следует

$$\begin{aligned}((\omega \wedge \omega')_\Psi)_\Phi &= (\omega_\Psi \wedge \omega'_\Psi)_\Phi = (\omega_\Psi)_\Phi \wedge (\omega'_\Psi)_\Phi,\\ (\omega \wedge \omega')_{\Psi\circ\Phi} &= \omega_{\Psi\circ\Phi} \wedge \omega'_{\Psi\circ\Phi},\end{aligned}$$

поэтому достаточно ограничиться рассмотрением форм только с одним сомножителем, т.е. рассмотреть два случая: ω – 0-форма и $\omega = dz_j$. В первом случае

$$(\omega_\Psi)_\Phi = (\omega \circ \Psi)_\Phi = (\omega \circ \Psi) \circ \Phi = \omega \circ \Psi \circ \Phi = \omega_{\Psi\circ\Phi}.$$

Во втором случае имеем

$$(\omega_\Psi)_\Phi = (d\Psi_j)_\Phi = \left(\sum_{l=1}^{M} \frac{\partial \Psi_j}{\partial y_l}\, dy_l\right)_\Phi = \sum_{l=1}^{M} \frac{\partial \Psi_j}{\partial y_l} \circ \Phi \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \Phi_l}{\partial x_k} dx_k.$$

С другой стороны,

$$\omega_{\Psi\circ\Phi} = d((\Psi \circ \Phi)_j) = d(\Psi_j \circ \Phi) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial(\Psi_j \circ \Phi)}{\partial x_k} dx_k =$$

$$\sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{l=1}^{M} \frac{\partial \Psi_j}{\partial y_l} \circ \Phi\, \frac{\partial \Phi_l}{\partial x_k}\right) dx_k = \sum_{l=1}^{M} \frac{\partial \Psi_j}{\partial y_l} \circ \Phi \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \Phi_l}{\partial x_k} dx_k.\Diamond$$

Следствие 3.6. *Если d-форма ω в $\mathbb{R}^N$ определена на k-мерной поверхности S, и $k < d$, то $\omega = 0$.*

Доказательство. Пусть поверхность S задана вектор-функцией $\varphi: \ E \longrightarrow S$, $E \subset \mathbb{R}^k$. По теореме 3.5

$$\omega = \omega_{\varphi\circ\varphi^{-1}} = (\omega_\varphi)_{\varphi^{-1}}.$$

Отсюда, поскольку ω_φ – d-форма в $\mathbb{R}^k$, а при $k < d$ в $\mathbb{R}^k$ не существует ненулевых форм, получаем требуемое утверждение.$\Diamond$

§4. Поверхностные интегралы второго рода

Пусть вектор-функции $\varphi: \ E \longrightarrow S$, $\widetilde{\varphi}: \ \widetilde{E} \longrightarrow S$ задают поверхность S. Тогда отображение $\Phi := \varphi^{-1} \circ \widetilde{\varphi}$, действующее из $\widetilde{E}$ в E, – диффеоморфизм (см. теорему 1.5), и значит

$\det \Phi' \neq 0$. Будем говорить, что отображения φ и $\widetilde{\varphi}$ *эквивалентны* , если $\det \Phi' > 0$. Зафиксируем какую-нибудь вектор-функцию, задающую поверхность, и рассмотрим класс всех эквивалентных ей вектор-функций. Нетрудно видеть, что все вектор-функции из этого класса эквивалентны друг другу, и все вектор-функции, не попавшие в этот класс тоже эквивалентны друг другу. Таким образом, множество всех вектор-функций φ, задающих поверхность S, можно разбить на два класса смежности.

Определение 4.1. *Класс всех эквивалентных друг другу вектор-функций $\varphi : E \longrightarrow S$, задающих поверхность S, называется* ориентацией *поверхности. Упорядоченную пару, состоящую из поверхности и ее ориентации, назовем* ориентированной поверхностью.

Понятие ориентированности можно распространить и на подмножества ориентированной поверхности S, так как любое множество $e \subset S$, можно задать любой вектор-функцией $\varphi : E \longrightarrow S$, задающей S. Поэтому автоматически такое множество мы будем считать ориентированным, понимая под этим упорядоченную пару, состоящую из множества и ориентации поверхности. Будем также говорить, что ориентация множества $e \subset S$ индуцирована ориентацией поверхности S. Если e, e' –ориентированные подмножества поверхности S, то они могут иметь одинаковую ориентацию или различные (противоположные) ориентации в зависимости от того, индуцированы их ориентации одной ориентацией S или разными.

Определение 4.2. *Пусть S– d -мерная ориентированная поверхность в $\mathbb{R}^N$, заданная вектор-функцией $\varphi : E \longrightarrow S$, $e \in \mathfrak{A}(S)$ – множество, ориентация которого индуцирована* *ориентацией поверхности* S*.* Интегралом по e от дифференциальной формы*, заданной на* e*,*

$$\omega = \sum_{i \in \mathcal{I}_d} f_i \, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_d}$$

(или поверхностным интегралом второго рода*) называется число*

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(e)} \sum_{i \in \mathcal{I}_d} f_i \circ \varphi \, \det \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_d})}{\partial(t_1, \ldots, t_d)} \, d\mu =: \int\limits_e \omega. \qquad (14)$$

Теорема 4.3. *Поверхностный интеграл второго рода не зависит от способа задания ориентированной поверхности.*

`Доказательство.` Ясно, что утверждение теоремы достаточно проверить для одночленных дифференциальных форм. Пусть вектор-функции $\varphi : \ E \longrightarrow S$, $\widetilde{\varphi} : \ \widetilde{E} \longrightarrow S$ задают ориентированную поверхность S . Тогда отображение $\Phi := \varphi^{-1} \circ \widetilde{\varphi}$, действует из $\widetilde{E}$ в E, и $\det \Phi' > 0$. Заменяя переменную в интеграле, имеем

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(e)} f_i \circ \varphi \, \det \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_d})}{\partial(t_1, \ldots, t_d)} \, d\mu =$$

$$\int\limits_{(\Phi^{-1} \circ \varphi^{-1})(e)} f_i \circ \varphi \circ \Phi \ \det \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_d})}{\partial(t_1, \ldots, t_d)} \circ \Phi \det \Phi' \, d\mu.$$

Учитывая равенства $\Phi := \varphi^{-1} \circ \widetilde{\varphi}$ и

$$\frac{\partial(\widetilde{\varphi}_{i_1}, \ldots, \widetilde{\varphi}_{i_d})}{\partial(\widetilde{t}_1, \ldots, \widetilde{t}_d)} = \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_d})}{\partial(t_1, \ldots, t_d)} \circ \Phi \cdot \Phi',$$

преобразуем правую часть к виду

$$\int\limits_{\widetilde{\varphi}^{-1}(e)} f_i \circ \widetilde{\varphi} \,\det \frac{\partial(\widetilde{\varphi}_{i_1}, \ldots, \widetilde{\varphi}_{i_d})}{\partial(\widetilde{t}_1, \ldots, \widetilde{t}_d)}\, d\mu.$$

$\Diamond$

Теорема 4.4. *Интегралы от равных дифференциальных форм равны.*

`Доказательство.` Ясно, что достаточно рассмотреть только одночленные формы, и что интегралы от одночленных форм, определяемых равными функциями с одним и тем же индексом, равны. Покажем, что интегралы будут равными и от форм, равных друг другу в соответствии с правилами (11), (12). Рассмотрим дифференциальную форму

$$\omega = f\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_d},$$

у которой $i_k = i_j$, $k \neq j$. Тогда в матрице Якоби

$$\frac{\partial(\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_d})}{\partial(t_1, \ldots, t_d)}$$

две одинаковых строки, следовательно ее определитель равен нулю, а значит и интеграл (14). Пусть теперь дифференциальная форма ω' получена из формы ω перестановкой dx_{i_k} с $dx_{i_{k+1}}$, тогда по (12) $\omega = -\omega'$. Матрица Якоби для ω' получается из матрицы Якоби для ω перестановкой двух соседних строк, поэтому определители этих матриц, а следовательно и соответствующие интегралы (14) будут отличаться друг от друга только знаком, что и означает равенство интегралов от форм ω, $-\omega'$. $\Diamond$

Определение 4.2 можно использовать и при рассмотрении дифференциальных форм, у которых f_i – измеримые на e функции, ясно, что при этом теоремы 4.3, 4.4 остаются в силе.

Пример 1. Пусть $d = 1$, $N = 2$, $\varphi : \ E \longrightarrow S$, $\varphi : \begin{cases} x = \varphi_1(t) \\ y = \varphi_2(t) \end{cases}$, функции P, Q заданы и непрерывны на S (т.е. функции двух переменных x, y), $(\alpha, \beta) \subset E$, $e = \varphi(\alpha, \beta)$, $\omega = P\,dx + Q\,dy$. Тогда

$$\int\limits_e \omega = \int\limits_\alpha^\beta \left(P(\varphi_1(t),\, \varphi_2(t))\varphi_1'(t) + Q(\varphi_1(t),\, \varphi_2(t))\varphi_2'(t)\right)\, dt.$$

Будем обозначать через I_d тождественный оператор в $\mathbb{R}^d$.

Теорема 4.5. *Пусть S – d -мерная ориентированная поверхность в $\mathbb{R}^N$, заданная вектор-функцией $\varphi : \ E \longrightarrow S$, E – d -мерная ориентированная поверхность в $\mathbb{R}^d$, заданная вектор-функцией $I_d : \ E \longrightarrow E$, $e \in \mathfrak{A}(S)$, ω – d-форма в $\mathbb{R}^N$, определенная на e. Тогда*

$$\int\limits_e \omega = \int\limits_{\varphi^{-1}(e)} \omega_\varphi,$$

где ориентации множеств e и $\varphi^{-1}(e)$ индуцированы соответственно ориентированными поверхностями S и E.

`Доказательство.` Ясно, что достаточно доказать утверждение теоремы для одночленных форм. Пусть

$$\omega = f\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_d},$$

тогда

$$\omega_\varphi = f\circ\varphi\, d\varphi_{i_1}\wedge\ldots\wedge d\varphi_{i_d} = \\ f\circ\varphi \left(\sum_{k=1}^{d}\frac{\partial\varphi_{i_1}}{\partial t_k}\,dt_k\right)\wedge\ldots\wedge\left(\sum_{k=1}^{d}\frac{\partial\varphi_{i_d}}{\partial t_k}\,dt_k\right).$$

В правой части стоит d-форма в $\mathbb{R}^d$, используя дистрибутивность, преобразуем ее к виду

$$f\circ\varphi\sum_{k\in\mathcal{I}_d}\frac{\partial\varphi_{i_1}}{\partial t_{k_1}}\cdots\frac{\partial\varphi_{i_d}}{\partial t_{k_d}}\,dt_{k_1}\wedge\ldots\wedge dt_{k_d}.$$

В соответствии с правилом (11) ненулевыми слагаемыми в этой сумме могут быть лишь те, у которых все k_l, $l=1,\ldots,d$, различны, т.е. суммирование идет по всевозможным перестановкам упорядоченного множества $\{1,\ldots,d\}$. Из (12) следует, что

$$dt_{k_1}\wedge\ldots\wedge dt_{k_d} = (-1)^\sigma\,dt_1\wedge\ldots\wedge dt_d,$$

где σ – число инверсий в перестановке $(k_1,\ldots,k_d)$. Отсюда ясно, что

$$\omega_\varphi = f\circ\varphi\ \det\frac{\partial(\varphi_{i_1},\ldots,\varphi_{i_d})}{\partial(t_1,\ldots,t_d)},$$

и следовательно

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(e)}\omega_\varphi = \int\limits_{(I_d^{-1}\circ\varphi^{-1})(e)} f\circ\varphi\circ I_d\ \det\frac{\partial(\varphi_{i_1},\ldots,\varphi_{i_d})}{\partial(t_1,\ldots,t_d)}\circ I_d\,d\mu = \\ \int\limits_{\varphi^{-1}(e)} f\circ\varphi\ \det\frac{\partial(\varphi_{i_1},\ldots,\varphi_{i_d})}{\partial(t_1,\ldots,t_d)}\,d\mu = \int\limits_e\omega.\Diamond$$

Теперь несложно получить формулу замены переменной в поверхностном интеграле второго рода.

Следствие 4.6. *Пусть S – d-мерная ориентированая поверхность в $\mathbb{R}^N$, $e \in \mathfrak{A}(S)$, T – d-мерная ориентированая поверхность в $\mathbb{R}^M$, диффеоморфизм Φ отображает S на T, ω – d-форма в $\mathbb{R}^M$, заданная на $\Phi(e)$. Тогда $\Phi(e) \in \mathfrak{A}(T)$ и*

$$\int\limits_{\Phi(e)} \omega = \pm \int\limits_{e} \omega_\Phi. \tag{15}$$

Доказательство. Пусть S и T соответственно заданы вектор-функциями $\varphi : E \longrightarrow S$ и $\psi : F \longrightarrow T$. Тогда, ввиду теоремы 1.2, φ и ψ – диффеоморфизмы, а значит и отображение $\psi^{-1} \circ \Phi \circ \varphi : E \longrightarrow F$ яляется диффеоморфизмом в $\mathbb{R}^d$. Поскольку ранг произведения двух матриц не превосходит ранга каждой из них, $\operatorname{rang}(\Phi \circ \varphi)' = d$. Таким образом, вектор-функциия $\Phi \circ \varphi : E \longrightarrow T$ задает поверхность T (возможно с ориентацией, противоположной исходной). Отсюда следует, что $\Phi(e) \in \mathfrak{A}(T)$, и, используя теоремы 4.5, 3.5, имеем

$$\int\limits_{e} \omega_\Phi = \int\limits_{\varphi^{-1}(e)} (\omega_\Phi)_\varphi = \int\limits_{\varphi^{-1}(e)} \omega_{\Phi\circ\varphi} = \int\limits_{((\Phi\circ\varphi)^{-1}\circ\Phi)(e)} \omega_{\Phi\circ\varphi} = \int\limits_{\Phi(e)} \omega,$$

где ориентации множеств e и $\Phi(e)$ индуцированы соответствующими заданиями поверхностей $\varphi : E \longrightarrow S$ и $\Phi \circ \varphi : E \longrightarrow T$, которые могут отличается от исходных ориентаций поверхностей S и T. $\Diamond$

Замечание 4.7. *Если в условиях следствия 4.6 ориентации множеств e и Φe индуцированы отображениями $\varphi : E \longrightarrow S$ и $\Phi \circ \varphi : E \longrightarrow T$, то в формуле (15) будет знак плюс.*

§5. Формула Стокса

Стандартным симплексом в $\mathbb{R}^d$ называется множество

$$\Delta_0 = \Delta_0^d := \{x \in \mathbb{R}^d : \ x_k > 0, k = 1, \ldots, d, \ x_1 + \ldots + x_d < 1\}.$$

Вектор $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^d$ и единичные орты $\mathbf{e_k}$, $k = 1, \ldots, d$, пространства $\mathbb{R}^d$ назовем *вершинами* стандартного симплекса. Множества

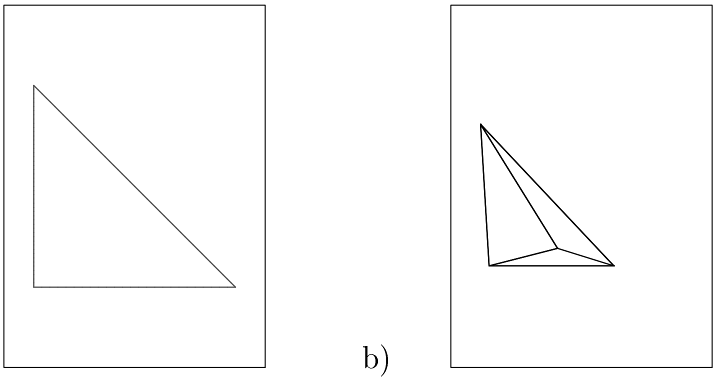
$$\begin{aligned} &\gamma_0 := \{x \in \mathbb{R}^d : \ x_k > 0, k = 1, \ldots, d, \ x_1 + \ldots + x_d = 1\}, \\ &\gamma_l := \{x \in \mathbb{R}^d : \ x_l = 0, \ x_k > 0, k = 1, \ldots, l-1, l+1, \ldots, d, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad x_1 + \ldots + x_d < 1\}, \quad l = 1, \ldots, d. \end{aligned}$$

назовем *гранями стандартного* симплекса. Будем говорить, что вершина $\mathbf{e_l}$ противоположна грани γ_l, $l = 1, \ldots, d$, а остальные вершины прилегают к ней. Грани γ_0 противоположна вершина $\mathbf{0}$, а остальные вершины прилегают к ней.

Рассмотрим вектор-функцию φ, действующую из $\mathbb{R}^d$ в $\mathbb{R}^N$, $d \le N$, определенную равенством $\varphi(t) = a + A \cdot t$, $t \in \mathbb{R}^d$, где $a \in \mathbb{R}^N$, A – матрица размера $N \times d$, $\operatorname{rang} A = d$. Множество $\Delta := \varphi(\Delta_0^d)$ назовем *d-мерным симплексом* в $\mathbb{R}^N$. Образы вершин и граней стандартного симплекса при отображении φ соответственно назовем *вершинами* и *гранями симплекса* Δ.

Предложение 5.1. *Грани d-мерного симплекса являются $(d-1)$-мерными симплексами.*

`Доказательство.` Сначала докажем утверждение для стандартного симплекса. Пусть $\mathbf{e_l}$, $l = 1, \ldots, d$, и $\widetilde{\mathbf{e}}_\mathbf{l}$, $l = 1, \ldots, d-1$, – единичные орты соответственно в пространствах $\mathbb{R}^d$ и $\mathbb{R}^{d-1}$.



a) b)

Рис. 1. a) симплекс Δ_0^2; b) симплекс Δ_0^3.

Положим $\varphi^*_{k,d}(t) = \varphi^*_k(t) = A_k \cdot t$, $t \in \mathbb{R}^{d-1}$, $k = 1, \ldots, d$, где

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

– матрица размера $d \times (d-1)$, у которой в k-й строке стоят все нули, а после вычеркивания k-й строки остается единичная матрица. Нетрудно видеть, что $\varphi^*_k(\widetilde{\mathbf{e}}_\mathbf{l}) = \mathbf{e}_\mathbf{l}$, $l = 1, \ldots, k-1$, и $\varphi^*_k(\widetilde{\mathbf{e}}_\mathbf{l}) = \mathbf{e}_\mathbf{l+1}$, $l = k, \ldots, d-1$, из чего в силу базисности системы $\{\widetilde{\mathbf{e}}_\mathbf{l}\}_\mathbf{l=1}^\mathbf{d-1}$ легко следует равенство $\gamma_k = \varphi^*_k(\Delta_0^{d-1})$. Для $k = 0$ положим $\varphi^*_{0,d}(t) = \varphi^*_0(t) = \mathbf{e}_\mathbf{1} + A_0 \cdot t$, $t \in \mathbb{R}^{d-1}$, где

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & \ldots & -1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

– матрица размера $d \times (d-1)$, у которой все элементы первой строки равны -1, а под первой строкой стоит единичная матрица. Нетрудно видеть, что $\varphi_0^*(\widetilde{\mathbf{e}}_\mathbf{l}) = \mathbf{e_{l+1}}$, $l = 1, \ldots, d-1$, и $\varphi_0^*(\mathbf{0}) = \mathbf{e_1}$, из чего следует $\gamma_0 = \varphi_0^*(\Delta_0^{d-1})$.

Теперь рассмотрим произвольный симплекс, заданный векторфункцией φ, $\varphi(x) = a + A \cdot x$, $\operatorname{rang} A = d$. По определению его грани – это множества $\Gamma_k = \varphi(\gamma_k)$. Ясно, что Γ_k задается отображением $\varphi \circ \varphi_k^* : \ \Delta_0^{d-1} \longrightarrow \Gamma_k$. Осталось проверить, что $\operatorname{rang}(\varphi \circ \varphi_k^*)' = \operatorname{rang}(A \cdot A_k) = d-1$. Для $k = 1, \ldots, d$ это следует из того, что умножение справа на A_k уничтожает k-й столбец. Обозначим через $u_1, \ldots, u_d$ столбцы матрицы A. Нетрудно видеть, что столбцами матричы $A \cdot A_0$ являются векторы $u_2 - u_1, \ldots, u_d - u_1$. Принимая во внимание, что ранг матрицы со столбцами $u_1, u_2 - u_1, \ldots, u_d - u_1$ равен d, устанавливаем, что $\operatorname{rang}(A \cdot A_0) = d - 1$. $\Diamond$

Поскольку стандартный симплекс – открытое множество в $\mathbb{R}^d$, его можно рассматривать как ориентированную d-мерную поверхность в $\mathbb{R}^d$, заданную тождественным отображением $I_d :$ $\Delta_0^d \longrightarrow \Delta_0^d$. Ориентацию стандартного симплекса, определенную таким заданием, назовем *стандартной.* Произвольный d-мерный симплекс в $\mathbb{R}^N$ тоже можно рассматривать как ориентированную поверхность, один из способов ее задания осуществляется отображением φ, посредством которого определялся симплекс. В частности, о гранях симплекса можно говорить как об ориентированных поверхностях. Назовем ориентацию грани γ_k стандартного симплекса *согласованной* со стандартной ориентацией Δ_0^d, если она определена отображением φ_k^* (из предложения 5.1) при четном k, и не определена этим отображением при нечетном k. Ориентацию произвольного симплекса Δ назовем *согласованной* с ориентацией его грани Γ, если существует отображение $\varphi : \ \Delta_0^d \longrightarrow \Delta$, задающее ориентацию Δ, такое что $\Gamma = \varphi(\gamma_k)$ и ориентация Γ определяется вектор-функцией $\varphi \circ \varphi_k^* : \ \Delta_0^{d-1} \longrightarrow \Gamma$ при четном k, и не определена этим отображением при нечетном k. Последнее определение требует проверки корректности, так как согласование ориентации стандартного симплекса и его грани можно теперь понимать как в смысле определения согласованности для стандартного симплекса, так и для произвольного.

Предложение 5.2. *Пусть φ – аффинное преобразование, взаимно однозначно отображающее Δ_0^d на Δ_0^d, $\varphi(\gamma_n) = \gamma_k$. Тогда*

$$\text{sign det}\,\varphi' = (-1)^{n+k}\text{sign det}(\varphi_k^{*-1} \circ \varphi \circ \varphi_n^*)'. \tag{16}$$

Доказательство. a) Сначала предположим, что $k, n \neq 0$, $\varphi(x) = a + A \cdot x$. Из равенства $\varphi(\mathbf{e}_n) = \mathbf{e}_k$ следует, что при $j \neq n$ либо $\varphi(\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_l$, $l \neq k$, либо $\varphi(\mathbf{e}_j) = 0$. Значит $(\varphi(\mathbf{e}_n))_k = 1$, $(\varphi(\mathbf{e}_j))_k = \mathbf{0}$ для всех $j \neq n$. Поэтому в k-й строке матрицы $A = \varphi'$ стоит $\mathbf{e}_n^T$. Умножение матрицы справа на $(\varphi_n^*)' = A_n$ (используем обозначения предложения 5.1) уничтожает n-ый столбец. Поскольку $(\varphi_k^*)^{-1}(\mathbf{e}_j) = \widetilde{\mathbf{e}}_j$ для $j = 1, \ldots, k-1$, $(\varphi_k^*)^{-1}(\mathbf{e}_j) = \widetilde{\mathbf{e}}_{j-1}$ для $j = k+1, \ldots, d$, ясно, что $(\varphi_k^{*-1})' = A_k^T$. Умножение матрицы слева на A_k^T уничтожает k-ую строку. Таким образом, матрица $B = (\varphi_k^{*-1})' \cdot \varphi' \cdot (\varphi_n^*)' = (\varphi_k^{*-1} \circ \varphi \circ \varphi_n^*)'$ получается из A вычеркиванием k-й строки и n-го столбца, на пересечении которых стоит 1. Раскладывая определитель матрицы A по k-ой строке, получаем $\det A = (-1)^{n+k} \det B$.

b) Пусть теперь $k = 0$, $n \neq \mathbf{0}$. В этом случае $\varphi(\mathbf{e}_n) = \mathbf{0}$. Если $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{e}_r$, то $\varphi(x) = \mathbf{e}_r + A \cdot x$, в n-ом столбце матрицы A стоит вектор $-\mathbf{e}_r$, а в других столбцах – векторы $\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_r$.

Положим $\psi(x) = \mathbf{e}_1 + A' \cdot x$, где A' – матрица, полученная из A перестановкой 1-ой и r-ой строк. Нетрудно видеть, что умножение матрицы слева на $(\varphi_0^{*-1})'$ уничтожает первую строку, а все элемены первой строки матрицы A' равны -1, и, повторив рассуждения пункта а), получим

$$\det \psi' = (-1)(-1)^{n+1} \det(\varphi_0^{*-1} \circ \psi \circ \varphi_n^*)'. \tag{17}$$

Поскольку из равенств $\varphi(\mathbf{e}_n) = \mathbf{0}$, $\psi(\mathbf{e}_n) = \mathbf{0}$ следует, что $(\psi^{-1} \circ \varphi)(\mathbf{e}_n) = \mathbf{e}_n$, по уже доказанному в пункте а) имеем

$$\det(\psi^{-1} \circ \varphi)' = \det(\varphi_n^{*-1} \circ (\psi^{-1} \circ \varphi) \circ \varphi_n^*)' = \\ \det((\psi \circ \varphi_n^*)^{-1} \circ (\varphi \circ \varphi_n^*))'.$$

Таким образом эквивалентность функций φ и ψ равносильна эквивалентности функций $\varphi \circ \varphi_n^*$ и $\psi \circ \varphi_n^*$, что вместе с (17) влечет (16).

с) Пусть $k = n = 0$, в этом случае $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $\varphi(\mathbf{e}_l) = \mathbf{e}_{j_l}, l = 1, \ldots, d$, т.е. столбцы матрицы φ' образуют некоторую перестановку векторов $\mathbf{e}_l, j = 1, \ldots, d$. Обозначим через σ число инверсий в перестановке $(j_2, \ldots, j_d)$, тогда

$$\det \varphi' = (-1)^{\sigma + j_1 - 1}. \tag{18}$$

Столбцами матричы $\varphi' \cdot (\varphi_n^*)'$ являются векторы $\mathbf{e}_{j_2} - \mathbf{e}_{j_1}, \ldots,$ $\mathbf{e}_{j_d} - \mathbf{e}_{j_1}$. Поскольку умножение матрицы слева на $(\varphi_0^{*-1})'$ уничтожает первую строку, матрица $B := (\varphi_0^{*-1})'\varphi' \cdot (\varphi_n^*)'$ имеет вид

$$(\tilde{\mathbf{e}}_{j_2} - \tilde{\mathbf{e}}_{j_1}, \ldots, \tilde{\mathbf{e}}_{j_d} - \tilde{\mathbf{e}}_{j_1}),$$

где $\tilde{\mathbf{e}}_k$ – $(d-1)$-мерный вектор, полученный из $\mathbf{e}_k$ вычеркиванием первой координаты. Если $j_1 = 1$. то $B = (\tilde{\mathbf{e}}_{j_2}, \ldots, \tilde{\mathbf{e}}_{j_d})$, и значит

$$\det B = (-1)^\sigma = (-1)^{\sigma + j_1 - 1}.$$

Пусть $j_1 \neq 1$, $j_l = 1$. В $(l-1)$-ом столбце матрицы B единственный ненулевой элемент в строке с номером $j_1 - 1$, который равен -1, поэтому, разложив определитель матрицы B по $(l-1)$-му столбцу, имеем

$$\det B = (-1)(-1)^{j_1+l} \det(\tilde{\tilde{e}}_{j_2}, \ldots \tilde{\tilde{e}}_{j_{l-1}}, \tilde{\tilde{e}}_{j_{l+1}} \ldots \tilde{\tilde{e}}_{j_d}),$$

где $\tilde{\tilde{e}}_{j_k}$ – $(d-2)$-мерный вектор, полученный из $\tilde{e}_{j_k}$ вычеркиванием $(j_1 - 1)$-го элемента. Осталось заметить, что число инверсий в перестановке $(j_2, \ldots j_{l-1}, j_{l+1}, \ldots j_d)$ равно $\sigma - (l-2)$, и значит

$$\det(\tilde{\tilde{e}}_{j_2}, \ldots \tilde{\tilde{e}}_{j_{l-1}}, \tilde{\tilde{e}}_{j_{l+1}} \ldots \tilde{\tilde{e}}_{j_d}) = (-1)^{\sigma - l}, \tag{19}$$

что вместе с (19) и (18) влечет (16).

d) Наконец рассмотрим случай $n = 0$, $k \neq \mathbf{0}$. Отображение φ^{-1} удовлетворяет условиям пункта b), поэтому

$$\begin{aligned} \text{sign} \det \varphi' = \text{sign}\,(\det(\varphi^{-1})') = \\ (-1)^k \text{sign}\,(\det(\varphi_0^{*-1} \circ \varphi^{-1} \circ \varphi_k^*)') = \\ (-1)^k \text{sign} \det(\varphi_k^{*-1} \circ \varphi \circ \varphi_0^*)'. \Diamond \end{aligned}$$

Следствие 5.3. *Пусть ориентированный симплекс Δ в $\mathbb{R}^N$ задан аффинным отображением $\varphi : \Delta_0^d \longrightarrow \Delta$, Γ – его грань, $\gamma_n = \varphi^{-1}(\Gamma)$. Для того, чтобы ориентации Γ и Δ были согласованы, необходимо и достаточно, чтобы ориентация Γ задавалась вектор-функцией $\varphi \circ \varphi_n^* : \Delta_0^{d-1} \longrightarrow \Gamma$ при четном n и не задавалась при нечетном.*

Доказательство. Достаточность следует из определения согласованности. Пусть ориентации Γ и Δ согласованы, тогда существует аффинное отображение $\psi : \Delta_0^d \longrightarrow \Delta$, задающее ориентацию Δ и такое, что ориентация Γ задается вектор-функцией $\psi \circ \varphi_k^* : \ \Delta_0^{d-1} \longrightarrow \Gamma$, если k четно, и не задается ей, если k нечетно. Поскольку φ и ψ задают одну и ту же ориентированную поверхность, $\det(\psi^{-1} \circ \varphi)' > 0$, и по предложению 5.2

$$\begin{gathered}\text{sign } \det((\psi \circ \varphi_k^*)^{-1} \circ (\varphi \circ \varphi_n^*))' = \\ \text{sign } \det(\varphi_k^{*-1} \circ (\psi^{-1} \circ \varphi) \circ \varphi_n^*)' = \\ (-1)^{n+k} \text{sign } \det(\psi^{-1} \circ \varphi)' = (-1)^{n+k}.\end{gathered}$$

Пусть k и n – четные. Тогда вектор-функция $\psi \circ \varphi_k^*$ задает Γ и эквивалентна вектор-функции $\varphi \circ \varphi^*$, а значит $\varphi \circ \varphi^*$ задает Γ. Аналогично, перебирая варианты по четности n и k, убеждаемся в справедливости необходимости. $\Diamond$

Пусть ориентированный симплекс Δ в $\mathbb{R}^N$ задан аффинным отображением $\varphi : \ \Delta_0^d \longrightarrow \Delta$, Γ – его грань с согласованной ориентацией, заданной вектор-функцией $\varphi \circ \varphi^* : \ \Delta_0^{d-1} \longrightarrow \Gamma$, ψ – аффинное отображение из $\mathbb{R}^N$ в $\mathbb{R}^M$, $\widetilde{\Delta} = \psi(\Delta)$, $\widetilde{\Gamma} = \psi(\Gamma)$, тогда ψ индуцирует ориентации симплекса $\widetilde{\Delta}$ и его грани $\widetilde{\Gamma}$, заданные вектор-функциями $\psi \circ \varphi : \ \Delta_0^d \longrightarrow \widetilde{\Delta}$, $\psi \circ \varphi \circ \varphi^* : \Delta_0^{d-1} \longrightarrow \widetilde{\Gamma}$. Пусть $\gamma_k = \varphi^{-1}(\Gamma)$. Ввиду согласованности ориентации симплекса Δ и его грани Γ, по следствию 5.3, отображение φ^* эквивалентно φ_k^* при четном k и не эквивалентно при нечетном. Но по тому же следствию 5.3 отсюда следует, что ориентации $\widetilde{\Delta}$ и $\widetilde{\Gamma}$ согласованы. Таким образом, аффинное отображение *сохраняет согласованность ориентаций симплекса и его гранией.*

Предложение 5.4. *Пусть Δ, $\widetilde{\Delta}$ – d-мерные симплексы в $\mathbb{R}^d$ с одинаковой ориентацией, Γ – их общая грань, вершины симплексов, противолежащие грани Γ, лежат по разные стороны от плоскости этой грани. Тогда ориентация Γ, согласо-*

ванная с ориентацией Δ, противоположна ориентации Γ, согласованной с ориентацией $\widetilde{\Delta}$.

`Доказательство.` Предположим противное: ориентации грани Γ согласованные с ориентациями симплексов Δ, $\widetilde{\Delta}$ совпадают. Выберем декартовы координаты в $\mathbb{R}^d$ так, чтобы начало координат было на плоскости грани Γ, а орт $\mathbf{e}_d$ был ей перпендикулярен. Пусть $a_0, a_1, \ldots, a_d$ – вершины симплекса Δ, занумерованные так, что $a_0, a_1, \ldots, a_{d-1}$ прилегают к Γ. Симплекс $\widetilde{\Delta}$ имеет вершины $a_0, \ldots, a_{d-1}, \widetilde{a}_d$. Пусть A и $\widetilde{A}$ – матрицы, со столбцами соответственно $a_1 - a_0, \ldots, a_{d-1} - a_0, a_d - a_0$ и $a_1 - a_0, \ldots, a_{d-1} - a_0, \widetilde{a}_d - a_0$ (занумерованныеми в том же порядке). Положим $\varphi(x) = a_0 + A \cdot x$, $\widetilde{\varphi}(x) = a_0 + \widetilde{A} \cdot x$. Поскольку $\varphi(\mathbf{e}_j) = a_j$, $\varphi(\mathbf{0}) = a_0$, вектор-функция $\varphi(x)$ задает Δ, аналогично вектор-функция $\widetilde{\varphi}(x)$ задает $\widetilde{\Delta}$. Покажем, что отображения $\varphi \circ \varphi_d^*$, $\widetilde{\varphi} \circ \varphi_d^*$ задают грань Γ. Действительно, пусть $\widetilde{\mathbf{e}}_\mathbf{l}$, $l = 1, \ldots, d-1$, – единичные орты пространства $\mathbb{R}^{d-1}$, тогда $\varphi_d^*(\widetilde{\mathbf{e}}_j) = \mathbf{e}_j$, а значит $(\varphi \circ \varphi_d^*)(\widetilde{\mathbf{e}}_j) = a_j$, $(\widetilde{\varphi} \circ \varphi_d^*)(\widetilde{\mathbf{e}}_j) = a_j$, $1, \ldots, d-1$, $(\varphi \circ \varphi_d^*)(\mathbf{0}) = a_0$, $(\widetilde{\varphi} \circ \varphi_d^*)(\mathbf{0}) = a_0$. Более того, мы установили, что $\varphi \circ \varphi_d^* = \widetilde{\varphi} \circ \varphi_d^*$.

В выбранной системе координат последняя строка матрицы φ' имеет вид $(0, \ldots, 0, \alpha)$, $\alpha \neq 0$. Поскольку матрицы $(\varphi^{-1})'$ и φ' взаимно обратны, последняя строка матрицы $(\varphi^{-1})'$ ортогональна векторам $a_1 - a_0, \ldots, a_{d-1} - a_0$, которые образуют базис координатной плоскости $\{x \in \mathbb{R}^d : \ x_d = 0\}$, и значит она имеет вид $(0, \ldots, 0, \alpha^{-1})$. Отсюда с учетом того факта, что матрицы φ' и $\widetilde{\varphi}'$ отличаются лишь последним столбцом, ясно что матрица $(\varphi^{-1}\circ\widetilde{\varphi})' = (\varphi^{-1})'\cdot\widetilde{\varphi}'$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & * \\ 0 & \dots & 0 & \widetilde{\alpha}/\alpha \end{pmatrix},$$

где $\widetilde{\alpha}$ – последняя координата вектора $\widetilde{a}_d$, знак которой отличается от знака α, так как вершины a_d и $\widetilde{a}_d$ лежат по разные стороны от координатной плоскости $x_d = 0$. Определитель этой матрицы отрицателен, из чего следует, что отображения φ и $\widetilde{\varphi}$ не эквивалентны, но тогда и отображения $\varphi\circ\varphi_d^*, \widetilde{\varphi}\circ\varphi_d^*$ не эквивалентны, что противоречит их равенству. $\Diamond$

Ориентированная d-мерная поверхность Δ в $\mathbb{R}^N$, заданная вектор-функцией $\varphi:\ \Delta_0^d \longrightarrow \Delta$, называется d-мерным *поверхностным симплексом* в $\mathbb{R}^N$. В частности, любой симплекс является поверхностным симплексом. Если вектор-функция φ, задающая d-мерный поверхностный симплекс Δ в $\mathbb{R}^N$, определена и непрерывна на $\overline{\Delta_0^d}$ (замыкании множества Δ_0^d), и для некоторого $k = 0,\dots,d$ вектор-функция $\varphi\circ\varphi_k^*:\ \Delta_0^{d-1}\longrightarrow\Gamma$ задает $(d-1)$-мерную поверхность Γ в $\mathbb{R}^N$, то эту поверхность назовем *гранью поверхностного симплекса* Δ. Заданные таким образом ориентации симплекса Δ и его грани Γ назовем *согласоваными* в случае четного k и *несогласоваными* в случае нечетного k. Если образом каждой грани γ_k стандартного симплекса Δ_0^d, является m - мерная поверхность, $m < d$, причем в случае $m = d-1$ эта поверхность является гранью поверхностного симплекса, то такой симплекс будем называть *подходящим.* Объединение всех граней подходящего поверхностного симплекса назовем его границей и будем ее обозначать $\partial\Delta$.

Пример 1. Пусть $\varphi:\ \Delta_0^2\longrightarrow\Delta$, $\varphi: \begin{cases} x = 1+u-v^3 \\ y = 2+v+u^3 \end{cases}$. Нетрудно проверить, что образы всех трех ребер Δ_0^2 являются одномерными поверхностями, т.е. поверхностный симплекс Δ имеет три ребра.

Пример 2. Пусть $\varphi: \ \Delta_0^2 \longrightarrow \Delta$, $\varphi: \begin{cases} x = \rho\cos\pi\theta \\ y = \rho\sin\pi\theta \end{cases}$. Нетрудно проверить, что образы ребер γ_0, γ_1 являются одномерными поверхностями, а ребро γ_2 вектор-функция φ переводит в точку, т.е. в 0-мерную поверхность. Таким образом, Δ – подходящий симплекс, но он имеет только два ребра (см. рис. 2).

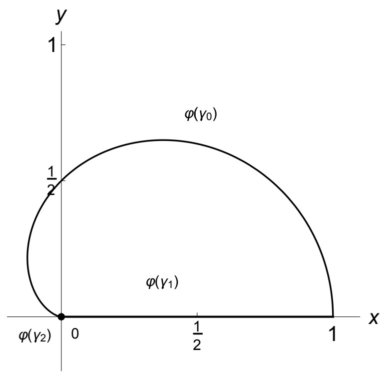


Рис. 2. Δ – область, ограниченная осью x и кривой внутри единичного круга.

Пусть $\tau \in (0,1)$, $x \in \Delta_0^{d-1}$ положим

$$\Psi_\tau^d(x) = \tau\mathbf{e}_d + (1-\tau)A_d \cdot x,$$

где, как и ранее,

$$A_d = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

– матрица размерности $d \times (d-1)$. Ясно, что $\Psi_\tau^d(\Delta_0^{d-1})$ – сечение симплекса Δ_0^d плоскостью, параллельной координатной плоскости $\{x \in \mathbb{R}^d : \ x_d = 0\}$, поднятой на высоту τ. В соответствии с обозначениями теоремы Фубини, проекцию этого сечения, ортогональной вектору $\mathbf{e}_d$, на $(d-1)$-мерное пространство, совпадающее с координатной плоскостью $\{x \in \mathbb{R}^d : \ x_d = 0\}$, будем обозначать через $E(\tau)$.

Нетрудно видеть, что при $k \neq d$ отображения $\Psi_\tau^d \circ \varphi_{k,d-1}^*$ и $\varphi_{k,d}^* \circ \Psi_\tau^{d-1}$, заданные на $\mathbb{R}^{d-2}$, совпадают, в частности,

$$(\Psi_\tau^d \circ \varphi_{k,d-1}^*)(\Delta_0^{d-2}) = (\varphi_{k,d}^* \circ \Psi_\tau^{d-1})(\Delta_0^{d-2}), \tag{20}$$

и это множество является сечением грани γ_k плоскостью, параллельной координатной плоскости $\{x \in \mathbb{R}^d : \ x_d = 0\}$, поднятой на высоту τ.

Лемма 5.5. *Пусть γ_k – грань симплекса Δ_0^d с ориетнацией, согласованной со стандартной ориентацией Δ_0^d, $k \neq d$, на γ_k определена $(d-1)$-форма $\omega = f\,dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{d-2}} \wedge dx_d$ в $\mathbb{R}^d$. Тогда*

$$\int\limits_{\gamma_k} \omega = (-1)^k \int\limits_0^1 d\tau \int\limits_{(\Psi_\tau^d \circ \varphi_{k,d-1}^*)(\Delta_0^{d-2})} \widetilde{\omega},$$

где $\widetilde{\omega} = f\,dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{d-2}}$.

`Доказательство.` Зафиксируем $k \neq d$ и переобозначим грань γ_k и задающее ее (с точностью до четности k) отображения $\varphi_{k,d}^*$, соответственно через γ и φ. Поскольку γ задается векторфункцией φ и при четном k и не задается при нечетном,

$$\int\limits_\gamma \omega = (-1)^k \int\limits_{\varphi^{-1}(\gamma)} f \circ \varphi \det \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_{d-2}}, \varphi_d)}{\partial(t_1, \ldots, t_{d-1})}\, d\mu_{d-1}.$$

Отсюда, применяя теорему Фубини и учитывая, что якобиан отображения φ' постоянен, имеем

$$\int\limits_{\gamma} \omega = (-1)^k \det \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_{d-2}}, \varphi_d)}{\partial(t_1, \ldots, t_{d-1})} \int\limits_{\Delta_0^{d-1}} f \circ \varphi \, d\mu_{d-1} =$$

$$(-1)^k \det \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_{d-2}}, \varphi_d)}{\partial(t_1, \ldots, t_{d-1})} \int\limits_0^1 dt_{d-1} \int\limits_{\Delta_0^{d-1}(t_{d-1})} f \circ \varphi \, d\mu_{d-2}.$$

Используя равенство

$$\Delta_0^{d-1}(\tau) = \{t \in \mathbb{R}^{d-2} : \ (t_1, \ldots, t_{d-2}, \tau) \in \Delta_0^{d-1}\} = (1-\tau)\Delta_0^{d-2}$$

и заменяя переменную во внутреннем интеграле, получим

$$\int\limits_0^1 dt_{d-1} \int\limits_{\Delta_0^{d-1}(t_{d-1})} f \circ \varphi \, d\mu_{d-2} =$$

$$\int\limits_0^1 dt_{d-1} \int\limits_{(1-t_{d-1})\Delta_0^{d-2}} f \circ \varphi(t_1, \ldots, t_{d-1}) \, dt_1 \ldots dt_{d-2} =$$

$$\int\limits_0^1 d\tau \int\limits_{(1-\tau)\Delta_0^{d-2}} f \circ \varphi(t_1, \ldots, t_{d-2}, \tau) \, dt_1 \ldots dt_{d-2} =$$

$$\int\limits_0^1 d\tau (1-\tau)^{d-2} \int\limits_{\Delta_0^{d-2}} f \circ \varphi((1-\tau)t_1, \ldots, (1-\tau)t_{d-2}, \tau) \, dt_1 \ldots dt_{d-2} =$$

$$\int\limits_0^1 (1-\tau)^{d-2} \, d\tau \int\limits_{\Delta_0^{d-2}} f \circ \varphi \circ \Psi_\tau^{d-1} \, d\mu_{d-2}.$$

С другой стороны, принимая во внимание (20), имеем

$$\int\limits_{(\Psi_\tau^d \circ \varphi_{k,d-1}^*)(\Delta_0^{d-2})} \widetilde{\omega} = \int\limits_{(\varphi \circ \Psi_\tau^{d-1})(\Delta_0^{d-2})} \widetilde{\omega} =$$

$$\int\limits_{\Delta_0^{d-2}} f \circ \varphi \circ \Psi_\tau^{d-1} \det \frac{\partial((\varphi \circ \Psi_\tau^{d-1})_{i_1}, \ldots, (\varphi \circ \Psi_\tau^{d-1})_{i_{d-2}})}{\partial(\tilde{t}_1, \ldots, \tilde{t}_{d-2})} \, d\mu_{d-2} =$$

$$\det \frac{\partial((\varphi \circ \Psi_\tau^{d-1})_{i_1}, \ldots, (\varphi \circ \Psi_\tau^{d-1})_{i_{d-2}})}{\partial(\tilde{t}_1, \ldots, \tilde{t}_{d-2})} \int\limits_{\Delta_0^{d-2}} f \circ \varphi \circ \Psi_\tau^{d-1} \, d\mu_{d-2}.$$

Осталось заметить, что

$$\det \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_{d-2}}, \varphi_d)}{\partial(t_1, \ldots, t_{d-1})} = \det \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_{d-2}})}{\partial(t_1, \ldots, t_{d-2})},$$

поскольку в последней строке определителя в левой части все элементы кроме последнего равны нулю, а последний элемент равен единице, и

$$\det \frac{\partial((\varphi \circ \Psi_\tau^{d-1})_{i_1}, \ldots, (\varphi \circ \Psi_\tau^{d-1})_{i_{d-2}})}{\partial(\tilde{t}_1, \ldots, \tilde{t}_{d-2})} =$$

$$\det \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_{d-2}})}{\partial(t_1, \ldots, t_{d-1})} \cdot \left(\Psi_\tau^{d-1}\right)' = (1-\tau)^{d-2} \det \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_{d-2}})}{\partial(t_1, \ldots, t_{d-2})}. \Diamond$$

Лемма 5.6. *Пусть* Δ_0^d *– стандартный симплекс со стандартной ориентацией, которая согласована с ориентацией его граней,* ω *–* $(d-1)$*-форма в* $\mathbb{R}^d$ *класса* $C^{(1)}$*, заданная на* $\overline{\Delta_0^d}$. *Тогда*

$$\int\limits_{\Delta_0^d} d\omega = \int\limits_{\partial \Delta_0^d} \omega.$$

`Доказательство.` В первую очередь заметим, что достаточно доказать для одночленных форм, причем, не умаляя общности, можно считать, что $\omega = f\,dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_{d-2}}\wedge dx_d$, $i_k \neq d$, $k = 1,\ldots,d-2$.

Проведем индукцию по d. База для $d = 1$ следует из равенства

$$\int\limits_0^1 df = f(1) - f(0).$$

Проведем индукционный переход $d-1 \to d$. Поскольку среди индексов $i_1,\ldots,i_{d-2},d$ отсутствует единственное $k \in \{1,\ldots,d\}$, в форме $d\omega$ ненулевым слагаемым будут лишь то, которое содержит dx_k, т.е. форма $d\omega$ является одночленной и может быть приведена к виду $d\omega = F\,dx_1\wedge\ldots\wedge dx_d$. Применяя теорему Фубини, имеем

$$\int\limits_{\Delta_0^d} d\omega = \int\limits_{I_d^{-1}(\Delta_0^d)} F\circ I_d \det I_d'\,d\mu_d = \int\limits_{\Delta_0^d} F\,d\mu_d = \int\limits_0^1 dx_d \int\limits_{\Delta_0^d(x_d)} F\,d\mu_{d-1} =$$

$$\int\limits_0^1 d\tau(1-\tau)^{d-1}\int\limits_{\Delta_0^{d-1}} F\circ\Psi_\tau^d\,d\mu_{d-1} = \int\limits_0^1 d\tau\int\limits_{\Delta_0^{d-1}}(\widetilde{d\omega})_{\Psi_\tau^d},$$

где операция "$\sim$" отбрасывает последний дифференциал в дифференциальной форме, т.е. $\widetilde{d\omega} = F\,dx_1\wedge\ldots\wedge dx_{d-1}$. Отсюда, используя индукционное прдположение, лемму 5.5, теоремы 4.5, 3.4 и очевидные равенства $\widetilde{d\omega} = d\widetilde{\omega} - \frac{\partial f}{\partial x_d}dx_d\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_{d-2}}$, $d(\Psi_\tau^d)_d = 0$, получаем

$$\int\limits_{\Delta_0^d} d\omega \overset{\text{теор. 4.5}}{=} \int\limits_0^1 d\tau\int\limits_{\Delta_0^{d-1}}(d\widetilde{\omega})_{\Psi_\tau^d} \overset{\text{теор. 3.4}}{=} \int\limits_0^1 d\tau\int\limits_{\Delta_0^{d-1}} d(\widetilde{\omega}_{\Psi_\tau^d}) \overset{\text{инд. пр.}}{=}$$

$$\int\limits_0^1 d\tau \int\limits_{\partial\Delta_0^{d-1}} \widetilde{\omega}_{\Psi_\tau^d} = \int\limits_0^1 d\tau \sum_{k=0}^{d-1} (-1)^k \int\limits_{\varphi_{k,d-1}^*(\Delta_0^{d-2})} \widetilde{\omega}_{\Psi_\tau^d} \overset{\text{теор. 4.5}}{=}$$

$$\sum_{k=0}^{d-1} (-1)^k \int\limits_0^1 d\tau \int\limits_{(\Psi_\tau^d \circ \varphi_{k,d-1}^*)(\Delta_0^{d-2})} \widetilde{\omega} \overset{\text{лем. 5.5}}{=} \sum_{k=0}^{d-1} \int\limits_{\gamma_k} \omega.$$

Для доказательства леммы осталось заметить, что $\int\limits_{\gamma_d} \omega = 0$, поскольку последняя координата вектор-функции φ_d^* – тождественный нуль, и значит в матрице

$$\frac{\partial((\varphi_d^*)_{i_1}, \dots, (\varphi_d^*)_{i_{d-2}}, (\varphi_d^*)_d)}{\partial(t_1, \dots, t_{d-1})}$$

последняя строка состоит из всех нулей. $\Diamond$

Теорема 5.7. *(Стокс[2]) Пусть* Δ *– подходящий* d*-мерный поверхностный симплекс в* $\mathbb{R}^N$ *класса* $C^{(2)}$*, ориентация которого согласована с ориентацией всех его граней,* ω *–* $(d-1)$*-форма в* $\mathbb{R}^N$ *класса* $C^{(1)}$*, определенная на* $\overline{\Delta}$*. Тогда*

$$\int\limits_{\Delta} d\omega = \int\limits_{\partial\Delta} \omega$$

Доказательство. Пусть симплекс Δ задан вектор-функцией $\varphi: \Delta_0^d \longrightarrow \Delta$. Используя теоремы 4.5, 3.4 и лемму 5.6, имеем.

$$\int\limits_{\Delta} d\omega = \int\limits_{\varphi(\Delta_0^d)} d\omega = \int\limits_{\Delta_0^d} (d\omega)_\varphi = \int\limits_{\Delta_0^d} d\omega_\varphi = \int\limits_{\partial\Delta_0^d} \omega_\varphi.$$

[2]Джорж Габриэль Стокс (1819-1903) – английский математик.

Множество $\partial\Delta_0^d$ состоит из граней страндартного симплекса Δ_0^d. Если для некоторой грани γ_k ее образ $\varphi(\gamma_k)$ является m-мерной поверхностью, $m < d-1$, то по следствию 3.6

$$\int\limits_{\gamma_k} \omega_\varphi = 0.$$

Если $\varphi(\gamma_k)$ является $(d-1)$-мерной поверхностью (т.е. $\varphi(\gamma_k)$ – грань поверхностного симплекса Δ), то по теореме 4.5

$$\int\limits_{\gamma_k} \omega_\varphi = \int\limits_{\varphi(\gamma_k)} \omega.$$

Просуммировав эти равенства по всем $k = 0, \ldots, d$, получим

$$\int\limits_{\partial\Delta_0^d} \omega_\varphi = \int\limits_{\partial\Delta} \omega. \diamondsuit$$

Теорему Стокса легко распространить на существенно более широкий класс множеств. *Простой d-мерной областью* в $\mathbb{R}^N$ назовем объединение конечного числа попарно дизъюнктных подходящих ориентированных d-мерных поверхностных симплексов в $\mathbb{R}^N$ класса $C^{(2)}$, таких что каждая грань каждого симплекса либо не пересекается ни с какой другой гранью, либо совпадает ровно с одной гранью, причем ориентация общей грани двух поверхностных симплексов, согласованная с ориентацией одного симплекса, противоположна ее ориентации, согласованной с ориентацией другого. Объединение всех граней, не пересекающихся ни с какой другой гранью, назовем границей простой области Ω и будем ее обозначать $\partial\Omega$. Если грань некоторого поверхностного симплекса имеет ориентацию, согласованную с ориентацией симплекса, и принадлежит границе простой d-мерной области Ω, будем говорить, что ориентация этой грани согласована с ориентацией Ω.

Теорема 5.8. *(Стокс) Пусть Ω – простая d-мерная область в $\mathbb{R}^N$, ориентация которой согласована с ориентацией ее границы, ω – $(d-1)$-форма в $\mathbb{R}^N$ класса $C^{(1)}$, заданная на $\overline{\Omega}$. Тогда*

$$\int\limits_{\Omega} d\omega = \int\limits_{\partial\Omega} \omega. \tag{21}$$

Утверждение теоремы следует из теорем 5.7 и 4.3.$\Diamond$

Любой d-мерный многогранник в $\mathbb{R}^d$, снабженный ориентацией, порожденной тождественным отображением, является (с точностью до множества меры ноль) простой d-мерной областью Ω в $\mathbb{R}^d$, а его граница при должном выборе ориентации граней совпадет (с точностью до множества меры ноль) с $\partial\Omega$. Действительно, любой многогранник можно триангулировать, т.е. представить его в виде объединения замкнутых d-мерных симплексов (т.е. замыканий d-мерных симплексов), таких что их внутренности не пересекаются, каждая грань каждого симплекса либо не пересекается ни с какой другой гранью, либо совпадает ровно с одной гранью. Снабдим каждую грань каждого симплекса ориентацией, согласованной с ориентацией симплекса (порожденной тождественным отображением). По предложению 5.4 совпадающие грани будут иметь противоположные ориентации.

Ясно, что если S – d-мерная поверхность в $\mathbb{R}^N$, заданная вектор-функцией $\varphi:\ E \longrightarrow S$, Ω – простая d-мерная область в $\mathbb{R}^d$, содержащаяся в E вместе со своей границей, то множества $\varphi(\Omega)$ и $\varphi(\partial\Omega)$ с ориентациями, индуцированными отображением φ, являются соответственно простой d-мерной областью в

$\mathbb{R}^N$ и ее границей. Число граней у Ω и $\varphi(\Omega)$ будет одинаковым. В частности, в качестве Ω можно взять любой многогранник, снабженный вместе со своими гранями ориентацией, по описанной выше схеме.

Однако понятие простой области охватывает не только описанные ситуации.

Пример 3. Пусть $\Delta_1 = \{(\theta,\rho) :\ 0 < \theta < 2\pi, \frac{\theta}{2\pi} < \rho < 1\}$, $\Delta_2 = \{(\theta,\rho) :\ 0 < \theta < 2\pi, 0 < \rho < \frac{\theta}{2\pi}\}$. Множества Δ_1, Δ_2 – двумерные симплексы, поэтому существуют определяющие их аффинные отображения $\varphi_1 :\ \Delta_0^2 \longrightarrow \Delta_1$, $\varphi_2 :\ \Delta_0^2 \longrightarrow \Delta_2$, такие что Δ_1, Δ_2 имеют одинаковую ориентацию (как части одной и той же двумерной поверхности, например, плоскости (θ,ρ)). Положим $\psi : \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$. Нетрудно видеть, что вектор-функции $\psi \circ \varphi_1 :\ \Delta_0^2 \longrightarrow \Omega_1$, $\psi \circ \varphi_2 :\ \Delta_0^2 \longrightarrow \Omega_2$ задают дизъюнктные поверхностные симплексы Ω_1, Ω_2, объединение которых совпадает с единичнм кругом (с точностью до множества меры ноль), причем Ω_1 имеет три грани, а Ω_2 – только две, так как ребро $\{(\theta,\rho) :\ 0 < \theta < 2\pi, \rho = 0\}$ симплекса Δ_2 отбражается вектор-функцией ψ в точку (см рис. 3). По предложению 5.4 общее ребро $\{(\theta,\rho) :\ 0 < \theta < 2\pi, \frac{\theta}{2\pi} = \rho\}$ симплексов Δ_1, Δ_2 имеет противоположные ориентации, а значит и соответствующее общее ребро поверхностных симплексов Ω_1, Ω_2 имеет противоположные ориентации. Ввиду 2π–периодичности ψ по аргументу θ образы ребер $\Gamma_1 = \{(\theta,\rho) :\ \theta = 0, 0 < \rho < 1\}$, $\Gamma_2 = \{(\theta,\rho) :\ \theta = 2\pi, 0 < \rho < 1\}$ совпадут как множества. Покажем, они будут иметь противоположные ориентации. Рассмотрим симплекс $\tilde{\Delta}_1$, заданный вектор-функцией $\tilde{\varphi}_1 :\ \Delta_0^2 \longrightarrow \tilde{\Delta}_1$, где $\tilde{\varphi}_1 = \varphi_1 + 2\pi\mathbf{e_1}$, а ориентацию его ребра, совпадающего с ребром Γ_2, опреде-

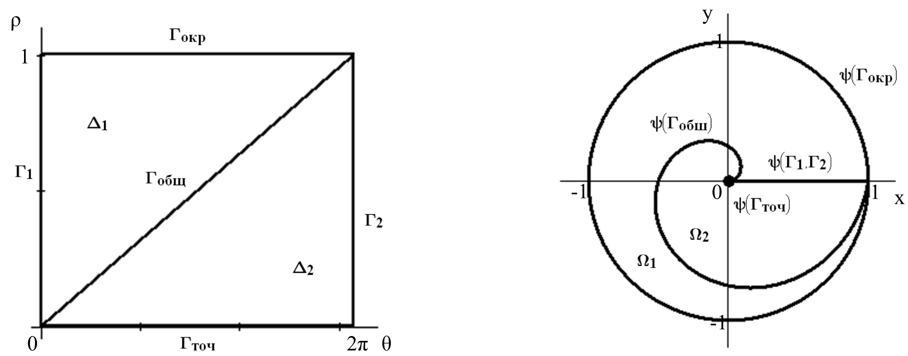


Рис. 3. Единичный круг, разбитый на поверхностные симплексы Ω_1, Ω_2.

лим вектор-функцией $\tilde{\varphi}^* := \varphi^* + 2\pi\mathbf{e_1}$, где φ^* – отображение, задающее ребро Γ_1 симплекса Δ_2. Поскольку $(\varphi_2)' = (\tilde{\varphi}_2)'$, $(\varphi^*)' = (\tilde{\varphi}^*)'$, ориентация $\tilde{\Delta}_1$ совпадет с ориентацией Δ_1, а значит и Δ_2, и согласована с ориентацией ребра Γ_2. По предложению 5.4 общее ребро Γ_2 симплексов $\tilde{\Delta}_1, \Delta_2$ имеет противоположные ориентации а значит и их образы при отображении ψ имеют противоположные ориентации, но $\psi \circ \varphi^* = \psi \circ \tilde{\varphi}^*$ ввиду 2π–периодичности вектор-функции ψ по θ. Таким образом, ориентированные поверхностные симплексы Ω_1, Ω_2 составляют простую двумерную область с единственным ребром $\psi(\{(\theta,\rho) :\ 0 < \theta < 2\pi, \rho = 1\})$, совпадающим (с точностью до множества меры ноль) с единичной окружностью.

Рассмотрим три частных случая теоремы Стокса.

1. Пусть $N = 2$, $d = 2$, $\omega = f\,dx + g\,dy$. Тогда

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial y}\,dy \wedge dx + \frac{\partial g}{\partial x}\,dx \wedge dy = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)\,dx \wedge dy,$$

и формула (21) примет вид

$$\int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)\,dx \wedge dy = \int\limits_{\partial\Omega} f\,dx + g\,dy.$$

Это равенство называют формулой Грина[3].

2. Пусть $N = 3$, $d = 3$, $\omega = P\,dx\wedge dy + Q\,dy\wedge dz + R\,dz\wedge dx$. Тогда

$$d\omega = \frac{\partial P}{\partial z}\,dz\wedge dx\wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\wedge dy\wedge dz + \frac{\partial R}{\partial y}\,dy\wedge dz\wedge dx = \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y}\right) dx\wedge dy\wedge dz,$$

и формула (21) примет вид

$$\int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y}\right) dx\wedge dy\wedge dz = \int\limits_{\partial\Omega} P\,dx\wedge dy + Q\,dy\wedge dz + R\,dz\wedge dx.$$

Это равенство называют формулой Остроградского[4]-Гаусса.

3. Пусть $N = 3$, $d = 2$, $\omega = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$. Тогда

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\wedge dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\wedge dx,$$

и формула (21) примет вид

$$\int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\wedge dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dz\wedge dx = \int\limits_{\partial\Omega} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Это равенство называют формулой Стокса.

[3] Джорж Грин (1793-1841) – английский математик.

[4] Михаил Васильевич Остроградский (1801-1862) – русский математик.