ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ
КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ

ШИМАНЧУК Дмитрий Викторович
d.shimanchuk@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики – процессов управления

Санкт-Петербург – 2020 г.

Пусть поверхность S задана векторным уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), (u, v) \in D.$$

Определение

Уравнения $u = u(t), v = v(t), t \in (a, b)$ называют *внутренними уравнениями кривой на поверхности*.

Если внутренние уравнения кривой заданы, то ее параметрическое уравнение в векторной форме имеет вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u(t), v(t)), t \in (a, b).$$

Определение

Прямую называют *касательной прямой поверхности* в заданной точке, если она касается в этой точке некоторой кривой, лежащей на этой поверхности.

Замечание

Направляющий вектор касательной прямой поверхности определяется касательным вектором соответствующей кривой

$$\frac{d\mathbf{r}(u,v)}{dt} = \mathbf{r}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{r}_v \frac{dv}{dt},$$

где $\mathbf{r}_u = \dfrac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial u}$, $\mathbf{r}_v = \dfrac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial v}$.

Замечание

$$d\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv.$$

Определение

Векторы $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$ называют *координатными векторами* той точки поверхности, криволинейные координаты которой используются при их вычислении.

Определение

Плоскость, имеющая общую точку с поверхностью и содержащая все касательные прямые поверхности в рассматриваемой точке, называется *касательной плоскостью поверхности* в данной точке.

Замечание

Нормальный вектор $\boldsymbol{n}$ касательной плоскости поверхности определяется соотношением $\mathbf{n} = [\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]$.

Если $\boldsymbol{\rho}$ – радиус-вектор произвольной точки касательной плоскости поверхности в точке, соответствующей радиус-вектору $\mathbf{r}(u, v)$, то векторы $\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}(u, v)$, $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$ – компланарны, т. е.

$$(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}(u, v), \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) = 0$$

Определение

Полученное уравнение является *векторным уравнением касательной плоскости поверхности*.

При параметрическом способе задания поверхности $\boldsymbol{\rho} = (X, Y, Z)$, $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $\mathbf{r}_u = (x_u, y_u, z_u)$, $\mathbf{r}_v = (x_v, y_v, z_v)$, поэтому уравнение касательной плоскости имеет вид

$$\begin{vmatrix} X - x(u,v) & Y - y(u,v) & Z - z(u,v) \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0.$$

Определение

Прямую, ортогональную касательной плоскости поверхности в данной точке и проходящую через эту точку, называют *нормалью поверхности* в указанной точке.

Вектор $\mathbf{n} = [\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]$ является направляющим вектором нормали к поверхности в заданной точке, а ее уравнение имеет вид

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}(u, v) + \lambda \mathbf{n}(u, v), \lambda \in (-\infty, +\infty).$$

Если регулярная без особых точек поверхность S задана неявным уравнением $F(x, y, z) = 0$, то уравнение касательной плоскости, проходящей через точку $M(x_0, y_0, z_0)$, имеет вид

$$F_x(x - x_0) + F_y(y - y_0) + F_z(z - z_0) = 0,$$

где $F_x = \dfrac{\partial F}{\partial x}$, $F_y = \dfrac{\partial F}{\partial y}$, $F_z = \dfrac{\partial F}{\partial z}$ вычисляются в точке M, а каноническое уравнение нормали

$$\frac{x - x_0}{F_x} = \frac{y - y_0}{F_y} = \frac{z - z_0}{F_z}.$$