АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

ШИМАНЧУК Дмитрий Викторович
shymanchuk@mail.ru

Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики – процессов управления

Санкт-Петербург — 2013г.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении

Определение

Направляющим вектором прямой называется любой ненулевой вектор, коллинеарный этой прямой.

Теорема.

В общей ДСК уравнение прямой p, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ с направляющим вектором $\boldsymbol{a} = (l, m)$, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ l & m \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}.$$

Замечания

1. Данное уравнение называется *каноническим уравнением прямой*,
2. Если один из знаменателей l или m равен нулю, то это с необходимостью влечёт равенство нулю соответствующего числителя.

Общее уравнение прямой

Теорема 1.

В общей ДСК прямая выражается уравнением первой степени:

$$Ax + By + C = 0.$$

Теорема 2.

Всякое уравнение первой степени

$$Ax + By + C = 0$$

в общей ДСК является уравнением прямой.

Следствие

Вектор $(-B, A)$ и всякий коллинеарный с ним и ненулевой вектор, является направляющим вектором данной прямой.

Теорема.

Н. и Д. условием того, что вектор $\boldsymbol{a} = (l, m)$ коллинеарен прямой, заданной относительно общей ДСК уравнением

$$Ax + By + C = 0,$$

является условие

$$Al + Bm = 0.$$

Замечания

1. Если прямая задана относительно ДПСК, то $\boldsymbol{n} = (A, B)$ перпендикулярен этой прямой.
2. Вектор $\boldsymbol{n} = (A, B)$, координаты которого служат коэффициентами в общем уравнении $Ax + By + C = 0$ относительно общей ДСК, называют *главным вектором* этой прямой.
3. Главный вектор прямой, заданной относительно общей ДСК, неколлинеарен этой прямой:

$$AA + BB = A^2 + B^2 \neq 0 \, (l = A, m = B).$$

Частные случаи расположения прямой относительно системы координат

Прямая $Ax + By + C = 0$ коллинеарна оси $Ox \Leftrightarrow A = 0$... направляющий вектор $(-B, A)$ этой прямой коллинеарен оси $Ox \Leftrightarrow A = 0$

$$By + C = 0, y = b(b = -\frac{C}{B}).$$

Прямая $Ax + By + C = 0$ коллинеарна оси $Oy \Leftrightarrow B = 0$

$$Ax + C = 0, x = a(a = -\frac{C}{A}).$$

Прямая $Ax + By + C = 0$ проходит через начало координат $\Leftrightarrow C = 0$... только в этом случае начало координат удовлетворяет уравнению прямой

$$Ax + By = 0.$$

Параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ с направляющим вектором $\boldsymbol{a} = (l, m)$, в общей ДСК имеют вид

$$x = x_0 + tl, \quad y = y_0 + tm.$$

Замечания

1. Параметр $t = \dfrac{\overrightarrow{M_0M}}{\boldsymbol{a}}$ можно рассматривать как координату точки M на данной прямой в следующей СК: M_0 – начало координат, $\boldsymbol{a}$ – масштабный вектор,
2. Если ввести радиусы-векторы $\overrightarrow{OM_0} = \boldsymbol{r_0}$ и $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r}$ точек M_0 и M, то получим параметрическое уравнение прямой в векторной форме:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_0} + t\boldsymbol{a}.$$

.

Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, заданные относительно общей ДСК в одном из следующих видов:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$x = x_0 + t(x_2 - x_1), \quad y = y_0 + t(y_2 - y_1).$$

Замечание

Здесь t есть координата точки M на прямой M_1M_2 в СК: M_1 – начало координат, M_2 – единичная точка.

Пусть прямая p не проходит через начало общей ДСК и пересекает обе оси координат: ось Ox в $(a, 0)$, а Oy в $(0, b)$.

Определение

Абсцисса a и ордината b точек пересечения прямой с осями Ox и Oy называются отрезками, отсекаемыми прямой на осях координат.

Уравнение прямой будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Определение

Угловым коэффициентом k прямой p, заданной относительно общей ДСК, называется отношение второй координаты направляющего вектора $\boldsymbol{a} = (l, m)$ этой прямой к его первой координате:

$$k = \frac{m}{l}.$$

Замечание

В ДПСК угловой коэффициент k прямой, пересекающий ось Oy, равен тангенсу угла α от оси Ox до направляющего вектора этой прямой:

$$k = \tan\alpha.$$

Определение

Уравнение прямой, проходящей через точку $M(x_0, y_0)$ и имеющей угловой коэффициент k, в общей ДСК имеет вид

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Замечания

1. Уравнение прямой p с угловым коэффициентом k и пересекающей ось Oy в точке $(0, b)$, в общей ДСК имеет вид

$$y = kx + b,$$

2. Число b называют «начальной ординатой» прямой p.

Пусть относительно общей ДСК заданы две прямые

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Н. и Д. условие того, что эти прямые пересекаются, имеет вид

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}.$$

Н. и Д. условие того, что эти прямые параллельны, имеет вид

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

Н. и Д. условие того, что эти прямые совпадают, имеет вид

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Определение

Собственным пучком прямых называется множество всех прямых, проходящих через одну точку (центр пучка) и лежащих в одной плоскости.

Определение

Несобственным пучком прямых называется множество всех параллельных между собой прямых, лежащих в одной плоскости.

Теорема 1.

Для того чтобы три прямые, заданные общими уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0, \quad A_3x + B_3y + C_3 = 0$$

относительно общей ДСК, принадлежали одному пучку Н. и Д., чтобы выполнялось условие

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Теорема 2.

Пусть в общей ДСК заданы две различные прямые l_1 и l_2 общими уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Для того чтобы третья прямая l_3, заданная общим уравнением

$$A_3x + B_3y + C_3 = 0$$

относительно той же СК, принадлежала пучку, определяемому двумя первыми прямыми, Н. и Д., чтобы левая часть уравнения прямой l_3 была линейной комбинацией левых частей уравнений прямых l_1 и l_2.

Взаимное расположение трёх прямых I

Пусть относительно общей ДСК заданы три прямые

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0, \quad A_3x + B_3y + C_3 = 0.$$

Обозначим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix},$$

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}, \quad \delta_3 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

1. $\Delta \neq 0$, $\delta_1 \neq 0$, $\delta_2 \neq 0$, $\delta_3 \neq 0$ – прямые попарно пересекаются и не принадлежат одному пучку,
2. $\Delta \neq 0$ и только один из определителей δ_1, δ_2, δ_3 равен нулю – две прямые параллельны, а третья их пересекает,
3. $\Delta = 0$, $\delta_1 \neq 0$, $\delta_2 \neq 0$, $\delta_3 \neq 0$ – прямые различны и проходят через одну точку,

Взаимное расположение трёх прямых II

4. $\Delta = 0$ и только один из определителей δ_1, δ_2, δ_3 равен нулю – две прямые совпадают, а третья их пересекает,
5. $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$ $(\Delta = 0)$, но коэффициенты ни одной пары уравнений не пропорциональны – прямые попарно параллельны,
6. $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$ и коэффициенты только одной пары уравнений пропорциональны – две прямые совпадают, а третья им параллельна,
7. Если соответствующие коэффициенты всех уравнений пропорциональны – прямые совпадают.

Геометрический смысл неравенства первой степени с двумя неизвестными I

Теорема 1.

Пусть относительно общей ДСК прямая задана общим уравнением

$$Ax + By + C = 0.$$

Тогда для всех точек $M(x, y)$, лежащих по одну сторону от этой прямой, выполняется неравенство

$$Ax + By + C > 0,$$

а для точек $M(x, y)$, лежащих по другую сторону от этой прямой, – неравенство

$$Ax + By + C < 0.$$

Теорема 2.

Пусть относительно общей ДСК прямая задана общим уравнением

$$Ax + By + C = 0.$$

Тогда, если отложить главный вектор $\boldsymbol{n} = (A, B)$ этой прямой от любой точки $M_0(x_0, y_0)$ этой прямой $\overrightarrow{M_0P} = \boldsymbol{n}$, то конец P отложенного вектора будет находиться в положительной полуплоскости от данной прямой ($Ax + By + C > 0$).

Теорема.

Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой, заданной общим уравнением

$$Ax + By + C = 0$$

относительно ДПСК, вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Определение

Уравнение
$$Ax + By + C = 0$$
прямой, заданной относительно ДПСК, называется *нормальным*, если нормальный вектор $\boldsymbol{n} = (A, B)$ к этой прямой является единичным, т. е. $A^2 + B^2 = 1$.

Для приведения к нормальному виду общего уравнения прямой $Ax + By + C = 0$, заданной относительно ДПСК, необходимо умножить левую часть данного уравнения на число (*нормирующий множитель*)

$$\mu = \pm\frac{1}{|\boldsymbol{n}|} = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Тогда получим два нормальных уравнения
$$\pm\frac{Ax + By + C = 0}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Коэффициенты нормального уравнения прямой $Ax + By + C = 0$ имеют следующий геометрический смысл:

$$A = \boldsymbol{ni} = \cos\alpha, \quad B = \boldsymbol{nj} = \cos\beta, \quad |C| = p$$

где α и β – углы между нормальным вектором прямой $\boldsymbol{n}$ и осями координат, p – расстояние от начала координат до прямой.

Нормальное уравнение прямой может быть представлено в виде

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0,$$

где α – угол от положительного направления оси Ox до вектора $\overrightarrow{OP}$, P – основание перпендикуляра, опущенного из начала координат на данную прямую.

Для приведения общего уравнения прямой к нормальному виду необходимо его умножить на нормирующий множитель μ, взятый со знаком противоположным знаку C, т.к.:

$$\mu C = -p < 0.$$

Замечания

1. Если прямая задана нормальным уравнением относительно ДПСК, то расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0)$ до этой прямой определяется по формуле:
$$d = |Ax_0 + By_0 + C| = |x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p|,$$
2. Иногда расстоянию от точки до прямой приписывают знак, называют такое расстояние отклонением и пишут
$$\delta = x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p.$$

Угол между двумя прямыми

Пусть относительно ДПСК заданы две прямые

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Угол между векторами $\boldsymbol{n}_1 = (A_1, B_1)$ и $\boldsymbol{n}_2 = (A_2, B_2)$ равен одному из углов, образованных этими прямыми:

$$\cos\varphi_{1,2} = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}.$$

Замечания

1. Н. и Д. условие перпендикулярности двух прямых $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.
2. Если прямые параллельны, то $\cos\varphi_{1,2} = \pm1$ ($\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$).

Угол от одной прямой до другой в ориентированной плоскости

Пусть относительно ДПСК заданы две прямые

$$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Тогда для угла φ от прямой l_1 до прямой l_2 справедливо

$$\tan\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2},$$

где $k_1 = -\dfrac{A_1}{B_1}$ $k_2 - \dfrac{A_2}{B_2}$ – соответственно угловые коэффициенты прямых l_1 и l_2.

Замечания

Если прямые не параллельны и не совпадают с осью Oy, то Н. и Д. условие их перпендикулярности $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ можно представить в виде

$$k_1k_2 + 1 = 0$$

или

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$