А Н А Л И Т И Ч Е С К А Я   Г Е О М Е Т Р И Я
ТЕОРИЯ ИНВАРИАНТОВ

ШИМАНЧУК Дмитрий Викторович
shymanchuk@mail.ru

Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики – процессов управления

Санкт-Петербург — 2013г.

Определение

Целая рациональная функция от коэффициентов многочлена второй степени называется *ортогональным инвариантом* этого многочлена относительно ортогонального преобразования, если она сохраняет своё значение при неоднородных преобразованиях переменных.

Теорема

Четыре функции

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$K_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

являются ортогональными инвариантами целой рациональной функции второй степени от трёх аргументов:

$$f_1 = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44}.$$

Теорема

Функции

$$K_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{14} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{24} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{34} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$K_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{14} & a_{24} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix},$$

являются инвариантами однородного ортогонального преобразования.

Ортогональные инварианты III

Замечания

1. Функции K_2 и K_3 называются «семиинвариантами» (полуинвариантами).
2. Если функция

$$f_1 = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44}$$

однородным ортогональным преобразованием может быть приведена к виду

$$f_2 = b_{11}x_1^2 + b_{22}y_1^2 + 2b_{14}x_1 + 2b_{24}y_1 + a_{44},$$

то K_3 является ортогональным инвариантом, а если f_1 однородным ортогональным преобразованием может приведена к виду

$$f_2 = b_{11}x_1^2 + 2b_{14}x_1 + a_{44},$$

то K_2 и K_3 является ортогональным инвариантом.

Теорема

Необходимыми и достаточными признаками того, что поверхность второго порядка является поверхностью I, II, III, IV или V групп:

Группа	Признак
I	$I_3 \neq 0,$
II	$I_3 = 0, K_4 \neq 0$
III	$I_3 = 0, K_4 = 0, I_2 \neq 0$
IV	$I_3 = 0, K_4 = 0, I_2 = 0, K_3 \neq 0$
V	$I_3 = 0, K_4 = 0, I_2 = 0, K_3 = 0, I_1 \neq 0$

Утверждение 1.

Если поверхность второго порядка, заданная общим уравнением относительно прямоугольной системы координат, является поверхностью I группы, то её простейшее уравнение имеет вид

$$\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 z_2^2 + \frac{K_4}{I_3} = 0,$$

где λ_1, λ_2, λ_3 – корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{24} \\ a_{14} & a_{24} & a_{44} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0.$$

Определение канонического уравнения при помощи инварианта III

Утверждение 2.

Если поверхность второго порядка, заданная общим уравнением относительно прямоугольной системы координат, является поверхностью II группы, то её простейшее уравнение имеет вид

$$\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 \pm 2\sqrt{-\frac{K_4}{I_2}} z_2 = 0,$$

где λ_1, λ_2, – отличные от нуля корни характеристического уравнения.

Утверждение 3.

Если поверхность второго порядка, заданная общим уравнением относительно прямоугольной системы координат, является поверхностью III группы, то её простейшее уравнение имеет вид

$$\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + \frac{K_3}{I_2} = 0,$$

где λ_1, λ_2, – отличные от нуля корни характеристического уравнения.

Определение канонического уравнения при помощи инварианта IV

Утверждение 4.

Если поверхность второго порядка, заданная общим уравнением относительно прямоугольной системы координат, является поверхностью IV группы, то её простейшее уравнение имеет вид

$$I_1 x_2^2 \pm 2\sqrt{-\frac{K_2}{I_1}} y_2 = 0.$$

Утверждение 5.

Если поверхность второго порядка, заданная общим уравнением относительно прямоугольной системы координат, является поверхностью V группы, то её простейшее уравнение имеет вид

$$I_1 x_2^2 + \frac{K_2}{I_1} = 0.$$