АНАЛИТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

ШИМАНЧУК Дмитрий Викторович
d.shimanchuk@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики – процессов управления

Санкт-Петербург – 2018 г.

Свободные колебания с одной степенью свободы I

Определение

Свободными или собственными колебаниями называются колебания, которые происходят под действием потенциальных сил при условии отсутствия сил сопротивления и возмущающих сил.

Замечание

Для вывода уравнения малых свободных колебаний из уравнения Лагранжа следует разложить кинетическую и потенциальную энергии в ряды в окрестности положения равновесия системы, при $q = q^*$.

Свободные колебания с одной степенью свободы II

$$T = \frac{1}{2} A\dot{q}^2,$$

$$A = \sum_{i=1}^{N} m_k \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q}\right)^2.$$

$$A(q) = A_{q^*} + \left(\frac{\partial A}{\partial q}\right)_{q^*} q + \left(\frac{\partial^2 A}{\partial q^2}\right)_{q^*} \frac{q^2}{2!} + \ldots.$$

Определение

Положительная величина $a = A_{q^*}$ называется *коэффициентом инерции.*

$$T = \frac{1}{2} a\dot{q}^2.$$

$$\Pi(q) = \Pi_{q^*} + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q}\right)_{q^*} q + \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right)_{q^*} \frac{q^2}{2!} + \left(\frac{\partial^3 \Pi}{\partial q^3}\right)_{q^*} \frac{q^3}{3!} + \ldots.$$

$$c = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right)_{q^*}, \ \Pi(q) = \frac{1}{2} c q^2.$$

Определение

Положительная величина c называется *коэффициентом жёсткости.*

Дифференциальное уравнение малых свободных колебаний механической системы

$$\ddot{q} + k^2 q = 0,$$

где $k = \sqrt{c/a}$ – циклическая частота.

Уравнение малых свободных колебаний в амплитудной форме:

$$q = \sqrt{q_0^2 + \frac{\dot{q}_0^2}{k^2}} \sin\left(kt + \operatorname{arctg}\left(\frac{q_0 k}{\dot{q}_0}\right)\right).$$

$T = \dfrac{2\pi}{k}$ – период малых колебаний;

$\nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{k}{2\pi}$ – линейная частота.