АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
Произведения векторов

ШИМАНЧУК Дмитрий Викторович
shymanchuk@mail.ru

Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики – процессов управления

Санкт-Петербург — 2015г.

Определение

Линейное n-мерное пространство называется *евклидовым векторным n-мерным пространством*, если в нём задана функция, сопоставляющая двум любым элементам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ этого пространства вещественное число, называемое скалярным произведением и обозначаемое $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, причём выполняются аксиомы:

12. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$;
13. $\lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$ для $\forall \lambda \in \mathbb{R}$;
14. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$;
15. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} > 0$, если $\mathbf{a} \neq 0$; $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$, если $\mathbf{a} = 0$.

Теорема 1.

Для любых двух элементов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ произвольного евклидова пространства верно неравенство

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \leqslant (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}),$$

называемое неравенством Коши-Буняковского.

Определение

Линейное n-мерное пространство L называется *нормированным*, если имеется правило, посредством которого всякому элементу $\mathbf{x} \in L$ ставится в соответствие вещественное число, называемое нормой указанного элемента и обозначаемое символом $\|\mathbf{x}\|$, причём это правило подчинено аксиомам:

1' $\|\mathbf{x}\| \geqslant 0$, если $\mathbf{x} \neq 0$;$\|\mathbf{x}\| = 0$, если $\mathbf{x} = 0$;

2' $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|$ для $\forall \mathbf{x} \in L$ и $\forall \lambda \in \mathbb{R}$;

3' $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ для $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$.

Теорема 2.

Всякое евклидово пространство можно рассматривать как нормированное, если норму в нём определить равенством

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}.$$

Определение

Множество называется *метрическим пространством*, если каждой паре его элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ сопоставляется по некоторому правилу неотрицательное вещественное число $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, называемое расстоянием, причём это правило подчинено аксиомам:

1" $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geqslant 0$, если $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$; $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, если $\mathbf{x} = \mathbf{y}$;

2" $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \rho(\mathbf{y}, \mathbf{x})$;

3" $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqslant \rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \rho(\mathbf{z}, \mathbf{y})$.

Определение

Векторным произведением вектора **a** *на вектор* **b** называется вектор **c**, обозначаемый символом $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ и определяемый следующим образом:

1. Модуль вектора **c** равен произведению модулей векторов **a** и **b** на синус угла между ними, т. е. $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin\varphi, \varphi = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$;
2. Вектор **c** ортогонален каждому из векторов **a** и **b**;
3. Вектор **c** направлен так, что упорядоченная тройка векторов **a**, **b**, **c** являются правой.

Лемма.

Векторное произведение двух неколлинеарных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{e}$, один из которых $\mathbf{a}$ — произвольный вектор, а другой $\mathbf{e}$ — единичный вектор, есть вектор $\overrightarrow{OA''}$, построенный следующим образом:

1. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{e}$ приведены к общему началу O;
2. Вектор $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ спроектирован на плоскость π, перпендикулярную вектору $\mathbf{e}$ и проходящую через O, при этом получен вектор $\overrightarrow{OA'}$;
3. Вектор $\overrightarrow{OA''}$ получается поворотом вектора $\overrightarrow{OA'}$ в данной плоскости на угол $\pi/2$ так, чтобы упорядоченная тройка $\overrightarrow{OA'}, \mathbf{e}, \overrightarrow{OA''}$ была правой.

Векторное произведение векторов III

Свойства векторного произведения

1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$ (антикоммутативность);
2. $\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b}$ (ассоциативность относительно числового множителя);
3. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ (дистрибутивность относительно суммы векторов);
4. $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ для $\forall\mathbf{a}$.

Теорема 1.

Векторное произведение векторов $\mathbf{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\mathbf{b}(x_2, y_2, z_2)$, заданных своими декартовыми прямоугольными координатами, находится по формуле

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Замечание. Формула векторного произведения в аффинных координатах:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Теорема 2.

Необходимым и достаточным условием коллинеарности двух ненулевых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ является равенство $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Теорема 3.

Модуль векторного произведения двух неколлинеарных векторов **a** и **b** равняется площади S параллелограмма, построенного на этих векторах после приведения их к общему началу, т. е.

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = S.$$

Следствие 1. Векторное произведение векторов **a** и **b** можно выразить формулой $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = S\mathbf{e}$, где $\mathbf{e}$ — орт векторного произведения $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, S — площадь параллелограмма, построенного на приведенных к общему началу векторах **a** и **b**.

Следствие 2. Площадь параллелограмма, построенного на двух неколлинеарных векторах $\mathbf{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\mathbf{b}(x_2, y_2, z_2)$, заданных своими декартовыми прямоугольными координатами и приведённых к общему началу, определяется по формуле

$$S = \sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2}.$$

Псевдовекторное произведение (поворот)

Определение

Поворотом или *псевдовекторным произведением* вектора $\mathbf{a}$, лежащего на плоскости, называют вектор $[\mathbf{a}]$, получающийся поворотом вектора $\mathbf{a}$ на угол $\pi/2$ по часовой стрелке.

Свойства псевдовекторного произведения

1. $[\mathbf{a}+\mathbf{b}] = [\mathbf{a}] + [\mathbf{b}]$;
2. $[\lambda\mathbf{a}] = \lambda[\mathbf{a}]$;
3. $[\mathbf{a}] = \mathbf{0}$ тогда лишь, когда $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Пусть вектор $\mathbf{a}$ в правой ДПСК Oxy имеет координаты (x, y). Тогда

$$[\mathbf{a}] = [x\mathbf{i} + y\mathbf{j}] = x[\mathbf{i}] + y[\mathbf{j}] = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ x & y \end{vmatrix}.$$

Смешанное произведение трёх векторов I

Определение

Смешанным произведением трёх векторов **a**, **b**, **c** называется число

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}.$$

Теорема 1.

Смешанным произведением трёх векторов $\mathbf{a}(x_1, y_1, z_1), \mathbf{b}(x_2, y_2, z_2), \mathbf{c}(x_3, y_3, z_3)$, заданных своими декартовыми прямоугольными координатами, находится по формуле

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Теорема 2.

Необходимым и достаточным условием компланарности трёх векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ является равенство нулю их смешанного произведения $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$.

Теорема 3.

Смешанное произведение $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ трёх некомпланарных векторов равно объёму V параллелепипеда, построенного на векторах-сомножителях, взятому со знаком «$+$», если тройка правая, и со знаком «$-$», если эта тройка левая, т. е.

$$|(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})| = V.$$

Следствие. Верно равенство

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

Замечание 1. В аффинной системе координат смешанное произведение векторов представляется в виде

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3).$$

Замечание 2. Из теоремы 3 следует, что $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) > 0$ ($(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) < 0$), когда тройка векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ — правая (левая). Правую (левую) тройку векторов называют *положительно (отрицательно) ориентированной.*

Определение

Смешанным произведением векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ в плоскости (*псевдоскалярным произведением*) называют скалярное произведение вектора $\mathbf{a}$ на поворот вектора $\mathbf{b}$, при этом используют обозначение $(\mathbf{a}, [\mathbf{b}])$.

Свойства псевдоскалярного произведения

1. $(\mathbf{a}, [\mathbf{b}]) = -(\mathbf{b}, [\mathbf{a}])$;
2. $(\mathbf{a}, [\mathbf{b}]) = 0$ лишь тогда, когда $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны;
3. $(\mathbf{a}, [\mathbf{b}]) > 0$ ($(\mathbf{a}, [\mathbf{b}]) < 0$) лишь тогда, когда векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ образуют правую (левую) тройку. Правую (левую) пару векторов плоскости называют *положительно (отрицательно) ориентированной.*

Пусть $\mathbf{a}(x_1, y_1)$ и $\mathbf{b}(x_2, y_2)$ определены в некоторой правой ДПСК. Тогда

$$(\mathbf{a}, [\mathbf{b}]) = (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j}, y_2\mathbf{i} - x_2\mathbf{j}) = x_1y_2 - x_2y_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

В произвольном базисе $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ псевдоскалярное произведение векторов $\mathbf{a}(x_1, y_1)$ и $\mathbf{b}(x_2, y_2)$ вычисляется по формуле

$$(\mathbf{a}, [\mathbf{b}]) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} (\mathbf{e}_1, [\mathbf{e}_2]).$$

Определение

Двойным векторным произведением трёх векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ называется вектор $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

Теорема.

Двойное векторное произведение равно среднему вектору произведения, умноженному на скалярное произведение двух остальных, минус другой вектор внутреннего произведения, умноженный на скалярное произведение двух остальных:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

Следствие. Верна формула

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}).$$