

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

УСТОЙЧИВОСТЬ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ

ШИМАНЧУК Дмитрий Викторович
d.shimanchuk@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики – процессов управления

Санкт-Петербург – 2019 г.

Для консервативной механической системы положение равновесия определяется из условия

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0.$$

Замечание

В положении равновесия потенциальная энергия достигает своего экстремального значения.

Определение

- Положение равновесия механической системы называется *устойчивым*, если эта система, выведенная из равновесного положения, совершает колебания около этого положения.
- Положение равновесия механической системы называется *неустойчивым*, если при сколь угодно малом отклонении системы из равновесного положения она удаляется от этого положения и колебаний около этого положения не возникает.
- Положение равновесия механической системы называется *безразличным*, если при отклонении её из этого равновесного положения она и в новом положении может оставаться в состоянии равновесия.

Замечание

Механическая система может совершать малые колебания только вблизи устойчивого положения равновесия.

Определение

Положение равновесия механической системы называется *устойчивым*, если для любых сколь угодно малых положительных чисел ε_1 и ε_2 можно выбрать два других малых положительных числа δ_1 и δ_2 , что при начальных возмущениях, удовлетворяющих условиям:

$$|q_{j_0}| < \delta_1, \quad |\dot{q}_{j_0}| < \delta_2,$$

в дальнейшем движении механической системы выполняется условие

$$|q_j| < \varepsilon_1, \quad |\dot{q}_j| < \varepsilon_2,$$

для любой обобщённой координаты.

Теорема Лагранжа–Дирихле

Если в положении равновесия консервативной механической системы с идеальными и стационарными связями потенциальная энергия имеет минимум, то это положение равновесия устойчиво.

Замечание

Условие минимума будет выполнено, если в положении равновесия q^*

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} \right|_{q=q^*} > 0.$$

Теорема Н.Г. Четаева

Если в изолированном положении равновесия консервативной механической системы с идеальными и стационарными связями потенциальная энергия, предполагаемая аналитической функцией обобщённых координат, не имеет минимума, то это положение равновесия неустойчиво по Ляпунову.