АНАЛИТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

уравнение Лагранжа второго рода

ШИМАНЧУК Дмитрий Викторович
d.shimanchuk@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики – процессов управления

Санкт-Петербург — 2018 г.

Для механической системы со стационарными идеальными связями уравнение Лагранжа второго рода записывается в виде:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = \overline{1, n}, \tag{1}$$

где n – число степеней свободы механической системы,

$T = \sum_{\nu=1}^{N} \dfrac{m_\nu v_\nu^2}{2} = \sum_{\nu=1}^{N} \dfrac{m_\nu (\mathbf{v}_\nu, \mathbf{v}_\nu)}{2}$ – кинетическая энергия системы,

$Q_j = \sum_{\nu=1}^{N} \left(\mathbf{F}_\nu, \dfrac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_j}\right)$ – обобщённая сила, соответствующая обобщённой координате q_j,

N – число точек механической системы.

Определение

Обобщённой силой Q_j, соответствующая обобщённой координате q_j, называют скалярную величину, определяемую отношением элементарной работы сил, действующих на виртуальном перемещении механической системы, вызванном элементарным приращением δq_j координаты q_j, к величине этого приращения:

$$Q_j = \frac{\delta A}{\delta q_j} = \frac{\sum_{\nu=1}^{N} (\mathbf{F}_\nu, \delta \mathbf{r}_\nu)}{\delta q_j}, \quad \delta q_k = 0,\ k = 1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n. \qquad (2)$$

Пусть на механическую систему действуют силы имеющие потенциал (потенциальные силы) и не имеющие потенциала (непотенциальные силы):

$$Q_j = Q_{j1} + Q_{j2},$$

где
Q_{j1} – обобщённая сила, соответствующая потенциальным силам,
Q_{j2} – обобщённая сила, соответствующая непотенциальным силам.

Если на рассматриваемую механическую систему действуют только потенциальные силы, то обобщённая сила определяется формулой:

$$Q_j = Q_{j1} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Следовательно

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad j = \overline{1, n},$$

где $T = T(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$, $\Pi = \Pi(\mathbf{q}, t)$.

Определение

Функцию $L = T - \Pi$ называется *функцией Лагранжа* или *кинетическим потенциалом*:

$$L = L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t).$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = \overline{1, n}. \tag{3}$$

Определение

Система уравнений (3) называется *уравнениями Лагранжа второго рода для консервативных систем.*

Уравнение (1) через функцию L запишется в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_{j2}, \quad j = \overline{1, n}. \tag{4}$$

Определение

Обобщённые координаты, которые не входят явно в выражение кинетического потенциала L, называются *циклическими координатами*.

Пусть среди n обобщённых координат $q_1, q_2, \ldots, q_{\widetilde{n}}$, $\widetilde{n} < n$, являются циклическими.

Следовательно

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = \overline{1, \widetilde{n}},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0, \quad j = \overline{1, \widetilde{n}},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = c_j = const, \quad j = \overline{1, \widetilde{n}}. \tag{5}$$

Определение

Равенства (5) называются *циклическими интегралами*.

Для того, чтобы определить обобщенную силу Q_j, действующую по координате q_j, $j = \overline{1, n}$, можно использовать непосредственно формулу:

$$Q_j = \sum_{\nu=1}^{N} \left(\mathbf{F}_\nu, \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_j} \right), \quad j = \overline{1, n};$$

определение обобщенных сил через элементарную работу, откуда:

$$Q_j = \frac{\delta A}{\delta q_j}, \quad \delta q_k = 0,\ k = 1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n;$$

формулу для случая потенциальных обобщенных сил:

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad j = \overline{1, n},$$

где функция Π в случае стационарного потенциального силового поля может быть определена как работа по перемещению механической системы из некоторого её состояния, соответствующее Π, в состояние, соответствующее нулевому уровню потенциальной энергии $\Pi_0 = 0$:

$$\Pi = -A_{t_0 t} = A_{t t_0}.$$