А Н А Л И Т И Ч Е С К А Я   Г Е О М Е Т Р И Я
КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

ШИМАНЧУК Дмитрий Викторович
shymanchuk@mail.ru

Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики – процессов управления

Санкт-Петербург — 2013г.

Определение

Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от одной и той же точки этой плоскости.

Уравнение окружности с центром в точке $(x_0; y_0)$ и радиусом R имеет вид:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Общее уравнение кривой второго порядка

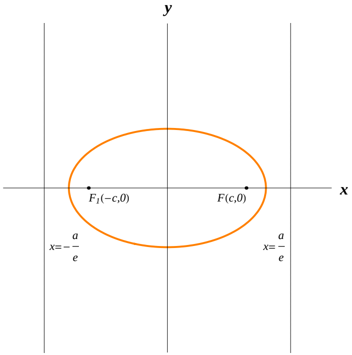
Алгебраическая линия второго порядка определяется уравнением

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

где коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} не равны нулю одновременно.

Определение

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек той же плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$.



Каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (b^2 = a^2 - c^2).$$

где координаты фокусов эллипса $F(c;0)$ и $F_1(-c;0)$.

Расстояние между фокусами эллипса равно $2c$. Точки пересечения эллипса с осями координат (*вершины*):

$$A(a;0),\ A_1(-a;0),\ B(0;b),\ B_1(0;-b).$$

Определение

Отрезки $AA_1 = 2a$, $BB_1 = 2b$ называются *осями эллипса*.

Эллипс III

Определение

Эксцентриситет эллипса
$$e = \frac{c}{a} < 1.$$
.

Определение

Расстояния r и r_1 точки $M(x; y)$ эллипса до его фокусов называются *фокальными радиусами* этой точки и определяются формулами
$$r = a - ex, \quad r_1 = a + ex.$$

Эллипс IV

Определение

Две прямые, параллельные малой оси эллипса и отстоящие от нее на расстоянии $\dfrac{a}{e}$, называются *директрисами эллипса*:

$$x = \frac{a}{e}, \quad x = -\frac{a}{e},$$

или

$$x = \frac{a^2}{c}, \quad x = -\frac{a^2}{c}.$$

Свойство

Отношение расстояний любой точки эллипса до фокуса и соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету эллипса:

$$\frac{r}{d} = e, \quad \frac{r_1}{d_1} = e.$$

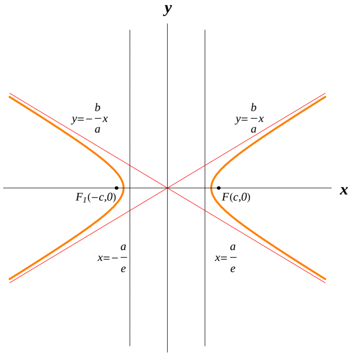
Уравнение эллипса с осями, параллельными координатным осям:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \quad (b^2 = a^2 - c^2).$$

где $(x_0; y_0)$ — координаты центра эллипса.

Определение

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых абсолютное значение разности расстояний до двух данных точек той же плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$.



Гипербола II

Каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (b^2 = c^2 - a^2).$$

где координаты фокусов гиперболы $F(c;0)$ и $F_1(-c;0)$.

Расстояние между фокусами гиперболы равно $2c$.

Точки пересечения гиперболы с осью абсцисс (*действительные вершины*):

$$A(a;0),\ A_1(-a;0).$$

Отрезок $AA_1 = 2a$ называется *действительной осью гиперболы.*
Точки плоскости с координатами

$$B(0;b),\ B_1(0;-b),$$

называются *мнимыми вершинами*. Отрезок $BB_1 = 2b$ называется *мнимой осью гиперболы.*

Определение

Эксцентриситет гиперболы
$$e = \frac{c}{a} > 1.$$

Определение

Расстояния r и r_1 точки $M(x; y)$ гиперболы до его фокусов называются *фокальными радиусами* этой точки и определяются формулами

$$r = ex - a, \quad r_1 = ex + a,$$

если точка лежит на правой ветви;

$$r = -(ex - a), \quad r_1 = -(ex + a),$$

если точка лежит на левой ветви.

Гипербола IV

Определение

Две прямые, параллельные мнимой оси гиперболы и отстоящие от нее на расстоянии $\frac{a}{e}$, называются *директрисами гиперболы*:

$$x = \frac{a}{e}, \quad x = -\frac{a}{e},$$

или

$$x = \frac{a^2}{c}, \quad x = -\frac{a^2}{c}.$$

Свойство

Отношение расстояний любой точки гиперболы до фокуса и соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету гиперболы:

$$\frac{r}{d} = e, \quad \frac{r_1}{d_1} = e.$$

Определение

Прямые, определяемые уравнениями

$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x,$$

называются *асимптотами гиперболы.*

Уравнение гиперболы с осями, параллельными координатным осям:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1, \quad (b^2 = c^2 - a^2).$$

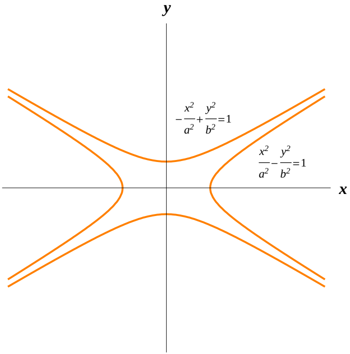
где $(x_0; y_0)$ — координаты центра гиперболы.

Определение

Две гиперболы, выраженные уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

называются *сопряженными*.



Гипербола VII

Определение

Если оси гиперболы равны, т. е. $a = b$, то гипербола называется *равнобочной* или *равносторонней*:

$$x^2 - y^2 = a^2;$$

её асимптотами служат биссектрисы координатных углов.

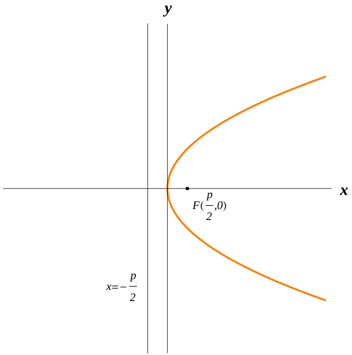
Свойство

Если за оси координат принять асимптоты равносторонней гиперболы, то её уравнение примет вид

$$xy = \frac{a^2}{2}.$$

Определение

Параболой называется геометрическое место точек плоскости, равноудалённых от данной точки — фокуса и данной прямой — директрисы.



Парабола II

Каноническое уравнение параболы:

$$y^2 = 2px,$$

где p — расстояние от фокуса до директрисы; вершина параболы находится в начале координат, осью симметрии служит ось абсцисс. Координаты фокуса $F(\frac{p}{2}; 0)$.

Определение

Уравнение *директрисы* параболы:

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Определение

Фокальный радиус точки $M(x; y)$:

$$r = x + \frac{p}{2}.$$

Парабола III

Свойство

Отношение расстояний любой точки параболы до фокуса и директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету параболы:

$$\frac{r}{d} = e = 1.$$

Определение

Если осью симметрии параболы служит ось ординат, то уравнение параболы имеет вид:

$$x^2 = 2py;$$

уравнение директрисы в этом случае

$$y = -\frac{p}{2}.$$

Парабола IV

Уравнение параболы с осью симметрии, параллельной одной из координатных осей, имеет вид:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0),$$

или

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0).$$

где $(x_0; y_0)$ — координаты вершины параболы.

Уравнения эллипса, гиперболы и параболы в полярных координатах имеют вид

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\varphi},$$

где e – эксцентриситет кривой: для эллипса $e < 1$, для гиперболы $e > 1$, для параболы $e = 1$; p – фокальный параметр для эллипса и гиперболы находится по формуле $p = \dfrac{b^2}{a}$.

Для параболы p имеет то же значение, что и в уравнении

$$y^2 = 2px.$$

Замечание

При этом полюс расположен для эллипса в левом фокусе, для гиперболы — в правом фокусе.