АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

ШИМАНЧУК Дмитрий Викторович
shymanchuk@mail.ru

Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики – процессов управления

Санкт-Петербург — 2015 г.

Уравнение плоскости, проходящей через точку и компланарной двум неколлинеарным векторам

В общей ДСК уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 и компланарной двум неколлинеарным векторам $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ представляется в виде

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0,$$

где $(x_0; y_0; z_0)$ — координаты точки M_0, $\langle l_1; m_1; n_1 \rangle$ и $\langle l_2; m_2; n_2 \rangle$ — соответственно координаты векторов $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$.

Общее уравнение плоскости

В общей ДСК плоскость выражается уравнением первой степени:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Замечание

1. Вид уравнения следует из предыдущего,
2. Вектор $\boldsymbol{n}\langle A; B; C\rangle$ называется *главным вектором плоскости*. В случае ДПСК является *нормальным вектором плоскости*.

Параметрическое уравнение плоскости

Параметрическое уравнение плоскости в векторной форме:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + u\boldsymbol{a}_1 + v\boldsymbol{a}_2,$$

$$u \in (-\infty; +\infty),\ v \in (-\infty; +\infty),$$

где $\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор точек плоскости, $\boldsymbol{r}_0$ – радиус-вектор точки M_0, $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ — векторы компланарные искомой плоскости и неколлинеарные между собой.

Параметрическое уравнение плоскости в скалярной форме:

$$\begin{cases} x = x_0 + ul_1 + vl_2, \\ y = y_0 + um_1 + vm_2, \\ z = z_0 + un_1 + vn_2, \end{cases} \qquad u \in (-\infty; +\infty),\ v \in (-\infty; +\infty),$$

где $(x; y; z)$ — координаты точек плоскости, $(x_0; y_0; z_0)$ — координаты точки M_0, $\langle l_1; m_1; n_1 \rangle$ и $\langle l_2; m_2; n_2 \rangle$ — соответственно координаты векторов $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$.

Уравнение плоскости, проходящей через две точки и компланарной данному вектору

Уравнение плоскости проходящей через две точки M_1, M_2 и компланарной вектору $\boldsymbol{a}$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0,$$

где $(x_1; y_1; z_1)$ и $(x_2; y_2; z_2)$ — соответственно координаты точек M_1 и M_2, $\langle l; m; n \rangle$ — координаты вектора $\boldsymbol{a}$.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки не лежащие на одной прямой

Уравнение плоскости, проходящей через три точки M_1, M_2, M_3 не лежащие на одной прямой

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

где $(x_1; y_1; z_1)$, $(x_2; y_2; z_2)$, $(x_3; y_3; z_3)$ — соответственно координаты точек M_1, M_2, M_3.

В общей ДСК

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

где плоскость не проходит через начало системы координат и пересекает её оси в точках с координатами: Ox в $(a; 0; 0)$, Oy в $(0; b; 0)$, Oz в $(0; 0; c)$.

Каноническое уравнение прямой, проходящей через точку M_0 с направляющим вектором $\boldsymbol{a}$

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

где $(x_0;y_0;z_0)$ – координаты точки M_0 через которую проходит прямая, $\langle l;m;n\rangle$ – координаты направляющего вектора $\boldsymbol{a}$.

Параметрическое уравнение прямой в векторной форме

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a},$$

$$t \in (-\infty; +\infty),$$

где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точек прямой, $\boldsymbol{r}_0$ — радиус-вектор точки M_0, $\boldsymbol{a}$ — направляющий вектор прямой.

Параметрическое уравнение прямой в скалярной форме

$$\begin{cases} x = x_0 + tl, \\ y = y_0 + tm, \\ z = z_0 + tn, \end{cases} \qquad t \in (-\infty; +\infty),$$

где $(x; y; z)$ — координаты точек прямой, $(x_0; y_0; z_0)$ — координаты точки M_0, $\langle l; m; n\rangle$ — координаты направляющего вектора прямой $\boldsymbol{a}$.

Уравнение прямой проходящей через две точки M_1 и M_2

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

где $(x_1; y_1; z_1)$, $(x_2; y_2; z_2)$ — соответственно координаты точек M_1 и M_2.

В параметрическом виде

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1), \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1), \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1), \end{cases} \qquad t \in (-\infty; +\infty).$$