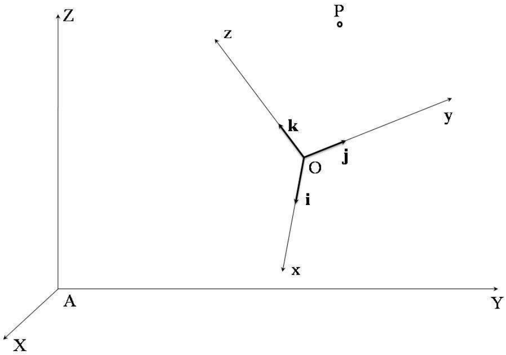
# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
## СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

ШИМАНЧУК Дмитрий Викторович
shymanchuk@mail.ru

Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики – процессов управления

Санкт-Петербург — 2014г.

# Относительное и переносное движение




*Сложным (абсолютным) движением* называют движение точки по отношению к абсолютной (неподвижной) системе координат $A_{XYZ}$.

*Относительное движением* называют движение точки по отношению к относительной (подвижной) системе координат $O_{xyz}$.

*Переносным движением* называют движение подвижной системы отсчета $O_{xyz}$ по отношению к абсолютной системе координат $A_{XYZ}$.

Пусть вектор $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(t)$ задан в подвижной системе координат $O_{xyz}$, тогда

$$\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_k \boldsymbol{k}.$$

Определим полную производную от вектора $\boldsymbol{a}$:

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{da_y}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{da_z}{dt}\boldsymbol{k} + a_x\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} + a_y\frac{d\boldsymbol{j}}{dt} + a_k\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}. \tag{1}$$

*Относительной* или *локальной производной* $\dfrac{\tilde{d}\boldsymbol{a}}{dt}$ называется сумма первых трёх слагаемых в (1), т. е.

$$\frac{\tilde{d}\boldsymbol{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{da_y}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{da_z}{dt}\boldsymbol{k}.$$

Известно, что

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{i}, \quad \frac{d\boldsymbol{j}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{j}, \quad \frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{k},$$

следовательно

$$a_x\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} + a_y\frac{d\boldsymbol{j}}{dt} + a_k\frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_k\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a},$$

тогда

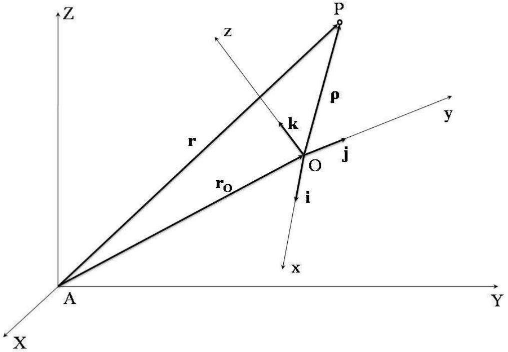
$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} = \frac{\tilde{d}\boldsymbol{a}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a}.$$

*Абсолютная производная вектора* $\dfrac{d\boldsymbol{a}}{dt}$ равна сумме относительной производной этого вектора и векторного произведения угловой скорости подвижной системы координат на этот вектор.

*Абсолютной скоростью* $\boldsymbol{v}$ точки называют её скорость по отношению к абсолютной системе координат $A_{XYZ}$.

*Относительной скоростью* $\boldsymbol{v}_r$ точки называют её скорость по отношению к подвижной системе координат $O_{xyz}$.

*Переносной скоростью* $\boldsymbol{v}_e$ точки называют абсолютную скорость той точки подвижной системы отсчёта, с которой в данный момент совпадает движущая точка.



**Теорема.**

Вектор абсолютной скорости равен сумме векторов относительной и переносной скоростей:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_e.$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_O + \boldsymbol{\rho}, \quad \text{где } \boldsymbol{\rho} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}_O}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt}, \quad \text{где } \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} = \frac{\tilde{d}\boldsymbol{\rho}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}.$$

$$\frac{\tilde{d}\boldsymbol{\rho}}{dt} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k}, \quad \text{тогда } \boldsymbol{v}_r = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k}.$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{v}_r.$$

Пусть $\boldsymbol{v}_r = 0$, тогда

$$\boldsymbol{v}_e = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}.$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_e.$$

*Абсолютным ускорением* $\boldsymbol{w}$ точки называют её ускорение по отношению к абсолютной системе координат $A_{XYZ}$.

*Относительным ускорением* точки называют её скорость по отношению к подвижной системе координат $O_{xyz}$.

*Переносным ускорением* точки называют абсолютное ускорение той точки подвижной системы отсчёта, с которой в данный момент совпадает движущая точка.

### Теорема.

Вектор абсолютного ускорения равен сумме векторов переносного, относительного и кориолисова ускорений:

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_e + \boldsymbol{w}_r + \boldsymbol{w}_c.$$

$$\boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{v}_O}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{v}_r}{dt}, \quad \text{где } \frac{d\boldsymbol{v}_r}{dt} = \frac{\tilde{d}\boldsymbol{v}_r}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r.$$

Тогда

$$\boldsymbol{w}_r = \frac{\tilde{d}\boldsymbol{v}_r}{dt} = \ddot{x}\boldsymbol{i} + \ddot{y}\boldsymbol{j} + \ddot{z}\boldsymbol{k}.$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w} &= \boldsymbol{w}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{v}_r + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})) + \boldsymbol{w}_r + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r = \\ &= \boldsymbol{w}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) + \boldsymbol{w}_r + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r. \end{aligned}$$

Пусть $\boldsymbol{v}_r = 0$, $\boldsymbol{w}_r = 0$, тогда

$$\boldsymbol{w}_e = \boldsymbol{w}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}).$$

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_e + \boldsymbol{w}_r + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r.$$

$$\boldsymbol{w}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r.$$

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_e + \boldsymbol{w}_r + \boldsymbol{w}_c.$$

# Ускорение Кориолиса

- $\boldsymbol{w}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r$,
- $w_c = 2\omega v_r \sin(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{v}_r)$.

## Кориолисово ускорение равно нулю, если

1. $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$, случай поступального перемещения подвижной системы координат,
2. угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ подвижной системы координат параллельна относительной скорости $\boldsymbol{v}_r$,
3. в момент времени, когда относительная скорость $\boldsymbol{v}_r$ точки равна нулю.

## правило Н.Е. Жуковского

проекцию скорости $\boldsymbol{v}_r$ на плоскость, перпендикулярную угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ подвижной системы координат, равную $v_r \sin(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{v}_r)$, следует умножить на $2\omega$ и повернуть на угол $\pi/2$ вокруг $\boldsymbol{\omega}$ в направлении вращения. Вектор, равный по модулю $2\omega v_r \sin(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{v}_r)$ и имеющий найденное направление, и будет кориолисовым ускорением.

## Задача 1.