ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ
КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ ПОВЕРХНОСТИ

ШИМАНЧУК Дмитрий Викторович
d.shimanchuk@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики – процессов управления

Санкт-Петербург – 2020 г.

Пусть S — регулярная поверхность без особых точек, которая задана векторным уравнением,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), (u, v) \in D$$

с единичным вектором нормали в каждой точке

$$\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]}{|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|}.$$

Определение

Первой квадратичной формой поверхности называется квадратичная форма дифференциалов du и dv:

$$\mathbb{I} = d\mathbf{r} = (\mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv)^2 = \mathbf{r}_u^2 du^2 + 2(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) du dv + \mathbf{r}_v^2 dv^2.$$

Замечания

1. Первая квадратичная форма является положительно определенной, ибо она превращается в нуль только при $du = dv = 0$, а для остальных значений du и dv она положительна.
2. Если $E = \mathbf{r}_u^2$, $F = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)$, $G = \mathbf{r}_v^2$, то

$$\mathbb{I} = E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

Пусть l — дуга регулярной кривой на поверхности S. Внутренними уравнениями этой дуги служат соотношения

$$u = u(t), v = v(t), t \in (t_0, t_1),$$

где $u(t)$ и $v(t)$ — дифференцируемые функции с непрерывными производными.

Тогда длина s дуги l находится по формуле

$$s = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt.$$

Определение

Углом между двумя пересекающимися кривыми l_1 и l_2, лежащими на поверхности, называют угол θ, измеряемый в пределах от 0 до π, между направляющими векторами касательных к этим кривым в точке пересечения.

Касательные векторы кривых l_1 и l_2 будем различать, используя разные обозначения для дифференциалов криволинейных координат, соответствующих измерениям последних вдоль изучаемых кривых

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv, \quad \delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_u \delta u + \mathbf{r}_v \delta v.$$

Тогда

$$\cos(\theta) = \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta u}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}.$$

Площадь S области Ω на некоторой поверхности, где область Ω определяется параметризацией $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), (u, v) \in D$ вычисляется по формуле

$$S = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

Второй квадратичной формой называется выражение

$$\mathrm{I\!I} = -(d\mathbf{r}, d\mathbf{n}) = (d^2\mathbf{r}, \mathbf{n}).$$

Замечания

1. Если ввести обозначения $L = (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n})$, $M = (\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n})$, $N = (\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n})$, то $\mathrm{I\!I} = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$.
2. Используя выражение для единичного вектора нормали $\mathbf{n}$, получаем $L = \dfrac{(\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}}$, $M = \dfrac{(\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}}$, $N = \dfrac{(\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}}$.

Квадратичные формы поверхности VII

Определение

Нормальным сечением поверхности S в заданной точке называется линия пересечения с плоскостью, проходящей через нормаль поверхности $\mathbf{n}$ в этой точке.

Определение

Кривизну нормального сечения поверхности в направлении du/dv называют *нормальной кривизной* поверхности S в данной точке и в данном направлении du/dv.

Нормальная кривизна вычисляется по формуле

$$k_n = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} = \frac{\mathbb{II}}{\mathbb{I}}.$$