ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ
СОПРОВОЖДАЮЩИЙ ТРЁХГРАННИК

ШИМАНЧУК Дмитрий Викторович
d.shimanchuk@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики – процессов управления

Санкт-Петербург – 2016г.

Касательная кривой I

Гладкая без особых точек кривая имеет в каждой точке, отвечающей параметру $t = t_0$, единственную касательную, направляющий вектор которой коллинеарен $\boldsymbol{r}'(t)$.

Если $\boldsymbol{\rho}(t)$ – радиус-вектор текущей точки на касательной кривой γ, то уравнение этой касательной имеет вид

$$\boldsymbol{\rho}(t) = \boldsymbol{r}(t) + u\boldsymbol{r}'(t),$$

где $u \in (-\infty, +\infty)$ – параметр, определяющий положение точки на касательной, $t \in (a, b)$ – параметр, определяющий точку на кривой γ, в которой проведена касательная.

Если $\boldsymbol{\rho}(t) = (X, Y, Z)$, $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, то уравнение касательной в произвольной точке

$$\frac{X - x(t)}{x'(t)} = \frac{Y - y(t)}{y'(t)} = \frac{Z - z(t)}{z'(t)}.$$

Касательная кривой III

Касательная пространственной кривой, заданной как пересечение двух поверхностей, определяется соотношением

$$\frac{X - x(t)}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ \Phi_y & \Phi_z \end{vmatrix}} = \frac{Y - y(t)}{\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ \Phi_z & \Phi_x \end{vmatrix}} = \frac{Z - z(t)}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ \Phi_x & \Phi_y \end{vmatrix}}.$$

где $(x(t), y(t), z(t))$ – координаты точки на кривой, в которой проведена касательная.

Касательная кривой IV

Уравнение касательной плоской кривой в декартовой системе координат имеет вид

$$\frac{X - x(t)}{x'(t)} = \frac{Y - y(t)}{y'(t)}.$$

Если плоская кривая задана неявным уравнением $F(x, y) = 0$, то уравнение касательной

$$F_x(x(t), y(t))(X - x(t)) + F_y(x(t), y(t))(Y - y(t)) = 0.$$

где $(x(t), y(t))$ – координаты точки на кривой, в которой проведена касательная.

Определение

Плоскость, проходящую через данную точку кривой перпендикулярно касательной в этой точке, называют *нормальной плоскостью*.

Уравнение нормальной плоскости в произвольной точке, радиус-вектор которой $\boldsymbol{r}(t)$, в зависимости от способа задания кривой имеет вид

$$(\boldsymbol{\rho}(t) - \boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t) = 0$$

или

$$x'(t)(X - x(t)) + y'(t)(Y - y(t)) + z'(t)(Z - z(t)) = 0$$

или

$$\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ \Phi_y & \Phi_z \end{vmatrix}(X - x(t)) + \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ \Phi_z & \Phi_x \end{vmatrix}(Y - y(t)) + \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ \Phi_x & \Phi_y \end{vmatrix}(Z - z(t)) = 0.$$

Определение

Плоскость, проходящую через заданную точку кривой γ параллельно векторам $\boldsymbol{r}'(t)$ и $\boldsymbol{r}''(t)$, когда они неколлинеарны, называют *соприкасающейся плоскостью* кривой.

Пусть $\rho(t)$ – радиус-вектор произвольной переменной точки, лежащей в соприкасающейся плоскости кривой γ. Тогда уравнение соприкасающейся плоскости кривой γ в произвольной точке, радиус вектор которой $\boldsymbol{r}(t)$, имеет вид

$$\boldsymbol{\rho}(t) = \boldsymbol{r}(t) + u\boldsymbol{r}'(t) + v\boldsymbol{r}''(t), u \in (-\infty, +\infty), v \in (-\infty, +\infty),$$

где u, v - аргументы векторной функции $\boldsymbol{\rho}(t)$ определяют радиус-вектор текущей точки соприкасающейся плоскости, t – фиксированный параметр, задающий точку на кривой, в которой проведена указанная плоскость.

Так как в данном случае векторы $\boldsymbol{\rho}(t) - \boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{r}'(t), \boldsymbol{r}''(t)$ компланарны, то уравнение соприкасающейся плоскости кривой γ представимо в виде

$$(\boldsymbol{\rho}(t) - \boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{r}'(t), \boldsymbol{r}''(t)) = 0,$$

или в декартовой прямоугольной системе координат

$$\begin{vmatrix} X - x(t) & Y - y(t) & Z - z(t) \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{vmatrix} = 0.$$

Определение

Нормаль кривой – это прямая, проходящая через точку, радиус-вектор которой $\boldsymbol{r}(t)$, перпендикулярно касательной кривой в этой точке.

Если кривая плоская, то уравнение нормали в декартовых координатах имеет вид

$$x'(t)(X - x(t)) + y'(t)(Y - y(t)) = 0,$$

а при неявном способе задания плоской кривой уравнение нормали

$$\frac{X - x(t)}{F_x} = \frac{Y - y(t)}{F_y}.$$

Определение

Нормаль, перпендикулярную соприкасающейся плоскости пространственной кривой, называют *бинормалью*.

Направляющий вектор бинормали совпадает с нормальным вектором соприкасающейся плоскости

$$\boldsymbol{\rho}(t) = \boldsymbol{r}(t) + u(\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t)), u \in (-\infty, +\infty).$$

Определение

Нормаль, лежащую в соприкасающейся плоскости кривой, называют *главной нормалью*.

Направляющий вектор главной нормали одновременно перпендикулярен как бинормали, так и касательной

$$\boldsymbol{\rho}(t) = \boldsymbol{r}(t) + u((\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t)) \times \boldsymbol{r}'(t)), u \in (-\infty, +\infty).$$

Определение

Плоскость, содержащую касательную кривой и бинормаль, проведенные в одной и той же точке, называют *спрямляющей плоскостью*.

Уравнение спрямляющей плоскости имеет вид

$$(\boldsymbol{\rho}(t) - \boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t), \boldsymbol{r}'(t)) = 0.$$

Определение

Правую тройку векторов $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$, составленную из ортов направляющих векторов касательной, главной нормали и бинормали, называют *репером Френе.*

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|},$$

$$\boldsymbol{n} = \frac{(\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t)) \times \boldsymbol{r}'(t)}{|(\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t)) \times \boldsymbol{r}'(t)|},$$

$$\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t)}{|\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t)|}.$$