ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

ШИМАНЧУК Дмитрий Викторович
shymanchuk@mail.ru

Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики – процессов управления

Санкт-Петербург – 2013 г.

Абсолютное пространство представляет собой трехмерное, однородное и изотропное неподвижное евклидово пространство.

Абсолютное время считается непрерывно изменяющейся величиной, оно течёт от прошлого к будущему. Время однородно, одинаково во всех точках пространства и не зависит от движения материи.

Для удобства исследования геометрического характера движения в кинематике можно взять вполне определённое твёрдое тело, т. е. тело, форма которого неизменна, и условится считать его неподвижным. Движение других тел по отношению к этому телу будем в кинематике называть *абсолютным движением*. В качестве неподвижного тела отсчёта обычно выбирают систему трёх не лежащих в одной плоскости осей, называемую *системой отсчёта*, которая по определению считается *неподвижной (абсолютной) системой отсчёта* или *неподвижной (абсолютной) системой координат*. За единицу измерения времени принемается секунда: 1 с $= 1/86400$ сут.

За единицу длины принимается, например 1 м, 1 см и т. п.

Основные кинематические характеристики движения: положение, скорость, ускорение.

Момент времени однозначно определяется соответствующим числом t, числом секунд, прошедшим между начальным и рассматриваемым моментом: $-\infty < t < +\infty$.

Под *материальной точкой* понимается частица материи, достаточно малая для того, чтобы её положение и движение можно было определить как объекта, не имеющего размеров.

Геометрическое место последовательных положений движущейся точки называется её *траекторией*.

Если при $t_1 < t < t_2$ траектория — прямая линия, то движение точки прямолинейное, в противном случае криволинейное.

Механической системой, или *системой материальных точек*, или, для краткости, просто *системой* мы будем называть выделенную каким-либо образом совокупность материальных точек.

Задать движение точки (системы) — значит дать способ определения положения точки (всех точек, образующих систему) в любой момент времени.

Задачи кинематики состоят в разработке способов задания движения и методов определения скорости, ускорения и других кинематических величин точек, составляющих механическую систему.

Радиус-вектор $\mathbf{r}$ движущейся точки P относительно O можно задать как вектор-функцию времени:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t).$$

Производная от $\mathbf{r}$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

называется *скоростью точки* P.

Производная от $\mathbf{v}$

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

называется *ускорением точки* P.

В ДПСК радиус-вектор $\mathbf{r}$ может быть задан тремя скалярными функциями $x(t), y(t), z(t)$ — координатами точки P:

$$\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

Для скорости имеем выражение

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k},$$

где $v_x = \dot{x}, v_y = \dot{y}, v_z = \dot{z}$ – проекции скорости $\mathbf{v}$ на оси координат.

Величина скорости v и её направление определяются равенствами

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2},$$

$$\cos(\mathbf{v}, \mathbf{i}) = \frac{\dot{x}}{v}, \quad \cos(\mathbf{v}, \mathbf{j}) = \frac{\dot{y}}{v}, \quad \cos(\mathbf{v}, \mathbf{k}) = \frac{\dot{z}}{v}.$$

Аналогично для ускорения получаем

$$\mathbf{w}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = w_x\mathbf{i} + w_y\mathbf{j} + w_z\mathbf{k},$$

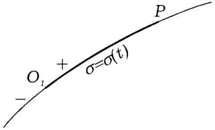
где $w_x = \ddot{x}, w_y = \ddot{y}, w_z = \ddot{z}$ — проекции скорости $\mathbf{w}$ на оси координат.

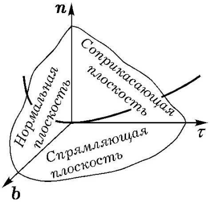
Величина скорости w и её направление определяются равенствами

$$w = |\mathbf{w}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2},$$

$$\cos(\mathbf{w}, \mathbf{i}) = \frac{\dot{x}}{w}, \quad \cos(\mathbf{w}, \mathbf{j}) = \frac{\dot{y}}{w}, \quad \cos(\mathbf{w}, \mathbf{k}) = \frac{\dot{z}}{w}.$$

Естественный способ задания движения I





Радиус-вектор $\mathbf{r}$ движущейся точки P относительно какой-либо фиксированной точки O_1 будет сложной функцией времени:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\sigma(t)).$$

Известно, что

$$\boldsymbol{\tau}(\sigma) = \frac{d\mathbf{r}}{d\sigma}, \qquad \frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\sigma} = \frac{1}{\rho}\mathbf{n}(\sigma).$$

Тогда, для скорости и ускорения, получаем

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dt} = v_\tau \boldsymbol{\tau},$$

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_\tau}{dt}\boldsymbol{\tau} + v_\tau \frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d^2\sigma}{dt^2}\boldsymbol{\tau} + \frac{v_\tau^2}{\rho}\mathbf{n} = \mathbf{w}_\tau + \mathbf{w}_n.$$

Следствие. Ускорение всегда лежит в соприкасающейся плоскости.

- Если $w = 0$, то движение точки называется равномерным;
- Так как $v^2 = v_\tau^2 = \dot\sigma^2$, то $dv^2/dt = 2\dot\sigma\ddot\sigma$. Движение будет ускоренным, если знаки величин $\dot\sigma$ и $\ddot\sigma$ одинаковы, и замедленным, если их знаки противоположны;
- Если на интервале времени $t_1 < t < t_2$ $\ddot\sigma = 0$, то на этом интервале движение равномерное.
- Если на каком-то интервале $w_n = 0$, а $v \neq 0$, то на этом интервале движение прямолинейное ($\rho = \infty$).

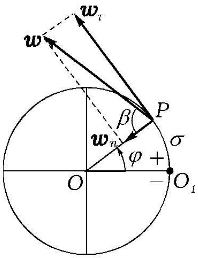
Замечание. Если вместо одной ДПСК возьмём другую ДПСК, неподвижную относительно первой, то изменится векторное уравнение $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ движения точки P, но скорость и ускорение не изменятся.

Упражнение. Используя теорему Гюйгенса, определить радиус кривизны эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

в произвольной его точке.

Круговое движение



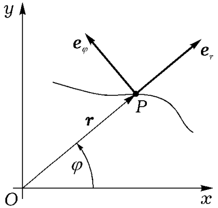
$$\sigma = R\varphi \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = R\dot{\varphi}\boldsymbol{\tau},\ \mathbf{w}_\tau = R\ddot{\varphi}\boldsymbol{\tau},\ \mathbf{w}_n = \frac{v^2}{\rho}\mathbf{n} = \dot{\varphi}^2 R\mathbf{n}.$$

Величины $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$ называют соответственно угловой скоростью и угловым ускорением радиуса OP. Тогда

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4},\ \tan\beta = \frac{w_\tau}{w_n} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}.$$

При равномерном круговом движении $\varepsilon = 0$ и $\beta = 0$.

Пусть заданы функции $r = r(t)$ и $\varphi = \varphi(t)$. Найдём скорость и ускорение точки P.



Единичные векторы e_r и e_φ задают направления двух взаимно перпендикулярных осей: радиальной и трансверсальной соответственно.

$$\mathbf{e}_r = (\cos\varphi, \sin\varphi)', \ \mathbf{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi)'.$$

$$v = (\dot{x}, \dot{y})' = (\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi)',$$

$$w = (\ddot{x}, \ddot{y})' = ((\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\cos\varphi - (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\sin\varphi, (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\sin\varphi + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\cos\varphi)'.$$

Для проекций скорости и ускорения имеем

$$v_r = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_r) = \dot{r}, \quad v_\varphi = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_\varphi) = r\dot{\varphi};$$

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad w_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}.$$

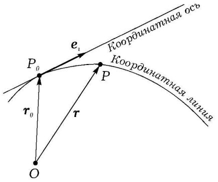
Связь между декартовыми и криволинейными координатами задаётся равенством

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

где x, y, z — функции q_1, q_2, q_3, которые считаем дважды непрерывно дифференцируемыми.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1(t), q_2(t), q_3(t)).$$

Первой координатной линией, проходящей через P_0 с координатами q_{10}, q_{20}, q_{30}, называется кривая $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_{20}, q_{30})$. Аналогично определяются *вторая* и *третья координатные линии*. Касательную к i-ой координатной линии в точке P_0 называют *i-ой координатной осью*, проходящей через P_0.



Единичный вектор i-й координатной оси может быть записан в виде

$$\mathbf{e}_i = \frac{1}{H_i}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial x}{\partial q_i}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\mathbf{k},$$

$$H_i = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}.$$

Здесь производные вычисляются в точке P_0. Величины H_i называют *коэффициентами Ламе.*

Если векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ взаимно ортогональны, то криволинейные координаты называют *ортогональными.*

Найдём проекции v_{q_i} и w_{q_i} $(i = 1, 2, 3)$ скорости $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ точки P на оси криволинейной системы координат.

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3}\dot{q}_3 = v_{q_1}\mathbf{e}_1 + v_{q_2}\mathbf{e}_2 + v_{q_3}\mathbf{e}_3,$$

где v_{q_i} вычисляются по формулам

$$v_{q_i} = H_i\dot{q}_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

$$w_{q_i} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{e}_i = \frac{1}{H_i}\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}\right) = \frac{1}{H_i}\left(\frac{d}{dt}\left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}\right) - \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}\right)\right).$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_i \partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_i \partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_i \partial q_3}\dot{q}_3,$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_1 \partial q_i}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_2 \partial q_i}\dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_3 \partial q_i}\dot{q}_3.$$

$\mathbf{r}$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция от q_1, q_2, q_3, тогда можно менять порядок дифференцирования по $q_k \quad (k = 1, 2, 3)$ и q_i. Поэтому

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_i}.$$

Кроме того, справедливо равенство

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_i}.$$

Тогда
$$w_{q_i} = \frac{1}{H_i}\left(\frac{d}{dt}\left(\mathbf{v}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\dot{q}_i}\right) - \mathbf{v}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial q_i}\right).$$
Пусть $T = v^2/2$, тогда
$$w_{q_i} = \frac{1}{H_i}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right) \quad (i = 1, 2, 3).$$

Упражнение. Найдите скорость и ускорение точки в цилиндрической
$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z$$
и сферической
$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$$
системах криволинейных координат.