АНАЛИТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ РАУСА

ШИМАНЧУК Дмитрий Викторович
d.shimanchuk@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики – процессов управления

Санкт-Петербург – 2018 г.

Свойства кинетической и потенциальной энергии I

Кинетическая энергия T системы, записанная через обобщённые координаты $\mathbf{q}$ и обобщённые скорости $\dot{\mathbf{q}}$, определяется как сумма квадратичной и линейной формы по скоростям, а также не зависящего от скоростей слагаемого.

$$T(q,\dot q,t)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}m_k(\dot{\mathbf r}_k,\dot{\mathbf r}_k)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}m_k\left(\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial\mathbf r_k}{\partial q_i}\dot q_i+\frac{\partial\mathbf r_k}{\partial t}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s}a_{ij}\dot q_i\dot q_j+\sum_{i=1}^{s}b_i\dot q_i+c(q,t)=T_2+T_1+T_0,$$

$$a_{ij}(q,t)=\sum_{k=1}^{N}m_k\left(\frac{\partial\mathbf r_k}{\partial q_i},\frac{\partial\mathbf r_k}{\partial q_j}\right),\quad T_2=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s}a_{ij}\dot q_i\dot q_j,$$

$$b_i(q,t)=\sum_{k=1}^{N}m_k\left(\frac{\partial\mathbf r_k}{\partial q_i},\frac{\partial\mathbf r_k}{\partial t}\right),\quad T_1=\sum_{i=1}^{s}b_i\dot q_i,$$

$$c(q,t)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}m_k\left(\frac{\partial\mathbf r_k}{\partial t},\frac{\partial\mathbf r_k}{\partial t}\right)=T_0.$$

Замечание

В случае *склерономной* механической системы $\dfrac{\partial\mathbf r_k}{\partial t}=0$: $T=T_2$.

Для механической системы с голономными идеальными связями при действии потенциальных сил уравнения движения Лагранжа второго рода можно привести к системе дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно **q** и новых переменных **p**:

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^{s} a_{ij}\dot{q}_j + b_i, \quad i = \overline{1, s}.$$

Определение

Переменная p_i называется *обобщенным импульсом*, сопряженным с обобщенной координатой q_i.

Вместо переменных Лагранжа $\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$ переходят к *каноническим переменным* $\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$, которые предложил Гамильтон.

Замечание

От функции Лагранжа $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ переходят к функции Гамильтона $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ в соответствии с преобразованием Лежандра:

$$H = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{t}), t) = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t).$$

Иное представление функции Гамильтона $H(q,p,t)$:

$$H = \sum_{i=1}^{s} p_i\dot{q}_i - T(q,\dot{q},t) + \Pi(q,t) = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - T + \Pi = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - T + \Pi =$$

$$= 2T_2 + T_1 - (T_2 + T_1 + T_0) + \Pi = T_2 - T_0 + \Pi.$$

Замечание

Если связи стационарны, то $H = T_2 + \Pi = T + \Pi$, т. е. функция Гамильтона равна полной механической энергии.

Полный дифференциал функции Гамильтона $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ вычисляется по формуле:

$$dH = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

или

$$dH = \sum_{i=1}^{s} \dot{q}_i dp_i - \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Из первых двух уравнений получаем *уравнения Гамильтона* или *канонические уравнения*:

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i}. \end{cases}$$

Третье равенство означает, что если функция Лагранжа не зависит явно от времени, то и функция Гамильтона обладает тем же свойством.

Если функция Гамильтона не зависит явно от времени, то систему называют *обобщённо консервативной.*

$$\frac{dH}{dt} := \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Канонические переменные и функция Гамильтона VI

В случае обобщённо консервативной механической системы функция Гамильтона $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ не меняет своего значения на действительном движении, определяя *обобщённый интеграл энергии*

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = h,$$

где функция H называется *обобщённой полной энергией*, h – произвольная постоянная.

Учитывая выражение $\dfrac{dH}{dt} \equiv \dfrac{\partial H}{\partial t}$ имеет место *интеграл Якоби*:

$$T_2 - T_0 + \Pi = h.$$

В случае стационарных голономных связей *интеграл Якоби* имеет вид

$$E = T + \Pi = h.$$

Величины

$$q_j,\ \dot q_j,\ q_\alpha,\ p_\alpha,\ t,\ j = 1, 2, \ldots, k,\ \alpha = k+1, k+2, \ldots, s,$$

называются *переменными Рауса*, где $k < n$.

Функцией Рауса

$$R(q_1, \ldots, q_k, q_{k+1}, \ldots, q_n,\ \dot q_1, \ldots, \dot q_k, p_{k+1}, \ldots, p_n, t)$$

называются преобразование Лежандра функции L по переменным $\dot q_{k+1}, \ldots, \dot q_n$:

$$R = \sum_{\alpha=k+1}^{n} p_\alpha \dot q_\alpha - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t),$$

где $\dot q_\alpha$ выражены из уравнений определения обобщенных импульсов p_α через переменные Рауса.

Совокупность уравнений:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial R}{\partial q_j} = 0,\ j = \overline{1,k}, \tag{1}$$

$$\begin{cases} \dot{q}_\alpha = \dfrac{\partial R}{\partial p_\alpha}, \\ \dot{p}_\alpha = -\dfrac{\partial R}{\partial q_\alpha}, \end{cases} \quad \alpha = \overline{k+1,n}, \tag{2}$$

образует *систему уравнений Рауса.*

(1) представляет собой k уравнений второго порядка, а (2) – $2(n-k)$ уравнений первого порядка.