АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

ШИМАНЧУК Дмитрий Викторович
shymanchuk@mail.ru

Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики – процессов управления

Санкт-Петербург — 2015г.

Определение

Углом между двумя векторами $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ называется угол, не превосходящий π, между векторами $\mathbf{a}'$ и $\mathbf{b}'$, равными $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ соответственно и имеющими общее начало.

Определение

Скалярным произведением $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется произведение их модулей на косинус угла между ними, т. е.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \varphi.$$

- Если $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ или $\mathbf{b}{=}\mathbf{0}$, то $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$,
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$, т. е. $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$, причём $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} > 0$, если $\mathbf{a}$ — ненулевой вектор.

Определение

Два ненулевых вектора называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю.

Свойства скалярного произведения

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ (коммутативность);
2. $\lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$ (ассоциативность относительно числового множителя);
3. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ (дистрибутивность относительно суммы векторов);
4. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} > 0$, если $\mathbf{a}$ — ненулевой вектор; $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$, если $\mathbf{a}$ — нулевой вектор.

Теорема 1.

Скалярное произведение двух векторов **a** и **b**, заданных в произвольной аффиной системе координат $O_{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3}$ своими координатами $\mathbf{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\mathbf{b}(x_2, y_2, z_2)$, находятся по формуле

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = x_1x_2(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1) + (x_1y_2 + x_2y_1)(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2) + y_1y_2(\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2) + (x_1z_2 + x_2z_1)(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_3) +$$

$$+(y_1z_2 + y_2z_1)(\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_3) + z_1z_2(\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_3).$$

Определение

Величины $g_{ij} = \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j, \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3,$ называются *метрическими коэффициентами* системы координат $O_{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3}$.

Скалярное произведение векторов V

Следствие 1. Модуль произвольного вектора $\mathbf{a}(x_1, y_1, z_1)$ в произвольной аффинной системе координат вычисляется по формуле

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{x_1^2 g_{11} + y_1^2 g_{22} + z_1^2 g_{33} + 2x_1 y_1 g_{12} + 2x_1 z_1 g_{13} + 2y_1 z_1 g_{23}}.$$

Следствие 2. Угол φ между двумя векторами $\mathbf{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\mathbf{b}(x_2, y_2, z_2)$ в аффинной системе координат $O_{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3}$ находится по формуле

$$\varphi = \arccos \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}.$$

Следствие 3. Для ДПСК справедливы формулы:

$$n=3:\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2,\quad |\mathbf{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2},$$
$$\varphi=\arccos\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}};$$
$$n=2:\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=x_1x_2+y_1y_2,\quad |\mathbf{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2},$$
$$\varphi=\arccos\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}};$$
$$n=1:\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=x_1x_2,\quad |\mathbf{a}|=|x_1|,\quad \varphi=\arccos\frac{x_1x_2}{|x_1|\cdot|x_2|}.$$

Расстояние между двумя точками $A(x_A,y_A,z_A)$ и $B(x_B,y_B,z_B)$ в трёхмерном пространстве равно модулю вектора $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)$, то в ДПСК получаем следующие формулы:

$$n=3:\ d(A,B)=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2};$$
$$n=2:\ d(A,B)=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2};$$
$$n=1:\ d(A,B)=|x_B-x_A|.$$

Теорема 2.

Необходимым и достаточным условием ортогональности двух ненулевых векторов в трёхмерном пространстве $\mathbf{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\mathbf{b}(x_2, y_2, z_2)$, заданных в ДПСК своими координатами

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

Теорема 3.

Декартовы прямоугольные координаты вектора $\mathbf{a}(x_1, y_1, z_1)$ равны скалярным произведением этого вектора на соответствующие базисные векторы:

$$x_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i}, \quad y_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{j}, \quad z_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{k}.$$

Пусть в ДПСК задан вектор $\overrightarrow{OM}$, орт которого обозначим вектором $\mathbf{e}$.

Определение

Косинусы углов α, β, γ, которые составляет орт $\mathbf{e}$ с базисными векторами $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, называются *направляющими косинусами вектора* $\overrightarrow{OM}$.

Теорема 4.

Направляющие косинусы векторов суть координаты орта данного вектора.

Следствие. Для направляющих косинусов справедливо соотношение

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$