Аналитическая динамика управляемых систем
принцип возможных перемещений
принцип Даламбера

ШИМАНЧУК Дмитрий Викторович
d.shimanchuk@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики – процессов управления

Санкт-Петербург — 2018 г.

Определение

Принцип возможных перемещений — вариационный принцип в теоретической механике, устанавливающий общее условие равновесия механической системы.

Определение

Возможными (виртуальными) перемещениями несвободной механической системы называются воображаемые бесконечно малые перемещения $\{\delta \mathbf{r}_\nu\}_{\nu=\overline{1,N}}$, допускаемые в данный момент наложенными на систему связями.

Определение

Работа силы на виртуальном перемещении называется *виртуальной работой* данной силы.

Пусть к ν-й материальной точке $P_\nu(x_\nu, y_\nu, z_\nu)$ приложена сила

$$\mathbf{F}_\nu = F_{x_\nu}\mathbf{i} + F_{y_\nu}\mathbf{j} + F_{z_\nu}\mathbf{k}.$$

Сообщим данной точке возможное перемещение

$$\delta\mathbf{r}_\nu = \delta x_\nu\mathbf{i} + \delta y_\nu\mathbf{j} + \delta z_\nu\mathbf{k},$$

тогда можно определить виртуальную работу данной силы на виртуальном перемещении точки:

$$\delta A_\nu = (\mathbf{F}_\nu, \delta\mathbf{r}_\nu) = F_{x_\nu}\delta x_\nu + F_{y_\nu}\delta y_\nu + F_{z_\nu}\delta z_\nu. \tag{1}$$

Определение

Связь называется *идеальной*, если сумма работ сил реакций данной связи на любом возможном перемещении точек механической системы равна нулю:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \delta A_\nu^R = \sum_{\nu=1}^{N} (\mathbf{R}_\nu, \delta \mathbf{r}_\nu) = 0,$$

где $\mathbf{R}_\nu$ – реакция связи, действующая на ν-ю точку механической системы.

Равенство

$$\sum_{\nu=1}^{N} \delta A_\nu^F = \sum_{\nu=1}^{N} (\mathbf{F}_\nu, \delta \mathbf{r}_\nu) = 0 \tag{2}$$

выражает **принцип возможных перемещений**: *для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма работ всех приложенных к системе активных сил на любом возможном перемещении системы была равна нулю.*

Принцип возможных перемещений IV

$$\sum_{\nu=1}^{N} \delta A_\nu = 0:$$

- $$\sum_{\nu=1}^{N} (\mathbf{F}_\nu, \delta \mathbf{r}_\nu) = 0, \ \sum_{\nu=1}^{N} (F_{x_\nu} \delta x_\nu + F_{y_\nu} \delta y_\nu + F_{z_\nu} \delta z_\nu) = 0;$$
- $$\sum_{\nu=1}^{N} (\mathbf{F}_\nu, \mathbf{v}_\nu) = 0, \ \sum_{\nu=1}^{N} (F_{x_\nu} v_{x_\nu} + F_{y_\nu} v_{y_\nu} + F_{z_\nu} v_{z_\nu}) = 0;$$
- $$\sum_{\nu=1}^{N} M_{z_\nu} \omega_{z_\nu} = 0.$$

Принцип Даламбера I

Если к заданным активным силам, действующим на точки механической системы, и реакциям наложенных связей присоединить силы инерции, то получится уравновешенная система сил:

$$\mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}_\nu + \mathbf{\Phi}_\nu = \mathbf{0}, \quad \nu = \overline{1, N}$$

где $\mathbf{F}_\nu$ – действующая на ν-ю точку активная сила, $\mathbf{R}_\nu$ – реакция наложенной на ν-ю точку связи, $\mathbf{\Phi}_\nu$ – сила инерции ν-ой точки.

Замечание

Сила инерции ν-ой точки численно равна произведению массы точки m_ν на её ускорение w_ν и направленная противоположно этому ускорению.

$$\mathbf{\Phi}_\nu = -m_\nu \mathbf{w}_\nu .$$

Закон Ньютона:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{w},$$

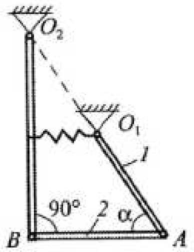
Принцип Даламбера:

$$\mathbf{F} - m\mathbf{w} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{F} + \mathbf{\Phi} = 0.$$

где $\mathbf{\Phi}$ – даламберовская сила инерции.

Задача 1.

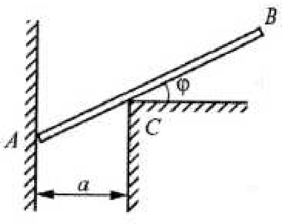
В системе стержней, расположенных в вертикальной плоскости, $O_1O_2 = AO_2$, стержни 1 и 2 однородны и имеют вес P_1 и P_2 соответственно. Определить силу F натяжения пружины, если в положении равновесия, изображённом на рисунке, точки A, O_1, O_2 лежат на одной прямой.



$$F = \frac{P_1 + P_2}{\tan\alpha}$$

Задача 2.

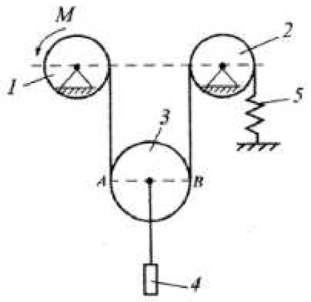
Однородный гладкий стержень AB длиной $2l$ и весом P опирается одним концом на гладкую вертикальную стену и, кроме того, опирается в точке C на край неподвижного стола. Определить угол φ, который образует стержень со столом в положении равновесия, если расстояние от стенки до стола равно a.



$$\cos^3\varphi = \frac{a}{l}, \text{ где } a \leqslant l$$

Задача 3.

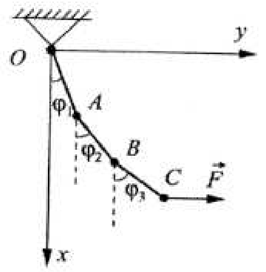
Блок 3 весом P подвешен на нити, которая намотана на блок 1 и перекинута через блок 2. Свободный конец нити прикреплён к пружине 5, коэффициент жесткости которой равен c. К центру блока 3 подвешен груз 4 весом Q. К блоку 1 приложена пара сил с моментом M, радиус этого блока r. При каком значении M система находиться в равновесии? Чему будет равна при этом деформация пружины.



$$M = \frac{(P+Q)r}{2}, \ \lambda = \frac{(P+Q)}{2c}$$

Задача 4.

Три одинаковых стержня весом Q каждый соединены между собой шарнирами. Первый стержень может вращаться вокруг неподвижной оси O, а к свободному концу C третьего стержня приложена горизонтальная сила $\mathbf{F}$, удерживающая всю систему в равновесии в вертикальной плоскости. При этом стержни образуют с вертикалью углы φ_1, φ_2, φ_3. Определить эти углы, если $F = Q$.



$\tan\varphi_1$, $\tan\varphi_2$, $\tan\varphi_3$

Задача 5.

Тяжёлое колечко весом P надето на прут, которому придана форма кривой, определяемой уравнениями: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$, $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} + z = 1$, где ось Oz направлена вертикально вверх. Найти положение равновесия колечка.

$M_1(0, 0, 1)$, $M_2(4, 2, -\frac{1}{3})$

Задача 6.

Найти уравнения абсолютно гладкой поверхности, вращающейся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω, при условии, что помещённая на эту поверхность тяжёлая точка будет всюду находиться в относительном равновесии.

$$z = \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2) + const$$