АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
ПРИВЕДЕНИЕ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

ШИМАНЧУК Дмитрий Викторович
d.shimanchuk@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики – процессов управления

Санкт-Петербург — 2016 г.

Общее уравнение поверхности второго порядка

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,$$

где a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{23}, a_{13} не равны нулю одновременно.

Теорема

Всякая квадратичная форма однородным ортогональным преобразованием может быть приведена к такому виду (каноническому), при котором преобразованная форма не содержит членов с произведением новых переменных, взятых попарно. Причём коэффициентами преобразованной формы будут корни характеристического уравнения.

Рассмотрим квадратичную форму

$$f = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz.$$

Составим матрицу квадратичной формы f:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Замечание

Если матрица квадратичной формы диагональна, то базис исходной системы координат является каноническим.

Теорема

Если матрица A квадратичной формы f симметричная, то её собственные числа являются вещественными числами и существует ортонормированный базис из собственных векторов.

Обозначим ортонормированный базис как $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{j}_1$, $\boldsymbol{k}_1$. Пусть эти векторы имеют координаты

$$\boldsymbol{i}_1 = s_1, \quad \boldsymbol{j}_1 = s_2, \quad \boldsymbol{k}_1 = s_3.$$

Обозначим $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{j}_1$, $\boldsymbol{k}_1$ соответственно базис исходной и новой систем координат. Тогда формулы преобразования координат представляются в виде

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} x_1 \\ y_2 \\ z_3 \end{bmatrix}.$$

Нахождение матрицы перехода S:

1. Составляем характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$ и находим его корни λ_1, λ_2, λ_3 (с учётом кратности);
2. Находим ортонормированные собственные векторы s_1, s_2, s_3, соответствующие λ_1, λ_2, λ_3, и составляем $S = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \end{bmatrix}$:
   - Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, то базис исходной системы координат канонический:
   $$S = E.$$
   - Если корни λ_1, λ_2, λ_3 простые, то для каждого корня находим ненулевое решение однородной СЛАУ:
   $$[A - \lambda_i E]h_i = 0,\ i = 1, 2, 3.$$
   - Если $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, то для простого корня λ_3 из уравнения
   $$[A - \lambda_3 E]h_3 = 0$$
   находим собственный вектор h_3. Для кратного корня $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ достаточно за h_2 взять любой ненулевой столбец матрицы
   $$[A - \lambda_3 E],$$
   а h_1 определяем как $[h_2, h_3]$.
   - Нормируем собственные векторы h_i, $i = 1, 2, 3$, тогда получаем соответствующие s_i, $i = 1, 2, 3$, которые и составляют матрицу S.

Теорема

Пусть собственные векторы $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{j}_1$, $\boldsymbol{k}_1$ матрицы квадратичной формы f, образующие ортонормированный базис, соответствуют собственным числам λ_1, λ_2, λ_3. Тогда в системе координат $Ox_1y_1z_1$ квадратичная форма принимает вид

$$f = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2.$$

Замечания

- Для определения собственных векторов в случае кратных корней характеристического полинома можно сначала определить собственный вектор h_1 для простого корня, далее определить собственный вектор h_2 для кратного корня, а h_3 определить как $[h_1, h_2]$;
- При подстановке формул преобразования координат x, y, z через новые переменные x_1, y_1, z_1 в общее уравнение поверхности, квадратичная и линейная части преобразуются независимо друг от друга;
- Общее уравнение поверхности в системе координат $Ox_1y_1z_1$ примет вид
$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 + 2b_{14}x_1 + 2b_{24}y_1 + 2b_{34}z_1 + a_{44} = 0;$$
- Хотя бы одно из чисел λ_1, λ_2, λ_3 отлично от нуля, т. к. матрица A ненулевая;
- Дальнейшее упрощение уравнения поверхности связано с *методом выделения полных квадратов* (параллельным переносом системы координат $Ox_1y_1z_1$).

Замечание

Может оказаться, что в результате однородного ортогонального преобразования уравнение примет вид

$$\lambda_1 x_1^2 + 2b_{24}y_1 + 2b_{34}z_1 + a_{44} = 0,$$

тогда необходимо выполнить замену переменных:

$$\begin{cases} x_2 = x_1, \\ y_2 = \dfrac{1}{p}\left(b_{24}y_1 + b_{34}z_1 + \dfrac{a_{44}}{2}\right), \\ z_2 = \dfrac{1}{p}\left(-b_{34}y_1 + b_{24}z_1\right), \end{cases}$$

где $p = \sqrt{b_{24}^2 + b_{34}^2}$, что приводит к уравнению

$$\lambda_1 x_2^2 + 2py_2 = 0.$$

Теорема

Общее уравнение поверхности второго порядка, заданное относительно общей ДСК, при помощи преобразования системы координат в прямоугольную систему можно преобразовать к одному из следующих пяти простейших уравнений:

I — центральные: $\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 z_2^2 + b_{44} = 0, \quad \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 \neq 0,$

II — нет центра: $\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + 2b_{34} z_2 = 0, \quad \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, b_{34} \neq 0,$

III — прямая центров: $\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + b_{44} = 0, \quad \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0,$

IV — нет центра: $\lambda_1 x_2^2 + 2b_{24} y_2 = 0, \quad \lambda_1 \neq 0, b_{24} \neq 0,$

V — плоскость центров: $\lambda_1 x_2^2 + b_{44} = 0, \quad \lambda_1 \neq 0.$