ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ
ВЕКТОРНАЯ ФУНКЦИЯ

ШИМАНЧУК Дмитрий Викторович
d.shimanchuk@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики – процессов управления

Санкт-Петербург – 2016г.

Определения и теоремы I

Определение

Соответствие, при котором каждой точке $\boldsymbol{x}$ множества Ω евклидова пространства R^m сопоставляется вектор $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})$ множества Q евклидова пространства R^p, называется *векторной функцией векторного аргумента*:

$$\boldsymbol{x} \in \Omega = (x_1, \ldots, x_m) \in R^m \to \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) \in Q = (r_1, \ldots, r_p) \in R^p.$$

Определение

Множество Ω называют *областью значения векторной функции*, а множество Q – *множеством значений* этой функции.

Замечания

1. Если $\Omega = x_1 \in R$ – множество точек на прямой, то имеем векторную функцию одного скалярного аргумента $\boldsymbol{r}(x_1)$;
2. Если $\Omega = (x_1, \ldots, x_m) \in R^m$ – множество точек евклидова пространства, то имеем векторную функцию нескольких скалярных аргументов $\boldsymbol{r}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

Пусть $(r_1, \ldots, r_p)$ — координаты вектора $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) \in Q \subset \ R^p$

Ясно, что задание векторной функции $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})$ равносильно заданию скалярных функций $r_1(x_1, \ldots, x_m), r_2(x_1, \ldots, x_m), \ldots, r_p(x_1, \ldots, x_m)$.

Определение

Если начала указанных векторов совместить с началом соответствующей декартовой системы координат, то точечное множество концов рассматриваемых радиус–векторов будем называть *годографом векторной функции*.

Определение

Постоянный вектор $\boldsymbol{r}_0$ называют пределом векторной функции $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})$ при $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0$ и обозначают

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{r}_0,$$

если

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} |\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{r}_0| = 0$$

(здесь $|\cdot|$ берется в R^p).

Замечание

$$|\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_p^2},$$

а условие $\boldsymbol{x}(x_1, x_2, \ldots, x_m) \to \boldsymbol{x}(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{m0})$ означает, что

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| \ \to \ 0$$

(здесь $|\cdot|$ берется в R^m), что влечет

$$x_1 \ \to \ x_{10}, x_2 \ \to \ x_{20}, \ldots, x_m \ \to \ x_{m0}.$$

Замечание

Для вектор–функции имеют место теоремы о пределах, аналогичные теоремам о пределах для скалярных функций.

Если

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{r}_0, \ \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}_0, \ \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} \mu(\boldsymbol{x}) = \mu_0$$

то

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) \pm \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{r}_0 \pm \boldsymbol{q}_0,$$

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} \mu(\boldsymbol{x})\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) = \mu_0\boldsymbol{r}_0,$$

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{r}_0 \cdot \boldsymbol{q}_0,$$

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{r}_0 \times \boldsymbol{q}_0.$$

Определение

Векторная функция $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})$, заданная в точке $\boldsymbol{x}_0$ и в любой её окрестности, непрерывна в $\boldsymbol{x}_0$, если

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}_0).$$

Замечание

Если векторные функции $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})$ и скалярная функция $\mu(\boldsymbol{x})$ непрерывны в точке $\boldsymbol{x}_0$, то в этой точке непрерывны также векторные функции $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) \pm \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})$, $\mu(\boldsymbol{x})\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})$.

Определение

Производной векторной функции $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ по ее скалярному аргументу $t \in T \subset R$ называют предел отношения приращения функции к соответствующему приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$\boldsymbol{r}'(t) = \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}.$$

Определение

Функция *дифференцируема в точке* t, если в этой точке существует её производная.

Замечание

Если $\boldsymbol{r}(t) \in V^3$ и векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ составляют базис в линейном пространстве V^3, то $\boldsymbol{r}(t) = \ x(t)\boldsymbol{e}_1 + y(t)\boldsymbol{e}_2 + z(t)\boldsymbol{e}_3$ и

$$\boldsymbol{r}'(t) = x'(t)\boldsymbol{e}_1 + y'(t)\boldsymbol{e}_2 + z'(t)\boldsymbol{e}_3.$$

Замечание

Если $\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{q}(t), \lambda(t)$ – дифференцируемые в точке t функции, то в этой же точке дифференцируемы

$$\boldsymbol{r}(t) \pm \boldsymbol{q}(t), \lambda(t)\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{r}(t) \cdot \boldsymbol{q}(t), \boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{q}(t),$$

причем

1. $(\boldsymbol{r}(t) \pm \boldsymbol{q}(t))' = \boldsymbol{r}'(t) \pm \boldsymbol{q}'(t)$;
2. $(\lambda(t)\boldsymbol{r}(t))' = \lambda'(t)\boldsymbol{r}(t) + \lambda(t)\boldsymbol{r}'(t)$;
3. $(\boldsymbol{r}(t) \cdot \boldsymbol{q}(t))' = \boldsymbol{r}'(t) \cdot \boldsymbol{q}(t) + \boldsymbol{r}(t) \cdot \boldsymbol{q}'(t)$;
4. $(\boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{q}(t))' = \boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{q}(t) + \boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{q}'(t)$.

Замечание

Если векторная функция $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$, а $s = s(t)$, то

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}.$$

Определение

Производная векторной функции $\boldsymbol{r}'(t)$ называется *второй производной* функции $\boldsymbol{r}(t)$ и обозначается $\boldsymbol{r}''(t)$. Аналогичным образом определяются производные более высоких порядков

$$\boldsymbol{r}^{(k)}(t) = (\boldsymbol{r}^{(k-1)}(t))'.$$

Определение

Функция, имеющая непрерывные производные до k–го порядка включительно на некотором отрезке, называется *k–раз дифференцируемой* на этом отрезке.

Определение

Неопределенным интегралом от векторной функции $\boldsymbol{r}(t)$, $t \in \ T$ называют векторную функцию $\boldsymbol{g}(t)$, определяемую с точностью до постоянного векторного слагаемого

$$\boldsymbol{g}(t) = \int \boldsymbol{r}(t)dt, t \in \ T,$$

если

$$\frac{d\boldsymbol{g}(t)}{dt} = \boldsymbol{r}(t), t \in T.$$

Определение

Определенным интегралом от векторной функции $\boldsymbol{r}(t), t \in \ T$ называют постоянный вектор, определяемый равенством

$$\int\limits_a^b \boldsymbol{r}(t)dt = \boldsymbol{g}(b) - \boldsymbol{g}(a).$$

Замечание

Пусть векторная функция $\boldsymbol{r}(t) \in V^3$ задана на отрезке $[a, b]$, причем $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ составляют базис в V^3. Тогда неопределенный и определенный интегралы от векторной функции вычисляются покоординатно:

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{e}_1 + y(t)\boldsymbol{e}_2 + z(t)\boldsymbol{e}_3,$$

$$\int \boldsymbol{r}(t)dt = \boldsymbol{e}_1 \int x(t)dt + \boldsymbol{e}_2 \int y(t)dt + \boldsymbol{e}_3 \int z(t)dt,$$

$$\int\limits_a^b \boldsymbol{r}(t)dt = \boldsymbol{e}_1 \int\limits_a^b x(t)dt + \boldsymbol{e}_2 \int\limits_a^b y(t)dt + \boldsymbol{e}_3 \int\limits_a^b z(t)dt.$$