АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

ШИМАНЧУК Дмитрий Викторович
d.shimanchuk@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики – процессов управления

Санкт-Петербург — 2016г.

Определение

Аффинное пространство — это множество $\mathcal{L}$ элементов произвольной природы, называемых *точками*, для которых:
1) задан некоторый, ассоциированный с $\mathcal{L}$, линеал $\mathbf{L}$;
2) задано соответствие, сопоставляющее любым двум точкам $A, B \in \mathcal{L}$ некоторый элемент $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{L}$ с началом в A и концом в B;
3) выполняются следующие две аксиомы:
10. Для произвольной точки $A \in \mathcal{L}$ и любого элемента $\mathbf{u} \in \mathbf{L}$ существует единственная точка $B \in \mathcal{L}$, такая что $\overrightarrow{AB} = \mathbf{u}$.
11. Для произвольных трёх точек A, B, C имеет место равенство $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

В аффинной геометрии, изучающей объекты аффинных пространств, имеются два основных понятия — *вектор* и *точка*, и *три основных отношения*:

1. отношение между тремя векторами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$: $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$;
2. отношение между двумя векторами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и вещественным числом α: $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{a}$;
3. отношение между двумя точками A ,B и вектором $\mathbf{u}$: $\overrightarrow{AB} = \mathbf{u}$.

Аффинные системы координат I

Определение

Аффинная система координат $O_{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n}$ в аффинном пространстве $\mathcal{L}^n$ есть совокупность, состоящая из произвольной точки O, называемой началом координат, и базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ из ассоциированного с $\mathcal{L}^n$ линеала $\mathbf{L}^n$.

Определение

Аффинными координатами произвольной точки $A \in \mathcal{L}^n$ называют координаты соответствующего элемента (радиус-вектора) $\overrightarrow{OA} \in \mathbf{L}^n (\overrightarrow{OA} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n)$ и обозначают $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Аффинные системы координат II

Произвольный вектор $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{L}^n$ можно представить как разность соответствующих радиус-векторов:

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A.$$

Если вектор $\overrightarrow{AB}$ задан координатами своего начала $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и конца $B(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ относительно базиса, то

$$\overrightarrow{AB} = (y_1 - x_1)\mathbf{e}_1 + (y_2 - x_2)\mathbf{e}_2 + \ldots + (y_n - x_n)\mathbf{e}_n,$$

и обозначают

$$\overrightarrow{AB}\{y_1 - x_1, y_2 - x_2, \ldots, y_n - x_n\}.$$

Аффинные системы координат III

Определение

Прямой в аффинном пространстве, задаваемой точкой $A_0 \in \mathcal{L}^n$ и отличным от нулевого вектора $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^n$, называется множество всех точек $P \in \mathcal{L}^n$, для которых $\overrightarrow{A_0P} = t\mathbf{u}, t \in (-\infty, +\infty)$.

Определение

Прямые в рассматриваемых пространствах, определяемые началом координат O и соответствующими базисными векторами, называются *осями координат*.

Определение

В трёхмерном аффинном пространстве рассматривают также *координатные плоскости*, которые определяются соответствующими парами координатных осей.

Аффинные системы координат IV

Определение

Тройка базисных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ называется *правой (левой)*, если по этим векторам после приведения их к общему началу можно направить соответственно большой, несогнутый указательный и средний пальцы правой (левой) руки.

Определение

Пара базисных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ называется *правой (левой)*, если кратчайший поворот от первого базисного вектора ко второму происходит против (по) часовой стрелке.

Определение

Система координат *правая (левая)*, если её базис правый (левый).

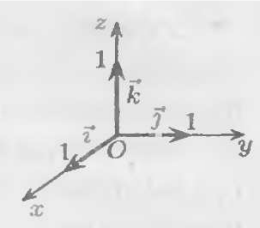
ДПСК на прямой, плоскости и в трёхмерном пространстве I

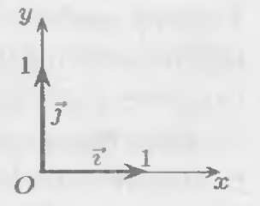
Определение

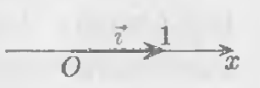
Базис называется *ортонормированным*, если базисные векторы единичные и попарно перпендикулярные.

Определение

Аффинная система координат с ортонормированным базисом называется *декартовой прямоугольной системой координат*.







при $n = 3 : \mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, или $\mathbf{a}\{x, y, z\}$;
при $n = 2 : \mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, или $\mathbf{a}\{x, y\}$;
при $n = 1 : \mathbf{a} = x\mathbf{i}$, или $\mathbf{a}\{x\}$.

Декартовы координаты произвольной точки относительно заданной системы координат суть декартовы координаты соответствующего радиус-вектора этой точки относительно той же системы координат.

В пространстве (при $n = 3$): $\mathbf{r}_M = \overrightarrow{OM} = x_M\mathbf{i} + y_M\mathbf{j} + z_M\mathbf{k}, M(x_M, y_M, z_M)$;

На плоскости (при $n = 2$): $\mathbf{r}_N = \overrightarrow{ON} = x_N\mathbf{i} + y_N\mathbf{j}, N(x_N, y_N)$;

На прямой (при $n = 1$): $\mathbf{r}_Q = \overrightarrow{OQ} = x_Q\mathbf{i}, Q(x_Q)$.

Определение

В трехмерном пространстве координаты точки относительно первого, второго и третьего базисных векторов $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ называют соответственно *абсциссой*, *ординатой* и *аппликатой*.

Произвольный вектор $\overrightarrow{AB}$ в рассматриваемых пространствах $\mathbf{V}^1, \mathbf{V}^2, \mathbf{V}^3$ определяется как разность соответствующих радиус-векторов

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A = (x_B\mathbf{i} + y_B\mathbf{j} + z_B\mathbf{k}) - (x_A\mathbf{i} + y_A\mathbf{j} + z_A\mathbf{k}) =$$

$$= (x_B - x_A)\mathbf{i} + (y_B - y_A)\mathbf{j} + (z_B - z_A)\mathbf{k}.$$

Тогда

при $n = 3$: $x_{\overrightarrow{AB}} = x_B - x_A, y_{\overrightarrow{AB}} = y_B - y_A, z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A,$
$\overrightarrow{AB}\{x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A\};$

при $n = 2$: $x_{\overrightarrow{AB}} = x_B - x_A, y_{\overrightarrow{AB}} = y_B - y_A, \quad \overrightarrow{AB}\{x_B - x_A, y_B - y_A\};$

при $n = 1$: $x_{\overrightarrow{AB}} = x_B - x_A, \quad \overrightarrow{AB}\{x_B - x_A\};$

Геометрический смысл декартовых координат на прямой I

Определение

Алгебраической мерой вектора декартовой оси называют относительное число, абсолютное значение которого есть отношение длины этого вектора к единице измерения длин, причём знак «+» берётся, если этот вектор и направляющий вектор оси являются сонаправленными, и «−», когда указанные векторы имеют противоположные направления. Алгебраическую меру вектора $\overrightarrow{AB}$ обозначают символом $\overline{AB}$ $(|\overrightarrow{AB}| = |\overline{AB}|)$.

Теорема.

Всякий вектор $\overrightarrow{AB}$ на оси может быть представлен в виде $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\mathbf{i}$, где $\mathbf{i}$ — направляющий вектор оси, $\overline{AB}$ — алгебраическая мера вектора $\overrightarrow{AB}$.

Следствие 1. Координата произвольного вектора на декартовой оси равна его алгебраической мере, а координата произвольной точки на оси равна алгебраической мере соответствующего ей радиус-вектора.

Лемма (Шаля).

При любом расположении точек A, B, C на оси алгебраические меры векторов $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}$ связаны соотношением $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

Следствие 2. Координата произвольного вектора декартовой оси равна разности координат его конца и начала.

Определение

Геометрической проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ *на ось* $O\mathbf{i}$ называют вектор, имеющий началом проекцию A_x начала A данного вектора на эту ось, а концом — проекцию B_x конца B данного вектора на эту ось.

$$Proj^g_{O_\mathbf{i}}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_xB_x},$$

$$Proj^g_{O_\mathbf{j}}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_yB_y}.$$

Определение

Алгебраической проекцией вектора на ось называется алгебраическая мера геометрической проекции данного вектора на эту ось.

$$Proj^a_{O_\mathbf{i}}\overrightarrow{AB} = \overline{A_xB_x},$$

$$Proj^a_{O_\mathbf{j}}\overrightarrow{AB} = \overline{A_yB_y}.$$

Теорема 1.

Декартовы прямоугольные координаты вектора на плоскости равны алгебраическим проекциям вектора на оси координат.

Теорема 2.

Алгебраическая проекция суммы векторов на некоторую ось равна сумме алгебраических проекций на ту же ось слагаемых векторов. Алгебраическая проекция на некоторую ось произведения вектора на вещественное число равна произведению данного вещественного числа на алгебраическую проекцию на ту же ось данного вектора:

$$Proj_l^a(\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2) = Proj_l^a\mathbf{c}_1 + Proj_l^a\mathbf{c}_2,$$

$$Proj_l^a\alpha\mathbf{c}_1 = \alpha Proj_l^a\mathbf{c}_1.$$

Определение

Углом наклона вектора к оси называют угол, на который следует повернуть направляющий вектор оси до совмещения его с ортом заданного вектора, приведенным в начало координат на оси.

Теорема 3.

Алгебраическая проекция вектора на ось равна произведению его длины на косинус угла наклона этого вектора к данной оси, т. е. $Proj_l^a \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos\alpha$, где α — угол наклона вектора $\overrightarrow{AB}$ к оси l.

Геометрический смысл декартовых координат в трёхмерном пространстве

Определение

Проекцией некоторой точки пространства на данную ось параллельно данной плоскости называется точка пересечения с заданной осью плоскости, проходящей через рассматриваемую точку и параллельной данной плоскости.

$$Proj^{g}_{O_{\mathbf{i}}}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_x B_x},$$

$$Proj^{g}_{O_{\mathbf{j}}}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_y B_y},$$

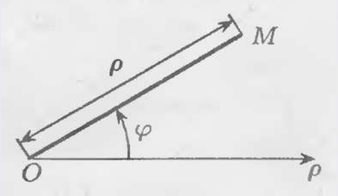
$$Proj^{g}_{O_{\mathbf{k}}}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_z B_z}.$$

Теорема.

Декартовы прямоугольные координаты вектора в трёхмерном пространстве равны алгебраическим проекциям данного вектора на оси координат.

Определение

Полярной системой координат на плоскости называется система, определяющими элементами которой являются:



- точка O — *полюс*;
- луч $O\rho$ — *полярная ось*;
- единица измерения длин на полярной оси;
- единица измерения углов;
- положительное направление отсчёта углов.

Определение

Полярным радиусом ρ точки M называется расстояние от этой точки M до полюса O: $\rho = d(O, M)$, $\quad 0 \leq \rho < +\infty$.

Определение

Полярным углом φ некоторой точки M, отличной от полюса, называется угол между полярной осью $O\rho$ и лучом OM:

$$\varphi = \angle(O\rho, OM), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Определение

Упорядоченная пара чисел (ρ, φ), взятых в указанном порядке, называется *полярными координатами* точки M на плоскости, при этом используется обозначение $M(\rho, \varphi)$.

Полярные координаты (ρ, φ) и декартовы (x, y) связаны соотношениями

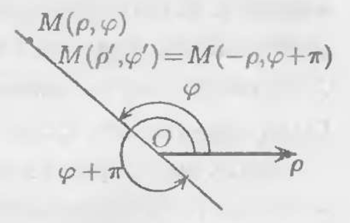
$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases}$$

Определение

Полярные координаты, в которых допускаются отрицательные значения для полярного радиуса, называются *обобщёнными полярными координатами.*



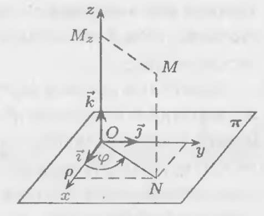
Для любой точки M плоскости можно рассмотреть как обычные полярные координаты (ρ, φ), так и обобщённые (ρ', φ'):

$$\rho' = -\rho, \quad \varphi' = \varphi + \pi.$$

Формулы связи с декартовыми остаются прежними:

$$x = \rho' \cos\varphi', \quad y = \rho' \sin\varphi'.$$

Определим в фиксированной плоскости π полярную систему координат с полюсом O и полярной осью $O\rho$, а через точку O проводится ось Oz с началом в точке O, направляющим вектором $\mathbf{k}$ и перпендикулярная плоскости π.



Определение

Упорядоченная тройка чисел (ρ, φ, z), взятая именно в таком порядке, называется *цилиндрическими координатами точки* M, при этом используются обозначения $M(\rho, \varphi, z)$.

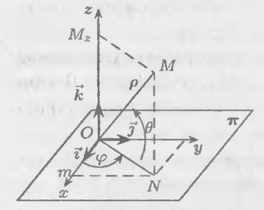
$$\rho \in (0, +\infty), \quad \varphi \in [0, 2\pi), \quad z \in (-\infty, +\infty).$$

Цилиндрические координаты в трёхмерном пространстве II

Цилиндрические координаты (ρ, φ, z) и декартовы (x, y, z) связаны соотношениями

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Зафиксируем в некоторой плоскости π точку O — полюс и через неё проведём луч Om в плоскости π и ось Oz с направляющим вектором $\mathbf{k} \perp \pi$.



ρ — *сферический радиус*, т. е. $\rho = d(O, M)$; $\rho \in [0, +\infty)$. Угол φ — *долгота*, $\varphi = \angle(Om, ON)$; $\varphi \in [0, 2\pi)$, угол θ — *широта*, $\theta = \angle(ON, OM)$; $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Определение

Упорядоченная тройка чисел (ρ, φ, θ), взятая именно в таком порядке, называется *сферическими координатами точки* M, при этом используются обозначения $M(\rho, \varphi, \theta)$.

Сферические координаты в трёхмерном пространстве II

Сферические координаты (ρ, φ, θ) и декартовы (x, y, z) связаны соотношениями

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\varphi, \\ y = \rho\cos\theta\sin\varphi, \\ z = \rho\sin\theta. \end{cases}$$