ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ
ПОНЯТИЕ ПОВЕРХНОСТИ

ШИМАНЧУК Дмитрий Викторович
d.shimanchuk@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики – процессов управления

Санкт-Петербург – 2020 г.

Определение

Элементарной поверхностью называют множество точек пространства, являющееся топологическим отображением круга и ограничивающей его окружности. При этом точки, являющиеся топологическим отображением точек окружности, называются *граничными точками*.

Определение

Отметим, что граничные точки образуют замкнутую кривую, называемую *границей элементарной поверхности*.

Определение

Говорят, что две элементарные поверхности *склеены*, если они находятся в таком взаимном расположении, при котором части их границ или обе границы целиком совпадают между собой.

Определение

Поверхностью называют множество точек пространства, которое может быть склеено из конечного или счетного множества элементарных поверхностей.

Пусть поверхность S является топологическим отображением плоской области $D = (u, v)$ в трехмерное пространство,

тогда координаты точек (x, y, z) поверхности S являются функциями координат точек плоской области D

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in D.$$

Определение

Эти уравнения называют *параметрическими уравнениями* поверхности, при этом говорят, что *поверхность параметризована*, а величины u, v являются *криволинейными координатами* ее точек.

Замечание

Параметрические уравнения определяют положение в пространстве концов радиус-векторов с началом в некоторой точке O

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = \boldsymbol{r}(u,v), (u,v) \in D,$$

причем годограф вектор-функции двух скалярных аргументов $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v), (u,v) \in D$ совпадает с поверхностью S.

Определение

Уравнение $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v), (u,v) \in D$ называется *векторным уравнением поверхности.*

Замечание

В силу непрерывности отображения всякой линии области D соответствует некоторая линия на поверхности S.

Определение

Координатными линиями данной параметризации называют линии поверхности, соответствующие прямым $u = const$ и $v = const$.

Определение

Параметрические уравнения могут быть разрешены относительно u, v, а тогда координаты точек поверхности будут связаны соотношением

$$F(x, y, z) = 0,$$

которое называют *неявным уравнением поверхности*.

Замечание

Если указанное уравнение можно разрешить относительно одной из координат (например, z), то уравнение поверхности представляется в виде

$$z = f(x, y).$$

В этом случае абсцисса и ордината точки поверхности играют роль криволинейных координат, а координатные линии являются линиями пересечения поверхности плоскостями, параллельными координатным плоскостям.

Определение

Поверхность называют *регулярной*, если у каждой точки этой поверхности есть окрестность, допускающая регулярную параметризацию, т. е. параметризацию вида

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{r}(x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in D,$$

где функции

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in D$$

k-раз непрерывно дифференцируемы в области D.

Замечание

При $k = 1$ поверхность называют *гладкой*.

Определение

Точку регулярной поверхности называют *обыкновенной (неособой)*, если существует такая регулярная параметризация некоторой ее окрестности, что в этой точке ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

равен двум. В противном случае точку называют *особой*.

Введем обозначения $\boldsymbol{r}_u = \frac{\partial \boldsymbol{r}(u,v)}{\partial u}, \boldsymbol{r}_v = \frac{\partial \boldsymbol{r}(u,v)}{\partial v}$, т. е.

$$\boldsymbol{r}_u \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right), \boldsymbol{r}_v \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

Ранг матрицы A равен двум только лишь в том случае, когда $[\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v] \neq 0$.

Определение

Линейчатой поверхностью называют поверхность, описанную движением прямой, называемой образующей, пересекающей при движении некоторую кривую, называемую направляющей поверхности.

Замечание

Векторное уравнение линейчатой поверхности имеет вид

$$\boldsymbol{r}(u,v) = \boldsymbol{\rho}(u) + v\boldsymbol{\mu}(u), u \in (-\infty, +\infty),$$

где $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(u), u \in (-\infty, +\infty)$ – уравнение направляющей линейчатой поверхности, а её образующая имеет направляющий вектор $\boldsymbol{\mu}(u)$.