АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
ВЕКТОРЫ

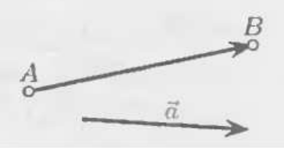
ШИМАНЧУК Дмитрий Викторович
shymanchuk@mail.ru

Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики – процессов управления

Санкт-Петербург — 2016г.

Определение

Вектором (геометрическим вектором) называется отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек является начальной и какая — конечной.



Определение

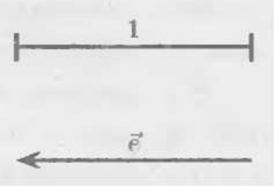
Длина или *модуль вектора*, есть длина соответствующего отрезка, определяющего данный вектор.

Определение

Вектор называется *нулевым*, если его начало и конец совпадают.

Определение

Вектор называется *единичным*, если его длина равна единице в принятой системе измерения.



Определение

Векторы называются *компланарными*, если они расположены в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Определение

Векторы *коллинеарны*, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых.

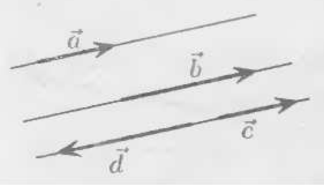
Определения

Коллинеарные векторы *одинаково направлены (сонаправлены)*, если у векторов, имеющих общее начало и длины, равные длинам исходных векторов, и расположенных на прямой, параллельной прямым, на которых находятся исходные векторы, концы расположены по одну сторону от общего начала. В противном случае коллинеарные векторы *противоположно направлены.*

Ортом произвольного ненулевого вектора называют единичный вектор, коллинеарный исходному и имеющий то же направление, что и исходный вектор.

Векторы *равны*, если они коллинеарны, имеют одинаковую длину и одинаковое направление.

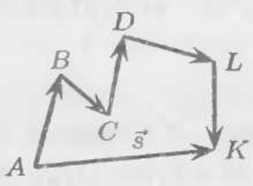
Векторы *противоположны*, если они коллинеарны, имеют одинаковую длину, но направления их противоположны.



Сумма векторов I

Определение

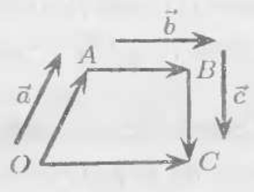
Суммой векторов, следующих друг за другом, называется вектор, начало которого совпадает с началом первого вектора, а конец — с концом последнего вектора.



$$\mathbf{s} = \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DL} + \overrightarrow{LK}$$

Определение

Суммой произвольно расположенных векторов называется сумма векторов, следующих друг за другом, построенных, начиная с некоторой точки O, и равных соответственно данным векторам.



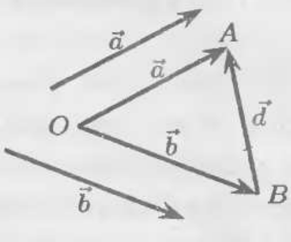
Сумма векторов III

Свойства суммы векторов

1. $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$ (коммутативность);
2. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ (ассоциативность);
3. $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$ (нулевой вектор);
4. $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$ (свойство противоположного вектора).

Определение

Разностью векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называют такой вектор $\mathbf{d}$, который в сумме с вектором $\mathbf{b}$ даёт вектор $\mathbf{a}$, т. е. $\mathbf{d} + \mathbf{b} = \mathbf{a}$. Разность векторов $\mathbf{d}$ обозначается $\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$.



Определение

Произведением вектора $\mathbf{a}$ на вещественное число α называется вектор $\mathbf{p} = \alpha\mathbf{a}$, определяемый следующим образом: вектор $\mathbf{p}$ коллинеарен вектору $\mathbf{a}$, имеет направление вектора $\mathbf{a}$, если $\alpha > 0$, и направление, противоположное вектору $\mathbf{a}$, если $\alpha < 0$, при этом $|\mathbf{p}| = |\alpha| \cdot |\mathbf{a}|$.

Теорема.

Если ненулевые векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, то любой из них представим через другой, т. е. найдётся такое число $\alpha \neq 0$, что вектор $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{a}$.

Свойства произведения вектора на число

1. $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$ (ассоциативность);
2. $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$ (дистрибутивность относительно суммы чисел);
3. $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ (дистрибутивность относительно суммы векторов);
4. $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$ (свойство единицы).

Определение

Операции сложения (свойства суммы векторов) и операции умножения вектора на вещественное число (свойства произведения вектора на число) называются *линейными операциями над векторами*.

Радиус-вектор точки

Зафиксируем произвольную точку O, которую будем называть *полюсом*. Рассмотрим вектор с началом в точке O и концом в некоторой произвольной точке A.

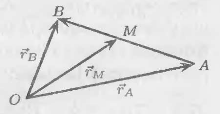
Определение

Вектор $\mathbf{r}_A = \overrightarrow{OA}$ будем называть радиус-вектором произвольной точки A относительно полюса O.

Определение

Точка M, не совпадающая с точкой B, делит вектор $\overrightarrow{AB}$ в отношении $\lambda \neq -1$, если $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$.

Определим радиус-вектор точки M:



$$\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_A = \lambda(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_M) \quad \text{или} \quad \mathbf{r}_M = \frac{\mathbf{r}_A + \lambda \mathbf{r}_B}{1 + \lambda}.$$

Если M лежит внутри отрезка AB, то $\lambda > 0$;

Если M лежит вне отрезка AB, то $\lambda < 0$;

Если M совпадает с A, то $\lambda = 0$;

Если $M \to B$, то $\lambda \to \infty$;

Если M совпадает с B, то $\lambda \nexists$.

Если M делит вектор $\overrightarrow{AB}$ в отношении λ, то

$$\lambda = \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}},$$

где $\overline{\cdot}$ – алгебраическая мера вектора.

$$\lambda = \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \overset{\text{л.ш.}}{=} \frac{\overline{AB} + \overline{BM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{MB}} + (-1).$$

Если точка $M \to \pm\infty$, то $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{MB}} \to 0$, тогда $\lim_{M \to \pm\infty} \lambda = -1$.