# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

## ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

ШИМАНЧУК Дмитрий Викторович
d.shimanchuk@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики – процессов управления

Санкт-Петербург – 2019 г.

*Силой инерции материальной точки* называют геометрическую сумму сил противодействия движущейся материальной точки телам, которые сообщают ей ускорение.

Сила инерции материальной точки численно равна произведению массы точки на её ускорение и направлена противоположно ускорению:

$$\mathbf{\Phi} = -m\mathbf{w}.$$

*Касательной силой инерции* называют составляющую силы инерции, равную произведению массы материальной точки на её касательное ускорение и направленое противоположно касательному ускорению:

$$\mathbf{\Phi}_\tau = -m\mathbf{w}_\tau.$$

*Нормальной силой инерции* называют составляющую силы инерции, равную произведению массы материальной точки на её нормальное ускорение и направленое противоположно касательному ускорению:

$$\mathbf{\Phi}_n = -m\mathbf{w}_n.$$

*Нормальную силу инерции материальной точки* вращающегося тела называют центробежной силой:

$$\Phi_n = m\omega^2 R.$$

# Принцип Даламбера III

*Принцип Даламбера для материальной точки*: если к равнодействующей всех действующих на точку сил добавить силу инерции, то силы можно считать в данный момент уравновешенными, т. е.

$$\mathbf{F} + \mathbf{\Phi} = 0.$$

**Теорема**

Если к заданным активным силам, действующим на точки механической системы, и реакциям наложенных связей присоединить силы инерции, то получиться уравновешенная система сил:

$$\mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}_\nu + \mathbf{\Phi}_\nu = \mathbf{0},$$

где $\mathbf{F}_\nu$ – действующая на $\nu$-ю точку активная сила, $\mathbf{R}_\nu$ – реакция наложенной на $\nu$-ю точку связи, $\mathbf{\Phi}_\nu$ – сила инерции $\nu$-ой точки.

Принцип Даламбера позволяет решать задачи динамики с помощью методов статики.

Силы инерции изменяют реакции связей, при этом в телах, которые осуществляют связь, производят действия аналогичные известным силам (возникают внутренние напряжения, при которых возможны деформация и разрушения).

Реакции связей, которые вызваны силами инерции, называют *динамическими силами.*

При любом движении тела главный вектор сил инерции равен произведению массы тела и ускорения центра масс, направление которого противоположно ускорению центра масс:

$$\mathbf{\Phi}_g = -m\mathbf{w}_C.$$

Силы инерции тела эквивалентны главному вектору сил инерции и одной паре сил, момент которой равен главному моменту сил инерции относительно точки приложения главного вектора. Главный вектор не зависит от центра приведения, его эквивалентность системе сил инерции возможна только совместно с главным моментом сил инерции, который зависит не только от центра приведения, но движения и распределения массы по телу.

# Принцип Даламбера VI

В простейших частных случаях движения твёрдого тела справедливо:

1. *При поступательном движении* главный момент сил инерции относительно центра масс равен нулю, силы инерции приводятся к равнодействующей, приложенной в центре масс: $\mathbf{\Phi} = -m\mathbf{w}_C$.

2. *При вращении плоской фигуры вокруг оси, перпендикулярной её плоскости в центре масс*, силы инерции эквивалентны паре сил с моментом, равным произведению момента инерции относительно оси вращения и углового ускорения фигуры с обратным знаком: $\mathbf{M}_C^{\Phi} = -I_C\boldsymbol{\varepsilon}$.

3. *При общем движении плоской фигуры* силы инерции эквивалентны главному вектору, приложенному в центре масс, и паре сил с моментом, равным моменту инерции, помноженному на угловое ускорение: $\mathbf{\Phi} = -m\mathbf{w}_C$, $\mathbf{M}_C^{\Phi} = -I_C\boldsymbol{\varepsilon}$.

### Теорема (*принцип Даламбера–Лагранжа*)

В механической системе с идеальными связями сумма элементарных работ, совершаемых активными силами и силами инерции на любом возможном (виртуальном) перемещении равна нулю.

$$\sum_{\nu=1}^{N}\left(\delta A_\nu^F+\delta A_\nu^\Phi\right)=0, \tag{1}$$

где $\delta A_\nu^F$ – работа совершаемая активными силами, $\delta A_\nu^\Phi$ – работа совершаемая силами инерции.

### Замечание

Принцип Даламбера–Лагранжа является одним из основных принципов теоретической механики, который даёт общий метод решения задач динамики и статики.

## Общее уравнение динамики II

В проекции на декартовы оси координат (1) имеет вид

$$\sum_{\nu=1}^{N}\left((F_{x\nu} - m_\nu \ddot{x}_\nu)\delta x_\nu + (F_{y\nu} - m_\nu \ddot{y}_\nu)\delta y_\nu + (F_{z\nu} - m_\nu \ddot{z}_\nu)\delta z_\nu\right) = 0. \tag{2}$$

Уравнение (2) называют *общим уравнением динамики* механической системы с идеальными связями.