АНАЛИТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

уравнение Гамильтона-Якоби

ШИМАНЧУК Дмитрий Викторович
d.shimanchuk@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики – процессов управления

Санкт-Петербург — 2019 г.

Рассмотрим метод Якоби для нахождения решения голономных систем с идеальными удерживающими связями в потенциальном поле сил.

Решение уравнений Гамильтона можно получить используя понятие производящей функции канонического преобразования. Справедливо, что для любой производящей функции $S(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$ $(S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t))$ уравнения движения не изменяются для $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ и $\widetilde{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$ (свойство ковариантности гамильтоновых систем):

$$\frac{\partial S}{\partial q_j} = p_j, \ \frac{\partial S}{\partial Q_j} = -P_j \left(\frac{\partial S}{\partial q_j} = p_j, \ \frac{\partial S}{\partial P_j} = Q_j \right), \qquad (1)$$
$$\widetilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t}.$$

Уравнения движения с новым Гамильтонианом имеют вид

$$\begin{cases} \dot{Q}_j = \dfrac{\partial \widetilde{H}}{\partial P_j}, \\ \dot{P}_j = -\dfrac{\partial \widetilde{H}}{\partial Q_j}. \end{cases}$$

Задача состоит в определении такой производящей функции S, которой соответствует

$$\widetilde{H} := 0. \tag{2}$$

Тогда для новых обобщённых координат и импульсов выполняется

$$\dot{Q}_j = 0,\ \dot{P}_j = 0.$$

Замечание

В фазовом пространстве новых координат система стационарна.

Уравнение Гамильтона–Якоби III

Из (1) и (2) следует уравнение для определения производящей функции S:

$$H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \qquad (3)$$

Определение

Уравнение (4) называется *уравнением Гамильтона–Якоби.*

Замечание

Уравнение Гамильтона–Якоби является нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных, решение которого описывает динамику механической системы с любым количеством степеней свободы.

Уравнение Гамильтона–Якоби IV

Производящая функция $S(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$ ($S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$) с основными переменными $\mathbf{q}$, t ($\mathbf{Q}$ рассматриваются как параметры ($\mathbf{P}$ рассматриваются как параметры)) удовлетворяет уравнению в частных производных Гамильтона–Якоби, при этом для $S(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$ ($S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$) должно выполняться условие

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{Q}}\right) \neq 0 \left(\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{P}}\right) \neq 0\right).$$

Окончательно движение механической системы определяется из уравнений

$$-\beta_j = \frac{\partial S}{\partial \alpha_j}, \, p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j} \left(\alpha_j = \frac{\partial S}{\partial \beta_j}, \, p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}\right),$$

где α_j, β_j – произвольные постоянные.

Уравнение Гамильтона–Якоби V

Определение

Решение $S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t)$ $(S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\beta}, t))$ уравнения Гамильтона–Якоби, содержащее n произвольных постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ называется *полным интегралом* этого уравнения, если выполняется условие

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{q} \partial \boldsymbol{\alpha}}\right) \neq 0 \left(\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{q} \partial \boldsymbol{\beta}}\right) \neq 0\right).$$

Теорема Якоби

Если $S(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$ $(S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t))$ – некоторый полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби, то конечные уравнения движения голономной системы с данной функцией Гамильтона H могут быть записаны в виде

$$\begin{cases} -\beta_j = \dfrac{\partial S}{\partial \alpha_j}, \\ p_j = \dfrac{\partial S}{\partial q_j}. \end{cases} \quad \left(\begin{cases} \alpha_j = \dfrac{\partial S}{\partial \beta_j}, \\ p_j = \dfrac{\partial S}{\partial q_j}. \end{cases}\right)$$

Основным методом решения уравнения Гамильтона–Якоби является *метод разделения переменных*. Если функция Гамильтона не зависит явно от времени и, например, обобщённая координата q_1 и сопряжённый ей импульс $p_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1}$ входят в уравнение как

$$H\left(f_1\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right), q_2, \ldots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_s}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \tag{4}$$

Тогда можно положить, что $f_1\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right) = \alpha_1$, следовательно

$$\frac{\partial S}{\partial q_1} = g_1(q_1, \alpha_1),$$

где α_1 – произвольная постоянная.

Таким образом, это позволяет уменьшить число переменных в уравнении и если процесс можно продлить по каждой переменной с соответствующей ей импульсом, то решение уравнения Гамильтона–Якоби принимает вид

$$\begin{aligned} S &= \int g_1(q_1, \alpha_1) dq_1 + \int g_2(q_2, \alpha_1, \alpha_2) dq_2 + \ldots + \\ &+ \int g_s(q_s, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) dq_s - \int H(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) dt + C. \end{aligned}$$

где α_j – произвольные постоянные, C — константа интегрирования.

Алгоритм решения задач методом Якоби I

1. Рассматриваемая система голономна с идеальными удерживающими связями в потенциальном поле сил.
2. Вводим обобщённые координаты $\mathbf{q}$.
3. Определяем $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ и $\Pi(\mathbf{q}, t)$ энергии.
4. Составляем функцию Лагранжа $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \Pi(\mathbf{q}, t)$.
5. Находим обобщённые импульсы $\mathbf{p} = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$
6. Составляем функцию Гамильтона $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$.
7. Строим и решаем уравнение Гамильтона–Якоби относительно функции $S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t)$ $(S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\beta}, t))$:
$$H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$
8. Определяем общее решение:
$$-\boldsymbol{\beta} = \frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{\alpha}}, \ \mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} \left(\boldsymbol{\alpha} = \frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{\beta}}, \ \mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}\right).$$