# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
## ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

ШИМАНЧУК Дмитрий Викторович
shymanchuk@mail.ru

Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики – процессов управления

Санкт-Петербург — 2011г.

# Основные понятия динамики материальных точек I

*Системой материальных точек* называется совокупность материальных точек, положения и движения которых взаимосвязаны.

Различают *свободные* и *несвободные* системы. Если на движение точек системы не наложены наперёд заданные ограничения, не зависящие от закона движения, то система называется *свободной*. *Несвободной* называется такая система материальных точек, на движение которых наложены связи.

Связи делятся на *геометрические* и *кинематические*. *Геометрические* связи накладывают ограничения на координаты точек системы, *кинематические* — на скорости точек системы.

Условия, ограничивающие свободу движения материальных точек системы, выражаются некоторыми уравнениями, называемыми *уравнениями связей*.

Уравнения геометрической связи имеют вид

$$f_j(t, x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k_1.$$

Уравнения кинематической связи записываются в форме

$$\varphi_j(t, x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \ldots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k_2.$$

# Основные понятия динамики материальных точек II

Согласно классификации немецкого физика Г. Герца, связи делятся на *голономные* и *неголономные*. *Голономными* называют связи, уравнения которых могут быть проинтегрированы, в противном случае они *неголоноиные*, или *неинтегрируемые*.

Различают также связи *неудерживающие* и *удерживающие*. Связь называется *удерживающей*, если она ограничивает движение как в данном направлении, так и в противоположном (см. уравнение кинематической связи). Связь называется *неудерживающей*, если она ограничивает движение в данном направлении, но не ограничивает в противоположном, определяется неравенством

$$\varphi_j(t, x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n) \leqslant 0, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Различают связи *стационарные* и *нестационарные*. Если в уравнение связи явно время не входит, то связь называется *стационарной*, в противном случае — *нестационарной*.

В динамике, так же как и в статике, используют две классификации сил, приложенных к системе материальных точек: *силы внутренние* и *внешние*; *активные силы* и *реакции связей*.

# Масса. Центр масс системы

*Массой системы*, состоящей из $n$ материальных точек, называется сумма масс точек системы

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i.$$

*Центром масс* системы материальных точек называется точка радиус-вектор которой определяется равенством

$$\overrightarrow{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{r}_i}{M}$$

Дифференцируя по времени соотношение для радиус-вектора, определяющего положение центра масс, получим его скорость и ускорение

$$\overrightarrow{v}_C = \dot{\overrightarrow{r}}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\overrightarrow{r}}_i}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{v}_i}{M},$$

$$\overrightarrow{w}_C = \dot{\overrightarrow{v}}_C = \ddot{\overrightarrow{r}}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\overrightarrow{v}}_i}{M}.$$

# Дифференциальные уравнения движения свободной системы материальных точек

Рассмотрим систему $n$ материальных точек, на которые действуют внутренние силы $\overrightarrow{F}_i^{(i)}$ (здесь и далее $(i)$ обозначает только то, что силы внутренние) и внешние $\overrightarrow{F}_i^{(e)}$ силы.Для произвольной материальной точки системы уравнение движения имеет вид

$$m_i \overrightarrow{w}_i = \overrightarrow{F}_i^{(i)} + \overrightarrow{F}_i^{(e)},$$

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Этим $n$ уравнениям движения в векторной форме соответствуют $3n$ дифференциальных уравнение в координатной форме

$$m_i \ddot{x}_i = X_i^{(i)} + X_i^{(e)}, \quad m_i \ddot{y}_i = Y_i^{(i)} + Y_i^{(e)}, m_i \ddot{z}_i = Z_i^{(i)} + Z_i^{(e)},$$

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

# Дифференциальные уравнения движения несвободной системы материальных точек

Если система материальных точек несвободная, то на неё действуют активные силы $\overrightarrow{F}_i$ и реакции связей $\overrightarrow{R}_i$.

Пусть несвободная система состоит из $n$ материальных точек. Освободив систему от связей, заменив их реакциями, дифференциальные уравнения движения несвободной системы в векторной форме имеют вид

$$m_i \overrightarrow{w}_i = \overrightarrow{F}_i + \overrightarrow{R}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

или

$$m_i \ddot{\overrightarrow{r}}_i = \overrightarrow{F}_i + \overrightarrow{R}_i,$$

где $\overrightarrow{F}_i$ — равнодействующая активных сил, приложенных к $i$-ой точке системы; $\overrightarrow{R}_i$ — реакция связи, приложенная в $i$-ой точке системы.

Уравнениям движения в векторной форме соответствуют дифференциальные уравнение в координатной форме

$$m_i \ddot{x}_i = X_i + R_{ix}, \quad m_i \ddot{y}_i = Y_i + R_{iy}, \quad m_i \ddot{z}_i = Z_i + R_{iz}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Неизвестных величин больше, чем уравнений ($6n > 3n$), это не позволяет решить вторую основную задачу динамики. В общем виде задачу о движении несвободной системы материальных точек без дополнительных соотношений, которым удовлетворяют связи, решить нельзя. Задача может быть разрешима только для идеальных связей.

# Основные теоремы динамики

Установим соотношения между мерами механического движения системы материальных точек (или одной материальной точки) и силами, характеризующими динамический эффект действия окружающих тел на каждую материальную точку системы.

1. Основные теоремы динамики характеризуют отдельные свойства механического движения и дают частичную информацию об этом движении. При решении динамических задач, требующих определения отдельных свойств движения системы, основные теоремы динамики являются наиболее эффективными методами исследования;
2. Основные теоремы динамики можно представить как в дифференциальной, так и в интегральных формах.

# Теорема о движении центра масс

**Теорема.** *Центр масс системы материальных точек движется как свободная материальная точка, масса которой равна массе всей системы и на которую действует сила, равная главному вектору внешних сил.*

Доказательство. Пусть система состоит из $n$ материальных точек, на каждую из которых действуют внешняя $\overrightarrow{F}_i^{(e)}$ и внутренняя $\overrightarrow{F}_i^{(i)}$ силы.

$$m_i \overrightarrow{w}_i = \overrightarrow{F}_i^{(e)} + \overrightarrow{F}_i^{(i)} \; (i = 1, 2, \ldots, n) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{w}_i = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F}_i^{(e)} + \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F}_i^{(i)}.$$

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F}_i^{(i)} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{w}_i = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F}_i^{(e)}.$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{w}_i = M \overrightarrow{w}_C, \quad \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F}_i^{(e)} = \overrightarrow{F}^{(e)} \Rightarrow M \overrightarrow{w}_C = \overrightarrow{F}^{(e)},$$

ч. и т. д.

## Следствия теоремы о движении центра масс

1. Одними только внутренними силами нельзя изменить характер движения центра масс системы материальных точек. Внутренние силы могут оказывать косвенное влияние на движение центра масс только через внешние силы.
2. Если главный вектор $\overrightarrow{F}^{(e)}$ внешних сил, действующих на систему равен нулю, то центр масс её находится в покое или движется равномерно и прямолинейно в зависимости от начальных условий. Пара сил, приложенная к твёрдому телу, не может изменить характер движения его центра масс, так как главный вектор пары сил равен нулю. Пара сил может вызвать только вращение.
3. Если одна из проекций главного вектора внешних сил на ось неподвижной системы координат равна нулю, то проекция скорости центра масс на эту ось не изменяется. В случае, когда система состоит из двух материальных точек и движение одной их них из каких-либо дополнительных соображений задано, то при $\overrightarrow{F}^{(e)} = 0$ теорема о движении центра масс позволяет определить движение второй материальной точки. Если же задано движение центра масс системы материальных точек, то теорема о движении центра масс позволяет определить главный вектор внешних сил, действующих на точки системы.

## Количество движения системы материальных точек

*Количеством движения (мерой механического движения)* материальной точки называется вектор, равный произведению массы точки на вектор её скорости

$$\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v}.$$

*Количеством движения материальной системы* называется главный вектор (векторная сумма) количеств движения материальных точек, входящих в систему

$$\overrightarrow{Q} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{v}_i$$

**Теорема.** *Количество движения системы материальных точек (твёрдого тела) равно произведению массы системы (твёрдого тела) на скорость её (его) центра масс.*

Доказательство. Из определения радиус-вектора центра масс имеем

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{v}_i = M\overrightarrow{v}_C.$$

Из определения количества движения материальной системы получим

$$\overrightarrow{Q} = M\overrightarrow{v}_C,$$

# Теорема об изменении количества движения системы материальных точек I

**Теорема.** *Производная по времени от количества движения системы материальных точек равна главному вектору внешних сил, действующих на систему.*

Доказательство. Пусть система состоит из $n$ материальных точек. На произвольную $i$-ю точку системы действуют внешняя $\overrightarrow{F}_i^{(e)}$ и внутренняя $\overrightarrow{F}_i^{(i)}$ силы. Количество движения этой точки равно $m_i\overrightarrow{v}_i$, тогда

$$\frac{d(m_i\overrightarrow{v}_i)}{dt} = \overrightarrow{F}_i^{(e)} + \overrightarrow{F}_i^{(i)} \; (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Суммируя левые и правые части этого уравнения, получим

$$\frac{d\overrightarrow{Q}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F}_i^{(e)} + \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F}_i^{(i)} \; (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Главный вектор внутренних сил равен нулю, а $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F}_i^{(e)} = \overrightarrow{F}^{(e)}$ — главный вектор внешних сил, тогда окончательно получим

$$\frac{d\overrightarrow{Q}}{dt} = \overrightarrow{F}^{(e)}.$$

# Теорема об изменении количества движения системы материальных точек II

Следствия из теоремы об изменении количества движения системы материальных точек (аналогичные по содержанию следствиям из теоремы о движении центра масс):

1. Одними внутренними силами нельзя изменить количество движения системы
2. Если главный вектор внешних сил, действующих на систему, равен нулю, то количество движения материальной системы остаётся постоянным.
3. Если проекция главного вектора внешних сил, приложенных к системе, на некоторую неподвижную в инерциальной системе координат ось равна нулю, то проекция количества движения на эту ось остаётся постоянной.

# Теорема об изменении количества движения системы материальных точек III

Второе и третье следствия из теоремы называются *законами сохранения* количества движения материальной системы.

**Теорема.** *Изменение количества движения системы материальных точек за некоторый промежуток времени* $[t_0, t]$ *равно полному импульсу главного вектора внешних сил, приложенных к точкам системы, за тот же промежуток времени.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из предыдущей теоремы справедливо равенство

$$\overrightarrow{Q} = \overrightarrow{F}^{(e)} dt.$$

Проинтегрируем это равенство в пределах от $t_0$ до $t$, получим

$$\overrightarrow{Q}(t) - \overrightarrow{Q}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \overrightarrow{F}^{(e)} dt.$$

# Теорема об изменении количества движения системы материальных точек IV

Произведение $\overrightarrow{F}^{(e)}dt$ называется элементарным импульсом силы и обозначается $d\overrightarrow{S}^{(e)}$. Полный импульс силы

$$\overrightarrow{S}^{(e)} = \int\limits_{t_0}^{t} \overrightarrow{F}^{(e)}dt.$$

Окончательно получаем

$$\overrightarrow{Q}(t) - \overrightarrow{Q}(t_0) = \overrightarrow{S}^{(e)}$$

или

$$\overrightarrow{Q} - \overrightarrow{Q}_0 = \overrightarrow{S}^{(e)},$$

ч. и т. д.

Последние два равенства выражают теорему об изменении количества движения материальной системы в интегральной форме.

Теорема импульсов находит применение в теории удара и в гидродинамике.

# Кинетический момент системы материальных точек

*Кинетическим моментом* $\overrightarrow{K}_O$ материальной системы, или *главным моментом* количества движения точек материальной системы относительно центра, называется векторная сумма моментов количеств движения точек системы относительно того же центра

$$\overrightarrow{K}_O = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{k}_{Oi} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{r}_i \times m_i \overrightarrow{v}_i.$$

Пусть твёрдое тело вращается вокруг оси $Oz$ с угловой скоростью $\overrightarrow{\omega}$. Рассмотрим элементарный объём массы $dm$, отстоящий от оси вращения на расстоянии $r$. Скорость этого объёма будет $v = r\omega$, количество движения — $dQ = vdm = r\omega dm$, а элементарный кинетический момент относительно оси $Oz$ — $dK_z = rdQ = rvdm = r^2\omega dm$. Для всего тела кинетический момент будет $K_z = \omega \int_{(M)} r^2 dm$.

Интеграл $\int_{(M)} r^2 dm$ по всей массе тела, зависящий только от характера распределения массы в теле, называется моментом инерции тела относительно оси вращения и обозначается $I_z = \int_{(M)} r^2 dm$. Тогда

$$K_z = I_z\omega.$$

Таким образом, кинетический момент твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равен произведению момента инерции тела относительно неподвижной оси вращения на угловую скорость.

# Кинетический момент системы материальных точек при сложном движении I

Установим связь между кинетическим моментом системы материальных точек при рассмотрении движения условно неподвижной $A_{XYZ}$ и в подвижной $Oxyz$ системах координат, неизменно связанной с некоторым телом или системой материальных точек.

Обозначим $\overrightarrow{r}_i = \overrightarrow{r}_O + \overrightarrow{\boldsymbol{\rho}}_i$ — радиус-вектор $i$-ой точки в системе $A_{XYZ}$, где $\overrightarrow{\boldsymbol{\rho}}_i$ — радиус-вектор этой точки в системе $Oxyz$, $\overrightarrow{r}_O$ — радиус-вектор точки $O$.

Найдём формулу для определения кинетического момента $\overrightarrow{K}_A$ относительно начала системы координат $A_{XYZ}$, если подвижная система координат $Oxyz$ совершает поступательное движение вместе с полюсом $O$ и вращательное вокруг него.

По определению

$$\overrightarrow{K}_A = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{r}_i \times m_i \overrightarrow{v}_i$$

или

$$\overrightarrow{K}_A = \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{r}_O + \overrightarrow{\boldsymbol{\rho}}_i) \times m_i \overrightarrow{v}_i.$$

## Кинетический момент системы материальных точек при сложном движении II

Учитывая далее, что $\overrightarrow{r}_O$ не зависит от индекса суммирования и определение центра масс, последней формуле можно придать вид

$$\overrightarrow{K}_A = \overrightarrow{r}_O \times \overrightarrow{Q} + \overrightarrow{K}_O,$$

где $\overrightarrow{K}_O = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\boldsymbol{\rho}}_i \times m_i \overrightarrow{v}_i$ — кинетический момент системы относительно центра $O$.

Рассмотрим кинетический момент системы $\overrightarrow{K}_O$, учитывая, что скорость $i$-ой точки тела определяется соотношением

$$\overrightarrow{v}_i = \overrightarrow{v}_O + \overrightarrow{\boldsymbol{\omega}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{\rho}}_i + \frac{\widetilde{d}\overrightarrow{\boldsymbol{\rho}}_i}{dt}.$$

Тогда

$$\overrightarrow{K}_O = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\boldsymbol{\rho}}_i \times m_i(\overrightarrow{v}_O + \overrightarrow{\boldsymbol{\omega}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{\rho}}_i + \frac{\widetilde{d}\overrightarrow{\boldsymbol{\rho}}_i}{dt}).$$

# Кинетический момент системы материальных точек при сложном движении III

$\overline{v}_O$ и $\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}$ не зависят от индекса суммирования и $\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{\boldsymbol{\rho}}_i = M\boldsymbol{\rho}_C$, окончательно получаем

$$\overrightarrow{K}_O = M\overrightarrow{\boldsymbol{\rho}_C} \times \overrightarrow{v}_O + \overrightarrow{K}_O^{\omega} + \overrightarrow{K}_O^{\prime r}.$$

Здесь $\overrightarrow{K}_O^{\prime r} = \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{\boldsymbol{\rho}}_i \times \dfrac{\widetilde{d}\overrightarrow{\boldsymbol{\rho}}_i}{dt}$, $\overrightarrow{K}_O^{\omega} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\boldsymbol{\rho}}_i \times m_i(\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{\rho}}_i)$ — кинетический момент, обусловленный только вращением системы относительно точки $O$.

На практике наибольший интерес представляет случай, когда материальная система неизменяема, т. е. случай твёрдого тела. Тогда $\dfrac{\widetilde{d}\overrightarrow{\boldsymbol{\rho}}_i}{dt} = 0$, $\overrightarrow{K}_O^{\prime r} = 0$ и

$$\overrightarrow{K}_A = \overrightarrow{r}_O \times \overrightarrow{Q} + \overrightarrow{\boldsymbol{\rho}_C} \times M\overrightarrow{v}_O + \overrightarrow{K}_O^{\omega}.$$

В частности, если начало подвижной системы координат находится в центре масс $C$, то $\overrightarrow{\boldsymbol{\rho}}_C = 0$ и соотношение для кинетического момента упрощается

$$\overrightarrow{K}_A = \overrightarrow{r}_C \times \overrightarrow{Q} + \overrightarrow{K}_C^{\omega}$$

# Кинетический момент системы материальных точек при сложном движении IV

Полученные результаты могут быть сформулированы в виде теорем для твёрдого тела:

1. *Кинетический момент тела относительно неподвижного центра $A$ равен моменту количества движения тела, приложенному в полюсе $O$, относительно того же центра, сложенному с векторным произведением $\overrightarrow{\boldsymbol{\rho}_C} \times M\overrightarrow{v}_O$, а так же с моментом количества движения тела во вращательном движении вокруг полюса.*
2. *Если начало подвижной системы координат совпадает с центром масс, то: кинетический момент твёрдого тела относительно неподвижного центра $A$ равен сумме момента количества движения тела относительно того же центра $A$ в предположении, что вся масса тела сосредоточена в центре масс и момента количества движения тела во вращательном движении вокруг центра масс.*

# Теорема об изменении кинетического момента. Теорема Резаля I

**Теорема.** *Производная по времени от кинетического момента системы относительно неподвижного центра $O$ равна главному моменту внешних сил относительно того же центра.*

Доказательство. Пусть система состоит из $n$ материальных точек. На произвольную $i$-ю точку системы действуют внешняя $\overrightarrow{F}_i^{(e)}$ и внутренняя $\overrightarrow{F}_i^{(i)}$ силы. Тогда из теоремы об изменении кинетического момента для точки

$$\frac{d\overrightarrow{k}_{Oi}}{dt} = \overrightarrow{M}_O(\overrightarrow{F}_i^{(e)}) + \overrightarrow{M}_O(\overrightarrow{F}_i^{(i)}), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

Суммируя левые и правые части равенства по $n$, получим

$$\frac{d\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{k}_{Oi}}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{M}_O(\overrightarrow{F}_i^{(e)}) + \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{M}_O(\overrightarrow{F}_i^{(i)}),$$

# Теорема об изменении кинетического момента. Теорема Резаля II

где $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{k}_{Oi} = \overrightarrow{K}_O$ — кинетический момент системы или главный момент количества движения. Учитывая, что $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M}_O(\overrightarrow{F}_i^{(i)}) = 0$ и $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M}_O(\overrightarrow{F}_i^{(e)}$ $\overrightarrow{M}_O$, получаем

$$\frac{d\overrightarrow{K}_O}{dt} = \overrightarrow{M}_O,$$

ч. и т. д.

**Теорема.** *Изменение кинетического момента материальной системы относительно неподвижного центра $O$ за некоторый промежуток времени $[t_0, t]$ равного главному моменту импульсов внешних сил, приложенных к точкам системы, за тот же промежуток времени.*

Доказательство. Из предыдущей теоремы следует

$$d\overrightarrow{K}_O = \overrightarrow{M}_O dt.$$

Интегрируя это соотношение в пределах от $t_0$ до $t$, получим

$$\overrightarrow{K}_O(t) - \overrightarrow{K}_O(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} \overrightarrow{M}_O dt.$$

# Теорема об изменении кинетического момента. Теорема Резаля II

Так как главный момент

$$\overrightarrow{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{r}_i \times \overrightarrow{F}_i^{(e)},$$

тогда

$$\overrightarrow{K}_O(t) - \overrightarrow{K}_O(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{r}_i \times \overrightarrow{F}_i^{(e)} dt = \int\limits_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{r}_i \times d\overrightarrow{S}_i^{(e)} = \overrightarrow{L}_O^{(e)},$$

где $\overrightarrow{L}_O^{(e)} = \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{r}_i \times d\overrightarrow{S}_i^{(e)}$ главный момент импульсов внешних сил относительно центра $O$. Таким образом окончательно получим

$$\overrightarrow{K}_O(t) - \overrightarrow{K}_O(t_0) = \overrightarrow{L}_O^{(e)},$$

ч. и т. д.

# Теорема об изменении кинетического момента. Теорема Резаля IV

**Теорема (Резаля).** *Скорость конца вектора кинетического момента системы относительно неподвижной точки O равна главному моменту всех внешних сил относительно той же точки.*

Доказательство. Из кинематики известно, что первая производная по времени от вектора является вектором, направленным по годографу дифференцируемого вектора, тогда

$$\vec{v}_N = \frac{d\vec{K}_O}{dt}.$$

Кроме того $\dfrac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O$, окончательно получим, что

$$\vec{v}_N = \vec{M}_O,$$

ч. и т. д.

## Теорема об изменении кинетического момента. Теорема Резаля V

Следствия:

1. Одними внутренними силами нельзя изменить кинетический момент системы.
2. Если главный момент $\overrightarrow{M}_O$ внешних сил относительно некоторой неподвижной точки $O$ равен нулю, то кинетический момент системы относительно той же точки будет постоянным как по величине, так и по направлению.
3. Если главный момент внешних сил относительно одной из координатных осей равен нулю, то соответствующий кинетический момент системы будет постоянным.

Второе и третье следствия отображают *закон сохранения* кинетического момента.

## Понятие о системе переменного состава

Механическая система является *системой переменного состава*, если либо масса системы, либо материальные точки, из которых она состоит, либо и то и другое меняется со временем.

Примем предположение о математической модели системы переменного состава: *малы и массы и отделяющихся или присоединяющихся к системе точек, и промежутки времени между двумя их последовательными присоединениями и отделениями.* Тогда масса $M_1(t)$ вышедших из системы точек и масса $M_2(t)$ вошедших в систему точек — непрерывные и дифференцируемые функции времени.

Если масса $M(t)$ системы при $t = 0$ равнялась $M_0$, то с течением времени она меняется по закону

$$M(t) = M_0 - M_1(t) + M_2(t),$$

где $M_1(t), M_2(t)$ — неубывающие неотрицательные функции времени и $M(t)$ непрерывна и дифференцируема.

*Материальной точкой переменного состава* называют частицу переменного состава, настолько малую, что её положение и движение можно определить как для объекта не имеющего размеров.

# Теорема об изменении количества движения

Пусть некоторая совокупность материальных точек движется относительно инерциальной системы координат $Oxyz$.

$$\frac{d\overrightarrow{Q}}{dt} = \overrightarrow{F}^{(e)} + \overrightarrow{F}.$$

где $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2$, а

$$\overrightarrow{F}_1 = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{Q}_1}{\Delta t}, \quad \overrightarrow{F}_2 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{Q}_2}{\Delta t}.$$

Величины $\overrightarrow{F}_1$, $\overrightarrow{F}_2$ называют *реактивными силами*. Реактивная сила $\overrightarrow{F}_1$ возникает за счёт отделения материальных точек от рассматриваемой системы, а $\overrightarrow{F}_2$ — за счёт присоединения точек.

# Теорема об изменении кинетического момента

Пусть $A$ — неподвижная точка в инерциальной системы координат $Oxyz$, $\overrightarrow{M}_A^{(e)}$ — главный момент внешних сил и $\overrightarrow{K}_A$ — кинетический момент системы переменного состава относительно точки $A$.

$$\frac{d\overrightarrow{K}_A}{dt} = \overrightarrow{M}_A^{(e)} + \overrightarrow{M}_A^{(F)},$$

где $\overrightarrow{M}_A^{(F)} = \overrightarrow{M}_{A1}^{(F)} + \overrightarrow{M}_{A2}^{(F)}$ — дополнительный момент, поскольку система является системой переменного состава:

$$\overrightarrow{M}_{A1}^{(F)} = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overrightarrow{K}_{A1}}{\Delta t}, \quad \overrightarrow{M}_{A2}^{(F)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overrightarrow{K}_{A2}}{\Delta t}.$$

Здесь $\Delta\overrightarrow{K}_{A1}$ — сумма моментов количеств движения тех материальных точек, которые за время $\Delta t$ вышли из объёма, а $\Delta\overrightarrow{K}_{A2}$ — аналогичная величина для точек, вошедших в объём.

# Дифференциальные уравнения движения материальной точки I

Пусть материальная точка $P$ переменного состава движется относительно инерциальной системы координат $Oxyz$. Масса точки $P$ изменяется со временем вследствие одновременного отделения и присоединения к ней частиц материи, размерами которых можно пренебречь.

Пусть $\overrightarrow{u}_1$ — абсолютная скорость частицы, которая отделяется от точки $P$ в момент времени $t$, а $\overrightarrow{u}_2$ — абсолютная скорость частицы, которая присоединяется к $P$ в этот момент. Пусть $\Delta M_1$ и $\Delta M_2$ — соответственно массы отделяющейся и присоединяющейся частиц. Тогда с точностью до членов первого порядка малости включительно относительно $\Delta t$, $\Delta M_1$ и $\Delta M_2$:

$$\Delta\overrightarrow{Q}_1 = \Delta M_1 \overrightarrow{u}_1, \quad \Delta\overrightarrow{Q}_2 = \Delta M_2 \overrightarrow{u}_2,$$

и, следовательно

$$\overrightarrow{F}_1 = -\frac{dM_1(t)}{dt}\overrightarrow{u}_1, \quad \overrightarrow{F}_2 = \frac{dM_2(t)}{dt}\overrightarrow{u}_2.$$

# Дифференциальные уравнения движения материальной точки II

Пусть $\overrightarrow{v}$ — абсолютная скорость точки $P$. Тогда её количество движения вычисляется по формуле

$$\overrightarrow{Q} = M(t)\overrightarrow{v}.$$

Из теоремы об изменении количества движения получим

$$\frac{dM(t)}{dt}\overrightarrow{v} + M(t)\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \overrightarrow{R} - \frac{dM_1(t)}{dt}\overrightarrow{u}_1 + \frac{dM_2(t)}{dt}\overrightarrow{u}_2,$$

где $\overrightarrow{R}$ — равнодействующая сил, приложенных к точке $P$.

Это равенство можно представить в виде

$$M(t)\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \overrightarrow{R} - \frac{dM_1(t)}{dt}(\overrightarrow{u}_1 - \overrightarrow{v}) + \frac{dM_2(t)}{dt}(\overrightarrow{u}_2 - \overrightarrow{v}).$$

Получили дифференциальное уравнение движения точки переменного состава, которое называется *обобщённым уравнением Мещерского.*

Отметим, что $\overrightarrow{u}_1 - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}_{1r}$ — скорость отделяющихся частиц относительно точки $P$, $\overrightarrow{u}_2 - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}_{2r}$ — скорость присоединяющихся частиц относительно точки $P$.

# Дифференциальные уравнения движения материальной точки II

Пусть имеет место только отделение частиц, тогда уравнение движения принимает вид

$$M(t)\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \overrightarrow{R} + \frac{dM(t)}{dt}\overrightarrow{u}_{1r}.$$

Получили *уравнение Мещерского.* Аналогично можно рассмотреть и эффект присоединения частиц к точке $P$. Величину $\frac{dM(t)}{dt}$ называют *секундным расходом массы.*

Пусть имеет месть только отделение частиц от точки $P$ переменного состава. Если $\overrightarrow{u}_1 = 0$, то уравнение Мещерского примет вид

$$M(t)\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \overrightarrow{R} - \frac{dM(t)}{dt}\overrightarrow{v}$$

или

$$\frac{d(M(t)\overrightarrow{v})}{dt} = \overrightarrow{R}.$$

*Если абсолютная скорость отделяющихся частиц равна нулю, то производная по времени количества движения точки $P$ переменного состава равна равнодействующей приложенных к ней сил.*

# Дифференциальные уравнения движения материальной точки IV

Если же $\overrightarrow{u}_{1r} = 0$, то из уравнения Мещерского получаем

$$M(t)\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \overrightarrow{R}.$$

*Если относительная скорость отделяющихся частиц равна нулю, то уравнение движения точки $P$ переменного состава записывается формально в том же виде, что и уравнение движения точки постоянного состава.*

# Движение ракеты вне поля сил I

Рассмотрим движение ракеты в космическом пространстве. За материальную точку примем ракету, на которую не действуют силы сопротивления космической среды, гравитационного притяжения и силы светового давления и т. д. Тогда $\overrightarrow{R} = 0$, векторное уравнение движения ракеты

$$M(t)\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \frac{dM(t)}{dt}\overrightarrow{u_r}$$

где $\overrightarrow{u_r}$ — относительная скорость отделения продуктов сгорания топлива. Пусть относительная скорость постоянна и противоположна скорости $\overrightarrow{v}$ ракеты. Тогда ракета будет двигаться по прямой линии, имеющей направление вектора $\overrightarrow{v}$. Примем эту прямую за ось $Ox$, проектируя равенство на данную ось, получаем

$$M(t)\frac{dv}{dt} = -\frac{dM(t)}{dt}u_r.$$

Положим, что $M(0) = M_0, \quad v(0) = v_0$ для скорости получаем

$$v(t) = v_0 + u_r \ln\frac{M_0}{M(t)}.$$

# Движение ракеты вне поля сил II

Пусть $M_T$ — начальная масса топлива, $M_K$ — конечная масса ракеты после того, как израсходовано всё топливо. Очевидно, что

$$M_0 = M_K + M_T$$

, тогда получаем следующее выражение, называемое *формулой Циолковского*:

$$v_K = v_0 + u_r \ln(1 + \frac{M_T}{M_K}).$$

Если задано отношение $\frac{M_T}{M_K} = Z$ (*число Циолковского*), то предельная скорость будет вполне определена независимо от того, быстро или медленно происходило сгорание топлива.

*Путь пройденный ракетой на активном участке траектории, зависит от закона сгорания топлива.* Положим, что $x(0) = 0$, тогда

$$x(t) = v_0 t + u_r \int\limits_0^t \ln \frac{M_0}{M(t)} dt.$$

# Вертикальное движение ракеты в однородном поле тяжести I

Пусть ракета движется вертикально вверх в однородном поле тяжести при отсутствии сопротивления среды ($M(0) = M_0, v(0) = 0$).Относительная скорость $\overrightarrow{u_r}$ постоянна и направлена вертикально вниз. Уравнение движения представимо в виде

$$M(t)\frac{dv}{dt} = -M(t)g - \frac{dM(t)}{dt}u_r.$$

Интегрируя уравнение, для зависимости скорости от времени находим

$$v(t) = u_r \ln \frac{M_0}{M(t)} - gt.$$

Пусть $z(0) = 0$, тогда зависимость высоты подъёма ракеты от времени задаётся формулой

$$z(t) = u_r \int_0^t \ln \frac{M_0}{M(t)} dt - \frac{gt^2}{2}.$$

Пусть масса ракеты изменяется по закону:

$$M(t) = M_0 e^{-\alpha t}$$

# Вертикальное движение ракеты в однородном поле тяжести II

где $\alpha$ — постоянный положительный коэффициент, характеризующий быстроту сгорания топлива. Масса отброшенных продуктов сгорания возрастает по закону

$$M_1(t) = M_0(1 - e^{-\alpha t}).$$

Для величины $F_1$ реактивной силы получаем выражение

$$F_1 = \alpha M_0 e^{-\alpha t} u_r = \alpha u_r M(t),$$

где $\alpha u_r$ — ускорение, сообщаемое ракете за счёт реактивной силы.

Для данного закона изменения массы получаем

$$v(t) = (\alpha u_r - g)t, \quad z(t) = \frac{(\alpha u_r - g)t^2}{2}$$

*Вертикальный подъём ракеты возможен только при $\alpha u_r > g$.*

Пусть запас топлива $M_T$ задан. В конце процесса сгорания $M = M_K$, тогда

$$M_K = M_0 e^{-\alpha t_K} \Rightarrow t_K = \frac{\beta}{\alpha},$$

где $\beta = \ln(1 - \frac{M_T}{M_K})$.

# Вертикальное движение ракеты в однородном поле тяжести III

Для скорости ракеты в конце процесса сгорания топлива и длины активного участка её траектории получаем формулы

$$v_K = \beta(u_r - \frac{g}{\alpha}), \quad z_K = \frac{\alpha u_r - g}{2\alpha^2}\beta^2.$$

При $t > t_K$ масса ракеты остаётся постоянной и $v(t_K) = v_K$. Она пройдёт до наибольшей высоты подъёма расстояние

$$s = \frac{v_K^2}{2g} = \frac{\beta^2}{2g}(u_r - \frac{g}{\alpha})^2.$$

Для полной высоты подъёма

$$h = z_K + s = \frac{\beta^2 u_r}{2}(\frac{u_r}{g} - \frac{1}{\alpha}).$$

Наибольшая высота $h_{max}$ соответствует $\alpha = \infty$ (*случай мгновенного сгорания топлива*)

$$h_{max} = \frac{\beta^2 u_r^2}{2g}.$$

# Вертикальное движение ракеты в однородном поле тяжести IV

При каком значении $\alpha$ длина $z_K$ активного участка будет наибольшей.

$$\frac{\partial z_K}{\partial \alpha} = \frac{2g - \alpha u_r}{2\alpha^3}\beta^2, \quad \frac{\partial^2 z_K}{\partial^2 \alpha} = \frac{\alpha u_r - 3g}{\alpha^4}\beta^2.$$

Тогда при $\alpha = \frac{2g}{u_r}$ величина $z_K$ будет максимальной

$$z_{Kmax} = \frac{\beta^2 u_r^2}{8g}.$$

При этом

$$h = \frac{\beta^2 u_r^2}{4g},$$

*При наибольшей длине активного участка траектории ракеты полная высота её подъема вдвое меньше наибольшей возможной высоты.*