АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
ТЕОРИЯ ИНВАРИАНТОВ

ШИМАНЧУК Дмитрий Викторович
shymanchuk@mail.ru

Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики – процессов управления

Санкт-Петербург — 2013г.

Определение

Целая рациональная функция

$$I(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33})$$

от коэффициентов целой рациональной функции

$$f = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$$

называется *ортогональным инвариантом*, если имеет место равенство

$$I(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33}) = I(a'_{11}, a'_{12}, a'_{22}, a'_{13}, a'_{23}, a'_{33}),$$

где a'_{11}, a'_{12}, a'_{22}, a'_{13}, a'_{23}, a'_{33} – коэффициенты целой рациональной функции

$$f' = a'_{11}x_1^2 + 2a'_{12}x_1y_1 + a'_{22}y_1^2 + 2a'_{13}x_1 + 2a'_{23}y_1 + a'_{33},$$

которую получаем, производя ортогональное преобразование

$$\begin{cases} x = c_{11}x_1 + c_{12}y_1 + c_{13}, \\ y = c_{21}x_1 + c_{22}y_1 + c_{23}, \end{cases}$$

над переменными x и y целой рациональной функции f.

Теорема

Три функции

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$K_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$I_1 = a_{11} + a_{22}$$

являются ортогональными инвариантами целой рациональной функции

$$f = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}.$$

Теорема

Функция

$$K_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

является инвариантом однородного ортогонального преобразования.

Замечание

Если функция

$$f = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$$

однородным ортогональным преобразованием может быть приведена к виду

$$f' = a'_{11}x_1^2 + 2a'_{13}x_1 + a'_{33}$$

, то K_2 является и ортогональным инвариантом.

Теорема

Необходимым и достаточным условием того, что линия второго порядка, заданная общим уравнением относительно ДПСК, относилась:

1. к группе $\oplus$ – $I_2 \neq 0$.
2. к группе $\ominus$ – $I_2 = 0$, $K_3 \neq 0$.
3. к группе $\oslash$ – $I_2 = 0$, $K_3 = 0$, $I_1 \neq 0$.

Теорема

Если линия второго порядка задана общим уравнением относительно ДПСК, то её канонические уравнения имеют вид

- ⊕ $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \dfrac{K_3}{I_2} = 0,$
- ⊖ $\lambda_1 x_1^2 \pm 2\sqrt{-\dfrac{K_3}{I_1}} y_1 = 0,$
- ⊘ $I_1 x_1^2 + \dfrac{K_2}{I_1} = 0,$

где λ_1 и λ_2 – корни характеристического уравнения

$$|I_2 - \lambda E| = 0$$

или

$$\lambda^2 - I_1 \lambda + I_2 = 0.$$

Теорема

Необходимыми и достаточными признаками каждого из девяти классов ($\oplus$, $\ominus$, $\oslash$) линии второго порядка являются:

1. эллипс – $I_2 > 0,\ I_1 K_3 < 0$,
2. мнимый эллипс – $I_2 > 0,\ I_1 K_3 > 0$,
3. две мнимые пересекающие прямые – $I_2 > 0,\ K_3 = 0$,
4. гипербола – $I_2 < 0,\ K_3 \neq 0$,
5. две пересекающие прямые – $I_2 < 0,\ K_3 = 0$,
6. парабола – $I_2 = 0,\ K_3 \neq 0$,
7. две параллельные прямые – $I_2 = 0,\ K_3 = 0,\ K_2 < 0$,
8. две мнимые параллельные прямые – $I_2 = 0,\ K_3 = 0,\ K_2 > 0$,
9. две совпадающие прямые – $I_2 = 0,\ K_3 = 0,\ K_2 = 0$.