

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ КРИВЫХ

ШИМАНЧУК Дмитрий Викторович
d.shimanchuk@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики – процессов управления

Санкт-Петербург – 2016г.

Определение

Элементарной кривой называют множество точек пространства, являющееся образом открытого отрезка при топологическом отображении его в пространство.

Определение

Точки, соответствующие конечным точкам отрезка, называют *конечными точками* элементарной кривой.

Определение

Две элементарные кривые называются *примыкающими*, если одна или обе пары их конечных точек совпадают между собой.

Определение

Кривой линией называют множество точек пространства, которое состоит из конечного или счетного множества элементарных кривых, примыкающих друг к другу.

Пусть γ – элементарная кривая,

являющаяся образом промежутка $a < t < b$, при топологическом отображении его в пространство R^3 , $x(t), y(t), z(t)$ – координаты точки на пространственной кривой γ , соответствующей значению $t \in (a, b)$.

Определение

Систему равенств

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \quad t \in (a, b),$$

называют *параметрическими уравнениями пространственной кривой γ* или *параметризацией пространственной кривой*.

Замечание

Если для некоторого значения t , например $x'(t) \neq 0$, то параметрические уравнения кривой γ можно записать в явном виде $y = y(x), z = z(x)$.

Замечание

Любая пространственная кривая представима как пересечение двух поверхностей, т. е. каждая её точка удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ \Phi(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

..

Замечание

Считая $x(t), y(t), z(t)$ координатами радиус-вектора $\mathbf{r}(t)$ соответствующей точки кривой γ , получим векторную функцию $\mathbf{r}(t), t \in (a, b)$, годографом которой является данная кривая.

Если в векторной функции $\mathbf{r}(t), t \in (a, b)$ заменить параметр t параметром u с помощью соотношения $t = g(u), u \in (\alpha, \beta)$, где g – строго возрастающая и непрерывная функция,

то получаем новую параметризацию той же кривой γ .

Замечание

Если кривая γ является плоской, то ее параметрические уравнения имеют вид

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

где $t \in (a, b)$.

Замечание

Плоская кривая описывается явным уравнением $y = y(x)$, когда для некоторого значения t , например, производная $x'(t) \neq 0$.

Замечание

Неявное уравнение плоской кривой имеет вид $F(x, y) = 0$.

Замечание

Пусть $F(x, y, c) = 0$ – уравнение однопараметрического семейства плоских кривых.

Определение

Гладкая кривая называется *огibaющей* указанного семейства, если каждой своей точкой она касается хотя бы одной кривой этого семейства, а каждым своим куском – бесконечного числа этих кривых.

Определение

Множество точек, координаты которых удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} F(x, y, c) = 0, \\ F'_c(x, y, c) = 0, \end{cases}$$

называется *дискриминантной кривой* (*дискриминантой*).

Замечание

Если однопараметрическое семейство допускает огибающую, то она входит в состав дискриминанты. При этом любая точка дискриминанты, где

$$F'_x{}^2 + F'_y{}^2 \neq 0,$$

является точкой огибающей.

Замечание

Если семейство плоских кривых задано параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t, c), \\ y = y(t, c), \end{cases}$$

при $t \in (a, b)$, то дискриминанта удовлетворяет системе

$$\begin{cases} x = x(t, c), \\ y = y(t, c), \\ x'_t y'_c + x'_c y'_t = 0. \end{cases}$$

При этом любая точка дискриминанты, в которой $x'^2_t + y'^2_t \neq 0$, является точкой огибающей однопараметрического семейства.