# Аналитическая динамика управляемых систем
## Аксиоматические основы динамики уравнения Ньютона

ШИМАНЧУК Дмитрий Викторович
d.shimanchuk@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики – процессов управления

Санкт-Петербург – 2019 г.

Основные задачи динамики:

- по заданным (известным) движениям вычислить (определить) силы, которые эти движения создают (первая или основная задача динамики);
- по заданным (известным) силам определить движения механической системы (вторая или обратная задача динамики).

Основные задачи механики управляемого движения:

- построение законов изменения сил (законов управления), обеспечивающих существование механических движений с заданными свойствами;
- исследование свойств движений при заданных классах управлений.

**Определение 1**

Система координат, неподвижная в абсолютном пространстве или движущаяся относительно этого пространства поступательно с постоянной по величине и направлению скоростью, называется *инерциальной системой координат*, или иначе, *инерциальной системой отсчета*.

Связь между абсолютными и инерциальными координатами материальной точки (*преобразование Галилея*):

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_O(t_0) + \mathbf{v}_O(t - t_0) + A\boldsymbol{\rho}.$$

Для инерциальных систем отсчета выполняются равенства:

$$\boldsymbol{\omega}_e = 0,\ \boldsymbol{\varepsilon}_e = 0 \Rightarrow A - const.$$

Связь скоростей точки относительно абсолютной и инерциальной систем координат имеет вид:

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_r.$$

Тогда из теоремы Кориолиса следует, учитывая $\mathbf{v}_O = \mathbf{const}$, что

$$\mathbf{w}_a = \mathbf{w}_r.$$

**Принцип относительности Галилея**: *Инерциальные системы отсчета с точки зрения механических движений эквивалентны во всех отношениях* или *все законы и аксиомы механики справедливы в любой инерциальной системе координат.*

**Определение 2**

*Силой* называют причину, которая вызывает возникновение ускорения материальной точки. *Сила* – это действие (явление), которое создает ускорение материальной точки, а через ускорение создает движение этой точки.

$$\mathbf{w} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 = \mathbf{const}.$$

**Аксиома 1 (первый закон Ньютона или закон инерции)**

*Если на материальную точку не действует сила в течение времени $\Delta t$, то точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения с постоянной по величине и направлению скоростью в течение указанного времени.*

## Замечание

Пусть на отрезке времени $\Delta t$ материальная точка совершает равномерное прямолинейное движение со скоростью

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{const},$$

тогда на этом промежутке времени

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0) = \boldsymbol{\rho}(t)$$

и

$$\mathbf{w} = \frac{d^2\boldsymbol{\rho}}{dt^2} = \mathbf{0},$$

т. е. при таком движении на $\Delta t$ отсутствует ускорение.

**Определение 3**

Способность точки сопротивляться изменению ее скорости называется *инертностью точки*. Количественная мера инертности материальной точки называется ее *массой*.

Свойства массы $m$:

- масса пропорциональна количеству вещества, заключенного в материальной точке,
- масса – это положительная скалярная величина, обладающая свойством аддитивности,
- масса не зависит от движения, а также от условий и обстоятельств, в которых происходит движение (если только не происходит отделение или присоединение массы во время движения); в этом смысле она является постоянной величиной.

## Аксиома 2

*Произведение массы материальной точки на ее ускорение равно силе, которая вызывает движение материальной точки:*

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F}.$$

## Следствия

- сила – вектор, сонаправленный с ускорением материальной точки;
- масса – это коэффициент пропорциональности в зависимости ускорения от силы (мера инерции);
- модуль силы совпадает с модулем ускорения, умноженным на массу;
- сила – связанный вектор (связан с материальной точкой, ускорение которой создает эта сила).

### Второй закон Ньютона

*Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует:*

$$\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{F}.$$

**Определение 4**

Материальная точка, на которую действует сила и которой эта сила придает ускорение, называется *точкой приложения силы*. Прямая, коллинеарная ускорению точки и проходящая через точку приложения силы, называется *линией действия силы*.

В механике принято, что сила – *это векторная функция, которая зависит от положения точки, ее скорости и, быть может, времени, но не зависит от ускорения точки*.

Зависимость силы от координат материальных точек, скоростей и времени, называется *законом изменения силы*.

**Аксиома 3 (третий закон Ньютона)**

*Если одна материальная точка действует на другую, т. е. дает ей ускорение, то и вторая точка действует на первую (т.е. также дает ускорение первой точке).*
*Силы, приложенные к каждой из точек, равны по величине и направлены вдоль прямой, соединяющей эти две точки, в противоположные стороны.*

### Определение 5

Сила $\mathbf{F}$ называется *потенциальной*, если существует функция $\Pi(\mathbf{r}, t)$ (*потенциальная энергия*), такая, что

$$\mathbf{F} = -\mathbf{grad}\Pi(\mathbf{r}, t) := -\nabla\Pi := -\frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{r}}.$$

### Определение 6

Сила $\mathbf{F}$ называется *консервативной* потенциальной силой, если $\Pi$ не зависит явно от времени:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial t} = 0.$$

### Определение 7

Сила $\mathbf{F}$ называется *гироскопической*, если она линейно зависит от скорости точки $\mathbf{v}$ и перпендикулярна к $\mathbf{v}$.

Сила Лоренца:

$$\mathbf{F}_{\text{Л}} = q[\mathbf{v}, \mathbf{B}].$$

### Определение 8

Сила $\mathbf{F}$ называется *диссипативной*, если она противодействует движению и направлена против вектора скорости точки $\mathbf{v}$.

Сила вязкого трения:

$$\mathbf{F}_{\text{вт}_1} = -k_1 \mathbf{v},$$

$$\mathbf{F}_{\text{вт}_2} = -k_2 v^2 \frac{\mathbf{v}}{v}, \quad v > 1\text{м/с},$$

где $k_1$, $k_2$ – положительные коэффициенты.

**Определение 9**

Инерциальное пространство или какая-либо его часть называется *силовым полем*, если в каждой точке этого пространства (этой части пространства) выполняются следующие условия:

- в указанной точке определена (задана) сила, которая будет действовать на материальную точку, помещенную в нее (в указанную точку пространства);
- величина силы и ее направление действия зависят от координат точки пространства, и быть может, времени.

Основные свойства силовых полей:

- Силовые поля порождаются материальными объектами. Силовые воздействия поля на материальные точки, движущиеся в этих полях, передаются с конечной скоростью (со скоростью света).
- Постулируется: силовые поля, возникающие от разных материальных объектов, а также силовые поля различной природы, возникающие от одного материального объекта, суммируются.
- Движение материальных точек в силовых полях не оказывает влияния на сами силовые поля, т.е. не меняют этих силовых полей, (классическая механика не рассматривает процессы, происходящие в силовых полях).

## Аксиома 4 (независимости действия сил)

*Если на материальную точку действует несколько сил, то общее ускорение точки равно векторной сумме ускорений, полученных точкой от действия каждой силы в отдельности.*

## Следствие 1

Результат действия одной силы на материальную точку не зависит от того, оказывают или нет воздействие на эту точку другие силы.

## Следствие 2

Действие нескольких сил, приложенных к одной материальной точке, можно заменить одной силой, равной векторной сумме этих сил:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{F}_i.$$

Вектор $\mathbf{F}$ называется *равнодействующей* системы сил $\{\mathbf{F}_i\}$, $i = \overline{1, k}$.

**Аксиома 5 (принцип детерминированности Ньютона-Лапласа)**

*Движение механической системы, состоящей из $N$ материальных точек $P_\nu$, $\nu = \overline{1, N}$, однозначно определено, если заданы начальные условия и силы, которые являются причиной этого движения.*

Описанная система аксиом в совокупности с принципом относительности Галилея называется *аксиоматикой Ньютона-Галилея*.

**Определение 10**

*Механической системой* называют совокупность конечного числа материальных точек, взаимосвязанных между собой таким образом, что движение любой ее точки зависит от движения хотя бы одной другой точки, входящей в эту совокупность.

Способы задания связей:

- кинематический способ задания связей;
- динамический способ задания связей.

### Определение 11

Математическое соотношение, описывающее связь кинематическим способом, называется *математической моделью связи*:

$$f(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N, t) = 0,$$

$$f(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N, t) \leq 0 \, (\geq 0).$$

### Определение 12

Если на механическую систему не накладываются связи, описываемые кинематическим способом, то такая система называется *свободной*.

Пусть задана механическая система: $P_\nu$, $m_\nu$, $\nu = \overline{1, N}$, на которую действует система сил

$$\mathbf{F}_\nu, \ \nu = \overline{1, N}.$$

## Определение 13

*Внутренними силами* называются силы взаимодействия между собой точек, входящих в состав механической системы.

$$\mathbf{F}_\nu^{(int)} = \sum_{\mu=1, \mu\neq\nu}^{N} \mathbf{F}_{\mu\nu}^{(int)}.$$

## Определение 14

*Внешними* называются силы взаимодействия точек $P_\nu$, $\nu = \overline{1, N}$, механической системы с точками внешней среды и силы воздействия внешних силовых полей, создаваемых материальными объектами, не входящими в состав механической системы.

$$\mathbf{F}_\nu^{(ext)}.$$

## Уравнения Ньютона для свободной механической системы IV

### Замечание 1

Для механической системы из одно точки все силы – внешние.

### Определение 15

Механическая система называется *замкнутой*, если на неё не действуют внешние силы.

$$m_\nu \frac{d^2\mathbf{r}_\nu}{dt^2} = \mathbf{F}_\nu^{(ext)} + \mathbf{F}_\nu^{(int)} = \mathbf{F}_\nu, \quad \nu = \overline{1, N}. \tag{2.1}$$

**Определение 16**

Уравнения (2.1) называются *уравнениями Ньютона* или *уравнениями Ньютона-Галилея движения свободной механической системы.*

$$\begin{cases} m_\nu \ddot{x}_\nu = F_{x\nu}^{(ext)} + F_{x\nu}^{(int)} = F_{x\nu}, \\ m_\nu \ddot{y}_\nu = F_{y\nu}^{(ext)} + F_{y\nu}^{(int)} = F_{y\nu}, \\ m_\nu \ddot{z}_\nu = F_{z\nu}^{(ext)} + F_{z\nu}^{(int)} = F_{z\nu}, \quad \nu = \overline{1, N}. \end{cases} \tag{2.2}$$

Учитывая кинематические соотношения $\mathbf{w}_\nu = \dfrac{d\mathbf{v}_\nu}{dt}$, $\mathbf{v}_\nu = \dfrac{d\mathbf{r}_\nu}{dt}$, уравнения (2.2) приводятся к системе

$$\begin{cases} \dot{x}_\nu = v_{x\nu}, \\ \dot{y}_\nu = v_{y\nu}, \\ \dot{z}_\nu = v_{z\nu}, \\ m_\nu \dot{v}_{x\nu} = F_{x\nu}^{(ext)} + F_{x\nu}^{(int)} = F_{x\nu}, \\ m_\nu \dot{v}_{y\nu} = F_{y\nu}^{(ext)} + F_{y\nu}^{(int)} = F_{y\nu}, \\ m_\nu \dot{v}_{z\nu} = F_{z\nu}^{(ext)} + F_{z\nu}^{(int)} = F_{z\nu}, \quad \nu = \overline{1, N}. \end{cases} \tag{2.3}$$

### Замечание

Систему (2.3) можно разделить на две части, которые принято называть *кинематическими* и *динамическими* уравнениями.

Важное значение в динамике имеют *законы сохранения*:

- *импульса*:

$$\mathbf{P} = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{p}_\nu, \quad \mathbf{p}_\nu = m_\nu \mathbf{v}_\nu;$$

- *момента импульса (кинетического момента)*:

$$\mathbf{K} = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{k}_\nu, \quad \mathbf{k}_\nu = [\mathbf{r}_\nu, \mathbf{p}_\nu];$$

- *энергии*:

$$E = T + \Pi,$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \mathbf{v}_\nu^2, \quad \Pi = \sum_{\nu=1}^{N} \Pi_\nu^{(ext)}(\mathbf{r}_\nu) + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N}\sum_{\mu=1,\nu\neq\mu}^{N} \Pi_{\mu\nu}^{(int)}(|\mathbf{r}_\mu - \mathbf{r}_\nu|),$$

$$\mathbf{F}_\nu^{(ext)} = -\frac{\partial \Pi_\nu^{(ext)}(\mathbf{r}_\nu)}{\partial \mathbf{r}_\nu}, \quad \mathbf{F}_{\mu\nu}^{(int)} = -\frac{\partial \Pi_{\mu\nu}^{(int)}(|\mathbf{r}_\mu - \mathbf{r}_\nu|)}{\partial \mathbf{r}_\nu}.$$

# Законы сохранения II

Дифференцирование по времени импульса механической системы имеем

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\mathbf{p}_\nu}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N} \left( \mathbf{F}_\nu^{(ext)} + \mathbf{F}_\nu^{(int)} \right) = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu^{(ext)} = \mathbf{F}^{(ext)}.$$

Для замкнутой механической системы

$$\mathbf{F}_\nu^{(ext)} := 0 \Rightarrow \mathbf{F}^{(ext)} = 0, \mathbf{P} = \mathbf{P}_0 = \mathbf{const}.$$

Дифференцирование по времени импульса механической системы имеем

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\mathbf{k}_\nu}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N} \left[\mathbf{r}_\nu, \mathbf{F}_\nu^{(ext)}\right] = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{M}_\nu^{(ext)} = \mathbf{M}^{(ext)},$$

где $\mathbf{M}^{(ext)}$ – *главный момент* внешних сил $\mathbf{F}_\nu^{(ext)}$.

Для замкнутой механической системы

$$\mathbf{F}_\nu^{(ext)} := 0 \Rightarrow \mathbf{M}^{(ext)} = 0, \mathbf{K} = \mathbf{K}_0 = \mathbf{const}.$$

Полная энергия механической системы $E$ сохраняет своё значение, т. е. $E = h = \mathrm{const}$, если все действующие силы консервативные потенциальные и/или гироскопические.

Из теоремы об изменении кинетической энергии механической системы $T$ в случае консервативных потенциальных сил следует равенство

$$dT = dA = -d\Pi.$$

Откуда

$$dT + d\Pi = d(T + \Pi) = 0 \Rightarrow E = T + \Pi = h = const.$$