А Н А Л И Т И Ч Е С К А Я   Г Е О М Е Т Р И Я
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ И УПРОЩЕНИЕ УРАВНЕНИЙ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

ШИМАНЧУК Дмитрий Викторович
shymanchuk@mail.ru

Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики – процессов управления

Санкт-Петербург — 2013г.

Цель

Основная задача преобразования координат:

Упрощение уравнения кривой.

Замечания

1. Уравнение одной и той же кривой может иметь различный вид в зависимости от расположения системы координат, к которой отнесена кривая,
2. Выбором расположения системы координат можно добиться простейшего вида уравнения кривой.

Общее уравнение кривой второго порядка

Общее уравнение кривой второго порядка имеет вид

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Задача упрощения уравнения кривой:

Необходимо так преобразовать общее уравнение кривой, чтобы в полученном уравнении исчезли: член с произведением координат и члены линейной части.

Замечания

По преобразованному уравнению легко установить тип кривой и построить эту кривую.

Параллельный перенос системы координат

Пусть в общем уравнении отсутствует член с произведением координат:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

тогда оно преобразуется к каноническому виду параллельным переносом системы координат:

$$\begin{cases} x = x_1 + x_0, \\ y = y_1 + y_0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x_1 = x - x_0, \\ y_1 = y - y_0, \end{cases}$$

где $(x_1; y_1)$ – координаты кривой в новой системе координат, $(x_0; y_0)$ – координаты начала O_1 новой системы координат.

Замечания

1. Параллельным переносом системы координат можно добиться уничтожения членов линейной части,
2. Упрощение выполняется *методом выделения полных квадратов*.

Пусть в общем уравнении отсутствуют члены линейной части:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33} = 0,$$

тогда оно преобразуется к каноническому виду поворотом системы координат:

$$\begin{cases} x = x_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi, \\ y = x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi, \end{cases}$$

где $(x_1; y_1)$ – координаты кривой в новой системе координат, φ – угол поворота новой системы координат Ox_1y_1 относительно Oxy.

Замечание

Поворотом системы координат можно добиться уничтожения члена с произведением координат.

Замечание

В общем случае уравнения кривой второго порядка преобразования системы координат следует начинать с поворота осей, без изменения начала координат.

Тригонометрические формулы

$$\text{tg}\varphi = \frac{(a_{22} - a_{11}) \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{2a_{12}}$$

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2\varphi}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{\text{tg}\varphi}{\sqrt{1 + \text{tg}^2\varphi}}. \end{cases}$$

$$\text{ctg}2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}$$

$$\begin{cases} \cos 2\varphi = 1 + 2\sin^2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1, \\ \sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi. \end{cases}$$

Группа $\oplus$

1. Эллипс: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,
2. Мнимый эллипс: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$,
3. Две мнимые пересекающееся прямые: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$,
4. Гипербола: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$,
5. Две пересекающееся прямые: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$.

Группа $\ominus$

6. Парабола: $x^2 = 2py$.

Группа $\oslash$

7. Две параллельные прямые: $x^2 = a^2$ $(a \neq 0)$,
8. Две мнимые параллельные прямые: $x^2 = -a^2$ $(a \neq 0)$,
9. Две совпадающие прямые: $x^2 = 0$.