

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ И НЕЗАВИСИМОСТЬ ВЕКТОРОВ

ШИМАНЧУК Дмитрий Викторович
d.shimanchuk@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики – процессов управления

Санкт-Петербург — 2016г.

Определение

Линейным пространством или *линеалом*, называют множество $\mathbf{L} = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \dots, \mathbf{s}, \mathbf{p}, \dots\}$ элементов произвольной природы, называемых векторами, для которого:

- 1) задано правило, по которому любым двум элементам $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{L}$ сопоставляется элемент $\mathbf{s} \in \mathbf{L}$, называемый их суммой и обозначаемый $\mathbf{s} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$;
- 2) задано правило, по которому каждому элементу $\mathbf{x} \in \mathbf{L}$ и любому вещественному числу $\lambda \in \mathbb{R}$ сопоставляется элемент $\mathbf{p} \in \mathbf{L}$, называемый произведением \mathbf{x} на λ и обозначаемый $\mathbf{p} = \lambda\mathbf{x}$;
- 3) заданные правила при любых $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{L}$ и любых вещественных числах $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ подчинены аксиомам:
 1. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$;
 2. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$;
 3. Существует нулевой вектор $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$;
 4. Для каждого $\mathbf{x} \in \mathbf{L}$ существует $\mathbf{x}' \in \mathbf{L}$, что $\mathbf{x} + \mathbf{x}' = \mathbf{0}$;
 5. $\lambda(\mu\mathbf{x}) = (\lambda\mu)\mathbf{x}$;
 6. $(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}$;
 7. $\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$;
 8. $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Пусть \mathbf{L} — произвольный линеал, $\mathbf{a}_i \in \mathbf{L}$, $i = 1, \dots, n$ — его элементы (векторы).

Определение

Элемент (вектор) $\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{a}_i$, где $\alpha_i, i = 1, \dots, n$ — произвольные вещественные числа, называется *линейной комбинацией элементов (векторов) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$* .

Определение

Элементы (векторы) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ называются *линейно зависимыми*, если существуют такие вещественные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, среди которых хотя бы одно отлично от нуля ($\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2 \neq 0$), что $\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$.

Определение

Элементы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ называются *линейно независимыми*, если равенство $\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$ возможно лишь в случае, когда вещественные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ одновременно равны нулю.

Теорема 1.

Необходимым и достаточным условием линейной зависимости $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ является возможность разложения по крайней мере одного из этих элементов по остальным.

Теорема 2.

Если хотя бы один из элементов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ нулевой, то эти элементы линейно зависимы.

Теорема 3.

Если среди n элементов какие-либо $n - 1$ элементов линейно зависимы, то и все n элементов линейно зависимы.

Следствие. Если система элементов линейно независима, то и любое непустое подмножество этой системы также линейно независимо.

Геометрический смысл линейной зависимости и независимости векторов на плоскости I

Теорема 1.

Необходимым и достаточным условием линейной зависимости двух векторов линейного векторного пространства V^2 является их коллинеарность.

Следствие 1. Если векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} неколлинеарны, то они линейно независимы.

Следствие 2. Среди двух неколлинеарных векторов не может быть нулевого вектора.

Геометрический смысл линейной зависимости и независимости векторов на плоскости II

Теорема 2.

Необходимым и достаточным условием линейной зависимости трёх векторов в линейном пространстве \mathbf{V}^3 является их компланарность.

Следствие 1. Если векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} не компланарны, то они линейно независимы в \mathbf{V}^3 .

Следствие 2. Среди трёх некопланарных векторов не может быть двух коллинеарных.

Следствие 3. Каковы бы ни были два неколлинеарных вектора \mathbf{a} , \mathbf{b} на плоскости, всякий другой вектор \mathbf{c} , компланарный с \mathbf{a} и \mathbf{b} , может быть разложен по векторам \mathbf{a} и \mathbf{b} в виде $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$

Геометрический смысл линейной зависимости и независимости векторов на плоскости III

Теорема 3.

Любые четыре вектора линейного пространства V^3 линейно зависимы.

Следствие. Каковы бы ни были три некопланарных вектора \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} пространства V^3 , любой вектор \mathbf{d} пространства V^3 может быть разложен по векторам \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} в виде $\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$.

Определение

Упорядоченный набор линейно независимых элементов (векторов) $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ линейного пространства \mathbf{L} называется *базисом линейного пространства*, если для каждого элемента (вектора) $\mathbf{x} \in \mathbf{L}$ найдутся такие вещественные числа $x_i, i = 1, \dots, n$, что

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i$$

Определение

Это равенство называют *разложением элемента (вектора) \mathbf{x} по базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$* .

Определение

Числа x_1, x_2, \dots, x_n , фигурирующие в разложении элемента \mathbf{x} линейного пространства \mathbf{L} по заданному базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$, называются *координатами вектора \mathbf{x} относительно рассматриваемого базиса*.

Теорема 1.

Всякий элемент линеала \mathbf{L} может быть единственным образом разложен по базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$, тем самым его координаты относительно заданного базиса определяются однозначно.

Теорема 2.

При сложении элементов линеала \mathbf{L} их координаты складываются, а при умножении элемента на вещественное число все его координаты умножаются на это число.

Теорема 3.

Если каждый из $n + 1$ элементов $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ линеала \mathbf{L} представим в виде линейной комбинации n линейно независимых элементов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ того же линеала, т. е.

$$\mathbf{y}_j = \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} \mathbf{x}_i, \quad j = 0, \dots, n,$$

то элементы $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ линейно зависимы.

Следствие. Любые $n + 1$ элементов в пространстве \mathbb{R}^n линейно зависимы.

Определение

Линеал \mathbf{L} называют *конечномерным* (*n -мерным*), если в нём имеется линейно независимая система, состоящая из n элементов, а всякая система содержащая более n элементов, является линейно зависимой.

Определение

Число n называют *размерностью линеала* \mathbf{L} и обозначают символом $\dim(\mathbf{L}) = n$.

Определение

Линеал \mathbf{L} называется *бесконечномерным*, если для любого натурального числа N в нём найдётся линейно независимая система, состоящая из N элементов.

Теорема.

Для того чтобы линейное пространство \mathbf{L} было n -мерным, необходимо и достаточно, чтобы в нём существовал базис, состоящий из n элементов.

9. Линейное пространство \mathbf{L} конечномерно и его размерность равна n (аксиома размерности).

Определение

Соответствие между элементами двух линейалов \mathbf{L} и \mathbf{L}' называется *взаимно однозначным*, если каждому элементу из \mathbf{L} отвечает единственный элемент из \mathbf{L}' , причём каждый элемент из \mathbf{L}' отвечает одному лишь элементу из \mathbf{L} .

Определение

Два элемента \mathbf{L} и \mathbf{L}' называются *изоморфными* ($\mathbf{L} \approx \mathbf{L}'$), если между элементами этих линейалов можно установить взаимно однозначное соответствие $\varphi : \mathbf{x} \in \mathbf{L} \rightarrow \varphi(\mathbf{x}) \in \mathbf{L}'$, что $\varphi(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\varphi(\mathbf{x})$, $\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y})$, где $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{L}$, λ — любое вещественное число. Данное взаимно однозначное соответствие называют *линейным изоморфизмом*.

Теорема 1.

Все линейные пространства одной и той же размерности изоморфны.

Следствие. Каждое n -мерное линейное пространство L^n изоморфно координатному пространству \mathbb{R}^n .

Теорема 2.

Изоморфные линеалы имеют одну и ту же размерность.

Следствие 1. Конечномерные линеалы разных размерностей неизоморфны.

Следствие 2. Бесконечномерный линеал не может быть изоморфен никакому конечномерному линеалу.