САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет прикладной математики – процессов управления

Н. В. РАСПОПОВА, А. А. ДАВЫДЕНКО

ЗАДАЧИ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ В КОСМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ. ЧАСТЬ 2

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2016

УДК 521.1:51-71
ББК 22.6

Р е ц е н з е н т ы : канд. физ.-мат. наук, доц. *Г.Ш. Тамасян* (С.-Петерб. гос. ун-т) ; канд. физ.-мат. наук, доц. *А.И. Мартынова* (СПбГЛТУ)

Печатается по рекомендации Учебно-методической комиссии факультета прикладной математики – процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета

Задачи движения тел в космических системах. Часть 2: Учеб. пособие / Распопова Н.В., Давыденко А.А. — СПб.: "СОЛО", 2016. — 28 с.

ISBN издания:

В пособии рассмотрены различные задачи движения тел в звездных системах, касающиеся методов расчета траекторий. Изложенный материал соответствует годовому курсу специальной дисциплины, читаемой на факультете Прикладной математики-процессов управления СПбГУ. Представлены решения некоторых задач вычисления орбит малых тел Солнечной системы по наблюдениям. При составлении пособия использовались разные источники, список которых приведен.

Пособие предназначено для студентов университетов, обучающихся на очном отделении физико-математических специальностей.

Библиогр. 8 назв.

.

ISBN издания:

ОГЛАВЛЕНИЕ

Перейти к оглавлению на странице: 3

ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие основано на специальных курсах лекций, которые авторы читали на факультете Прикладной математики — процессов управления СПбГУ специалистам и бакалаврам третьего и четвертого курсов.

В учебном пособии рассматриваются некоторые вопросы движения тел в космических системах. В 2015 году была издана первая часть, посвященная задаче двух тел, методам расчета траекторий искусственных спутников Земли в рамках возмущенной задачи двух тел, а также частым случаям задачи трех тел.

Вторая часть содержит описание задач вычисления орбит малых тел Солнечной системы по наблюдениям. В параграфе 1 кратко приведена справочная информация об астероидах и кометах, а также о характере их движения. В последующих параграфах дана постановка задачи определения предварительной орбиты без учета возмущений и описаны основные классические методы решения этой задачи, в том числе нахождение элементов орбиты по трем наблюдениям (метод Гаусса).

При написании курса лекций использовались различные источники, список которых приведен. Этот курс может быть использован студентами университета очной формы обучения физико-математических направлений.

Авторы благодарны рецензентам за ценные замечания, профессору С. А. Кутузову за помощь при разработке курса.

§1. Малые тела Солнечной системы

Объем наших знаний о Солнечной системе резко увеличился в последние годы. Хотя с 1930 г. не было обнаружено ни одной новой планеты, серьезные успехи были достигнуты в изучении малых тел Солнечной системы [4]. Открыты спутники планет, каталогизированы более 150 тыс. орбит астероидов, многочисленные объекты обнаружены на орбитах за Плутоном, Пять малых планет признаны Международным астрономическим союзом (МАС) карликовыми планетами. Термин «малое тело Солнечной системы» был принят МАС в 2006 г. для обозначения всех объектов Солнечной системы, не являющихся классическими планетами (Меркурий, ..., Нептун) или планетами–карликами. Таким образом, в число малых тел Солнечной системы попали все кометы; все традиционные астероиды (за исключением Цереры, отнесенной к планетам-карликам); все «кентавры», движущиеся между орбитами планет–гигантов; все «троянцы», движущиеся по орбитам планет синхронно с ними, а также почти все объекты за орбитой Нептуна, кроме Плутона и Эриды, отнесенных в планетам–карликам. Спутники планет не входят в число малых тел Солнечной системы [7].

1.1 Астероиды

Астероиды — это твердые каменистые тела, которые, подобно планетам, движутся по околосолнечным эллиптическим орбитам. Но размеры этих тел намного меньше, чем у обычных планет, поэтому астероиды раньше называли малыми планетами. После выделения планет–карликов в самостоятельную группу, среди астероидов действительно остались только твердые тела, внутренняя структура которых способна сопротивляться гравитационному сжатию.

Даже с помощью лучших наземных телескопов невозможно различить форму крупнейших астероидов: их угловой диаметр не превышает $0.5''$. Как и большие планеты, астероиды в видимом диапазоне спектра светят отраженным солнечным светом. Большинство известных астероидов движется между орбитами Марса и Юпитера на расстояниях от Солнца $2.2 - 3.2$ а.е.

Имена астероидам обычно присваивают их первооткрыватели в соответствии с международными правилами. Вначале им давали мифологические имена, продолжая традицию наименования больших планет. Когда древние имена иссякли, астероидам стали давать имена выдающихся людей. Но в последнее время, благодаря автоматизации астрономических наблюдений, частота открытия новых астероидов значительно превысила возможности Международного астрономического союза по рассмотрению заявок на присвоение имен. В настоящее время астероиду сразу после открытия присваивается предварительное обозначение, содержащее год открытия (например, 1937 DA), а потом, если орбита астероида будет определена надежно, — постоянный номер и название [7].

Кольцевую область между орбитами Марса и Юпитера, населенную астероидами, традиционно называют **Главным поясом астероидов**. Длительность орбитального периода в этой зоне от 3 до 9 земных лет в зависимости от удаленности от Солнца. Средняя орбитальная скорость в ней около 20 км/с. Астероиды Главного пояса движутся по устойчивым орбитам, близким к круговым или слабо эксцентричным. Они находятся в «безопасной» зоне, где минимально гравитационное влияние на них больших планет, в первую очередь, — Юпитера. Наклоны орбит астероидов к плоскости эклиптики (i) достигают 70°, но обычно не превышают 10°. На этом основании астероиды Главного пояса делят примерно поровну на плоскую ($i < 8^\circ$) и сферическую подсистемы.

Среди астероидов есть группы, которые движутся по орбите Юпитера вокруг Солнца (см. подробнее в [5]):

- группа Греки (Ахилл, Аякс, Одиссей и другие) опережает Юпитер на 60° — треугольная точка Лагранжа L_4,
- группа Троянцы (Приам, Эней, Троил и другие) отстает от Юпитера на 60° — треугольная точка Лагранжа L_5.

В отличие от троянцев, которые могли постепенно накопиться в окрестностях точек Лагранжа в ходе длительной столкновительной эволюции астероидов, существуют иные семейства астероидов, скорее всего возникшие в результате относительно недавнего распада крупных родительских тел. Наличие астероидов-троянцев присуще не только системе Солнце–Юпитер.

Некоторые области главного пояса астероидов почти не населены – это так называемые пробелы или люки Кирквуда [4]. Орбиты в люках Кирквуда называют резонансными, поскольку движущиеся по ним астероиды испытывают регулярное гравитационное возмущение со стороны Юпитера в одних и тех же точках своей орбиты. Периоды обращения по этим орбитам находятся в простых отношениях с периодом обращения Юпитера (например, $1:2$, $3:7$, $2:5$, $1:3$). Если какой-либо астероид, например, в результате столкновения с другим телом, попадает на резонансную орбиту, то ее эксцентриситет и большая полуось быстро меняются под влиянием гравитационного поля Юпитера. Астероид покидает резонансную орбиту и может даже уйти из Главного пояса. Таков постоянно действующий механизм «очистки» пробелов Кирквуда.

У внутреннего края главного пояса астероидов выделяются группы тел, орбиты которых вытянуты в центральную область Солнечной системы и могут пересекаться с орбитами Марса, Земли, Венеры и даже Меркурия. В первую очередь, это группы Амура, Аполлона и Атона (по именам их крупнейших членов) [7]:

- 1221 Амур; орбита в перигелии почти касается Земли (все астероиды с перигелийными расстояниями от 1,33 до 1,017 а.е.);

- 1862 Аполлон; орбита в перигелии заходит за орбиту Земли (орбиты таковы, что большая их часть лежит вне орбиты Земли, а ближайшая к Солнцу точка (перигелий) всё-таки проникает внутрь земной орбиты (меньше 1,017 а.е.));
- 2962 Атон; орбиты которых почти целиком лежат внутри орбиты Земли, но всё-таки в небольшой части выходят за пределы последней.

Орбиты этих астероидов уже не так стабильны, как у членов главного пояса: они быстро эволюционируют под влиянием Юпитера и планет земной группы. По этой причине астероиды могут переходить из одной группы в другую, а само их деление на вышеназванные группы довольно условно и основано на данных об их современных орбитах. Так, амурцы движутся по эллиптическим орбитам с расстоянием в перигелии не более 1.3 а.е. (но и не менее 1 а.е.). У аполлонцев это расстояние менее 1 а.е., то есть они проникают внутрь земной орбиты. В то время, как у амурцев и аполлонцев большая полуось орбиты заметно превосходит 1 а.е., у атонцев она менее или порядка этой величины, поэтому они движутся в основном внутри земной орбиты.

Ясно, что аполлонцы и атонцы, пересекая орбиту Земли, создают угрозу столкновения. Существует общее название группы малых тел с большими полуосями орбит менее 1.3 а. е. — объекты, сближающиеся с Землей (Near-Earth object, NEO). Около 1000 из них имеют размер более 1 км и поэтому представляют потенциальную угрозу для всей биосферы Земли. Хотя в последние годы поиск подобных тел проводится очень активно, ясно, что их общее количество может быть заметно больше: до 1500–2000 размером более 1 км и до 140000 размером более 100 м (такие объекты грозят нам локальными катастрофами) [7].

Некоторые астероиды движутся в резонансе сразу с несколькими планетами. Впервые это было замечено в движении астероида Торо. Он совершает 5 орбитальных оборотов приблизительно за то же время, как Земля – 8, Венера – 13. Перигелий астероида Торо находится между орбитами Венеры и Земли. Другой астероид, Амур, движется в резонансе с Венерой, Землей, Марсом и Юпитером, совершая 3 своих оборота за то же время, за которое Венера совершает 13 оборотов, Земля – 8 оборотов; резонанс с Марсом 12:17

и с Юпитером 9:2. Очевидно, такое движение предохраняет астероиды от захвата гравитационным полем планеты и продлевает им жизнь.

За орбитой Юпитера также существуют астероидоподобные тела. Более того, оказалось, что таких тел очень много на периферии Солнечной системы. В 1990-е гг. за орбитой Нептуна обнаружили более 300 астероидоподобных объектов диаметрами от 100 до 800 км. Населенную ими область назвали «поясом Койпера». К 2007 г. их число перевалило за 1000, а диаметр крупнейшего из них (Эрида) оказался 2400 км. По оценкам, количество тел в поясе Койпера может быть не меньше, чем в Главном поясе астероидов. Предположения об этом в разное время высказывались различными астрономами, но свое название новый резервуар малых тел получил в честь известного американского астронома Джерарда Койпера, который в 1951 г. сформулировал гипотезу о том, что за орбитой Нептуна, на расстояниях 30–50 а. е. от Солнца может быть скопище тел, служащих источником короткопериодических комет. Как выяснилось позже, в 1949 г. такое же предположение сделал англичанин Кеннет Эджворт (1880-1972), поэтому в Европе многие предпочитают называть эту область Солнечной системы поясом Эджворта-Койпера.

По параметрам орбит транснептуновые объекты разделили на два класса. Класс «плутино» объединил те из них, которые (как и Плутон) движутся в резонансе $3:2$ с Нептуном по довольно вытянутым эллиптическим орбитам: большие полуоси около 39 а.е.; эксцетриситеты 0.11–0.35; наклоны орбит к эклиптике от 0 до 20°. В конце 1990-х годов была дискуссия: считать ли Плутон полноправной планетой. Тогда решили считать его планетой, поскольку он был крупнее любого из новооткрытых тел и к тому же имеет атмосферу и большой спутник Харон. Но к 2006 г. в поясе Койпера обнаружились объекты крупнее Плутона, поэтому вместе с Плутоном их выделили в особый тип планет-карликов. Однако по характеру движения Плутон по-прежнему входит в класс «плутино». Во второй, более многочисленный класс вошли «типичные объекты пояса Койпера», движущиеся по орбитам, близким к круговым, с большими полуосями от 40 до 48 а.е. и наклонами от 0 до 40°.

Обнаружены также объекты между поясом Койпера и главным поясом астероидов — это «кентавры», первым из которых был открыт в 1977 г. Хирон, имеющий диаметр около 200 км. В афелии (18.8 а.е.) он касается орбиты Урана, а по пути к перигелию (8.43 а. е.) пересекает орбиту Сатурна. Поэтому его движение очень неустойчиво, и он в скором времени либо столкнется с одной из планет, либо будет выброшен из планетной системы. Хирон зарегистрировали как астероид, но в 1989 г. у него обнаружилась пылевая кома, в 1991 г. — газовая оболочка, а к 1996 г., проходя перигелий, он уже был типичной кометой, наглядно демонстрируя отсутствие резкой границы между астероидами и кометами как по составу вещества, так и, возможно, по происхождению. Все кентавры расположены между орбитами Юпитера и Нептуна, движутся по сильно вытянутым орбитам с большим эксцентриситетом, а наклон орбиты к плоскости эклиптики изменяется от 0° до 25°.

Перейти к оглавлению на странице: 3

1.2 Кометы

Вместе с астероидами и метеорными телами кометы относят к малым телам Солнечной системы. Особенностью комет является то, что при сближении с Солнцем у них появляется хвост, почти всегда направленный в сторону от Солнца. Кометы прилетают из отдаленных концов Солнечной системы (30-50 а.е. пояса Койпера, 50000 а.е. облака Оорта), в то время как астероиды приходят в основном из пояса астероидов (1.5-5 а.е.). Кометы состоят в основном изо льда, в астероидах льда очень мало или совсем нет. Размеры похожи.

Согласно законам механики, движение тела под действием гравитационного притяжения к другому телу — к Солнцу происходит по одному из конических сечений — окружности, эллипсу, параболе или гиперболе. В уравнениях движения за форму орбиты отвечает эксцентриситет (e), физический смысл которого в том, что он указывает отношение кинетической энергии тела к его потенциальной энергии в гравитационном поле Солнца. Если $e < 1$, тело не может преодолеть притяжение Солнца и движется вокруг него по замкнутой орбите —– эллипсу или, в частном случае, окружности. При $e \geqslant 1$ орбита разомкнута; это гипербола или, в частном случае, парабола.

Орбиты комет проходят вблизи и вдали от Солнца. С ними уже нельзя рассматривать задачу двух тел, так как они пересекают орбиты планет и подвергаются их влиянию. В пределах планетной системы ни одна комета не движется по идеальному коническому сечению, поскольку гравитационное воздействие планет постоянно искажает ее «правильную» траекторию.

Кометы делят на два основных класса в зависимости от периода их обращения вокруг Солнца [7]: короткопериодические имеют период менее 200 лет, долгопериодические — более 200 лет. В конце XX в. наблюдалась очень яркая долгопериодическая комета Хейла-Боппа, которая впервые за исторический период появилась в окрестности Солнца. Уже обнаружено около 700 долгопериодических комет. Их эллиптические орбиты настолько вытянуты, что почти не отличимы от парабол, поэтому такие кометы еще называют параболическими. Из них около 30 имеют очень малые перигелийные расстояния, отчего их иногда называются «царапающими Солнце». В отличие от планет и большинства астероидов, орбиты которых лежат вблизи эклиптики, а обращение происходит в одном («прямом») направлении, орбиты долгопериодических комет наклонены к плоскости эклиптики под всевозможными углами, а обращение происходит как в прямом, так и в обратном направлениях.

Короткопериодических комет сейчас известно более 200. Как правило, их орбиты расположены близко к плоскости эклиптики. Все короткопериодические кометы являются членами кометно–планетных семейств. Крупнейшее семейство принадлежит Юпитеру: около 150 комет с афелийными расстояниями (т.е. наибольшим удалением от Солнца) близкими к большой полуоси орбиты Юпитера (5.2 а.е). Их периоды обращения заключены в пределах 3.3–20 лет.

Перейти к оглавлению на странице: 3

§2. Определение орбит по наблюдениям.

Лавина наблюдательных данных в последние десятилетия существенно расширила наше представление о динамике Солнечной системы, которая является сложной и тонко структурированной системой обращающихся тел. Подробно изучено явление резонанса в планетных системах [1], [4] обнаружены новые тела, выявлены хаотические свойства движения у тех или иных групп объектов [6].

В данном пособии мы не имеем возможности детально описать все методы определения орбит и изучения из свойств. Рассмотрим только несколько классических подходов к построению орбит, точнее, нахождению элементов орбит, по наблюдениям. Перечислим основные задачи:

1. Определение орбиты по положению и скорости
2. Определение орбиты по положениям
   (a) Метод Гиббса определения орбиты по трем положениям
   (b) Определение орбиты по двум положениям и параметру орбиты
3. Определение орбиты по трем наблюдениям
   (a) Метод Гаусса
   (b) Метод Лапласа

§3. Вычисление орбит по трем наблюдениям

Орбиты (а точнее, элементы орбит) планет, комет и спутников определяются по результатам астрономических наблюдений в три этапа:

1. Вычисляются элементы так называемой предварительной орбиты без учёта возмущений, то есть решается задача двух тел. Для этой цели в большинстве случаев достаточно иметь три наблюдения (координаты трёх точек на небесной сфере) небесного тела, охватывающие промежуток времени в несколько дней или недель.

2. Осуществляется улучшение предварительной орбиты (вычисляются более точные значения элементов орбиты) по результатам более длительного ряда наблюдений.

3. Вычисляется окончательная орбита, которая наилучшим образом согласуется со всеми имеющимися наблюдениями.

3.1 Постановка задачи.

С Земли в моменты $t_1 < t_0 < t_2$ измеряются угловые координаты тела $(\alpha_\ell, \delta_\ell)$, $\ell = 1, 0, 2$ (прямое восхождение и склонение). Считая движение Земли известным, требуется найти элементы орбиты светила: a (большая полуось), e (эксцентриситет), i (наклонение — угол между экваториальной плоскостью и плоскостью орбиты), ω (аргумент перигея — угол от линии узлов до направления на перигей орбиты) , Ω (долгота восходящего узла — угол между направлениями на точку весеннего равноденствия и на восходящий узел орбиты), τ (момент прохождения через перицентр), ограничиваясь невозмущенным движением.

Будем использовать гео- и гелиоцентрические системы координат с осями параллельными экваториальной системе [2], [3]. Имеем гелиоцентрический радиус–вектор светила $\mathbf{r}_\ell$, его геоцентрический вектор $\mathbf{d}$ и гелиоцентрический радиус-вектор Земли $\mathbf{r}_\oplus$, а также связь между ними

$$\mathbf{r}_\ell = \mathbf{r}_\oplus^{(\ell)} + \mathbf{d}_\ell, \quad \mathbf{r}_\ell = \begin{pmatrix} x_\ell \\ y_\ell \\ z_\ell \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_\oplus^{(\ell)} = -\mathbf{r}_\odot^{(\ell)} = -\begin{pmatrix} X_\ell \\ Y_\ell \\ Z_\ell \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$\mathbf{r}_\odot$ — геоцентрический радиус–вектор Солнца.

$$\mathbf{d}_\ell = d_\ell \begin{pmatrix} \lambda_\ell \\ \mu_\ell \\ \nu_\ell \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \lambda_\ell = \cos\delta_\ell \cos\alpha_\ell, \\ \mu_\ell = \cos\delta_\ell \sin\alpha_\ell, \\ \nu_\ell = \sin\delta_\ell, \end{cases} \tag{2}$$

λ, μ, ν — направляющие косинусы $\mathbf{d}$.

Получили 9 скалярных уравнений (1) и, так как геоцентрические координаты Солнца $\mathbf{r}_\odot^{(\ell)}$ для момента t_ℓ нам известны, а гелиоцентрические координаты светила выражаются через 6 элементов орбиты $\mathbf{r}_\ell = \mathbf{r}\,(t_\ell; a, e, i, \Omega, \omega, \tau)$, имеем 9 неизвестных:

$$d_1,\ d_0,\ d_2,\ a,\ e,\ i,\ \Omega,\ \omega,\ \tau.$$

Итак, в случае трех наблюдений, будем иметь девять уравнений с девятью неизвестными. Таким образом, для нахождения орбиты необходимо иметь по крайней мере три наблюдения. Изучение решения указанной системы девяти уравнений покажет, что в общем случае эта система разрешима, так что три наблюдения не только необходимы, но и достаточны. Лишь в некоторых исключительных случаях для получения орбиты нужно иметь не три, а четыре наблюдения.

Гелиоцентрические координаты светила $\mathbf{r}_\ell$ являются весьма сложными функциями элементов орбиты. Поэтому задачу традиционно разбивают на две части:

1) нахождение трех геоцентрических расстояний d_1, d_0, d_2;

2) вычисление элементов орбиты при помощи уже известных геоцентрических расстояний.

3.2 Вычисление трех геоцентрических расстояний

Уравнения относительного движения имеют вид [5], [8]:

$$\frac{d^2\,\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{G(m_0+m_1)\mathbf{r}}{r^3}.$$

Здесь G — гравитационная постоянная. В небесной механике используется постоянная тяготения Гаусса k

$$k^2 = G.$$

По третьему закону Кеплера

$$\frac{a^3}{(M_\odot + M)P^2} = \frac{k^2}{4\pi^2},$$

где M — масса планеты, $M_\odot$ — масса Солнца. Отсюда

$$k = \frac{a^{3/2}}{(M_\odot + M)^{1/2}}\frac{2\pi}{P}.$$

Величина $2\pi/P$ означает среднее суточное движение планеты (в радианах или в градусах). Подставляя сюда значения для Земли $a = a_\oplus = 149\,597\,870\,\text{км}$, $P = P_\oplus$ — звездный год в секундах — время обращения Земли вокруг Солнца относительно звезд, $M = M_\oplus = 3.005\cdot 10^{-6}M_\odot$ и используя систему единиц

$$1\text{а.е.},\ M_\odot,\ d,$$

d — средние сутки, получаем с большой точностью

$$k = 0.017202098950, \quad k^\circ = 0^\circ.9856076686.$$

Единицей k является величина $(1\text{а.е.})^{3/2}M_\odot^{-1/2}d^{-1}$.

В уравнениях движения пренебрежем массой планеты по сравнению с массой Солнца, принятой за единицу и заменим переменную t на

$$s = k(t-t_0), \quad k^{-1} = 58^d.13244\ldots\text{суток},$$

где s — время, считаемое от выбранного нами начального момента и выраженное в единицах, равных $1/k$.

В результате замен получим:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = -u\mathbf{r}, \quad u = r^{-3}. \tag{3}$$

Так как правая часть является голоморфной функцией в точке $s = 0$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, то есть может быть представлена степенным рядом (случай прямолинейного движения нами исключается), решение можно разложить в ряд по степеням s, который сходится при достаточно малых (так и есть на практике) $|s|$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_0' s + \frac{1}{2}\mathbf{r}_0'' s^2 + \frac{1}{6}\mathbf{r}_0''' s^3 + \ldots$$

Здесь дифференцирование идет по s, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$.

Дифференцируя (3) по s получаем

$$\mathbf{r}_0'' = -u_0\mathbf{r}_0, \quad \mathbf{r}_0''' = -u_0\mathbf{r}_0' - u_0'\mathbf{r}_0, \quad \mathbf{r}_0^{IV} = (u_0^2 - u_0'')\mathbf{r}_0 - 2u_0'\mathbf{r}_0', \quad \ldots$$

Сгруппируем в разложении $\mathbf{r}$ члены с $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}_0'$:

$$\mathbf{r}_\ell = F(s_\ell)\mathbf{r}_0 + G(s_\ell)\mathbf{r}_0', \quad \ell = 1, 0, 2, \tag{4}$$

где

$$\left.\begin{aligned} F(s) &= 1 - \frac{1}{2}u_0 s^2 - \frac{1}{6}u_0' s^3 - \ldots, \quad && F(0) = 1, \\ G(s) &= s - \frac{1}{6}u_0 s^3 - \frac{1}{12}u_0' s^4 + \ldots, \quad && G(0) = 0. \end{aligned}\right\}$$

Из 6 скалярных уравнений (4) исключим $\mathbf{r}_0'$ (будем обозначать $F(s_\ell) = F_\ell, G(s_\ell) = G_\ell$):

$$G_2\mathbf{r}_1 - G_1\mathbf{r}_2 = (F_1G_2 - F_2G_1)\,\mathbf{r}_0$$

или

$$P_1\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 + P_2\mathbf{r}_2 = 0, \quad P_1 = \frac{G_2}{F_1G_2 - F_2G_1}, \quad P_2 = \frac{-G_1}{F_1G_2 - F_2G_1}. \tag{5}$$

Если положить
$$\bar{s} = s_2 - s_1 = k(t_2 - t_1),$$
то можно выразить
$$F_1G_2 = s_2 - \frac{1}{6}u_0 s_2^3 - \frac{1}{12}u_0' s_2^4 - \frac{1}{2}u_0' s_1^2 s_2 - \frac{1}{6}u_0' s_2 s_1^3 + \dots$$
$$F_2G_1 = s_1 - \frac{1}{6}u_0 s_1^3 - \frac{1}{12}u_0' s_1^4 - \frac{1}{2}u_0' s_1 s_2^2 - \frac{1}{6}u_0' s_1 s_2^3 + \dots$$
$$s_2^3 - s_1^3 + 3s_1s_2(s_1 - s_2) = \bar{s}(s_1^2 + s_1s_2 + s_2^2 - 3s_1s_2) = \bar{s}^3;$$
$$s_2^4 - s_1^4 + 2s_1s_2(s_1^2 - s_2^2) = (s_2^2 - s_1^2)[s_1^2 + s_2^2 - 2s_1s_2] = (s_1 + s_2)\bar{s}^3,$$
$$F_1G_2 - F_2G_1 = \bar{s} - \frac{1}{6}u_0\bar{s}^3 - \frac{1}{12}u_0'(s_1 + s_2)\bar{s}^3 + \dots,$$
$$P_1 = \frac{s_2}{\bar{s}}\left[1 + \frac{1}{6}u_0(\bar{s}^2 - s_2^2) - \frac{1}{12}u_0' s_1(\bar{s}s_1 + s_2^2) + \dots\right],$$
$$P_2 = -\frac{s_1}{\bar{s}}\left[1 + \frac{1}{6}u_0(\bar{s}^2 - s_1^2) + \frac{1}{12}u_0' s_2(\bar{s}s_2 + s_1^2) + \dots\right].$$

Помним, что
$$u = r^{-3}, \quad u' = -3r^{-4}r' = -3ur'/r,$$
$$u'' = 12r^{-5}r'2 - 3r^{-4}r'' = 12u\tfrac{r'^2}{r^2} - 3u\tfrac{r''}{r},$$
так что можно представить
$$P_1 = p_1 + q_1u_0, \qquad P_2 = p_2 + q_2u_0, \tag{6}$$
где
$$p_1 = \frac{s_2}{\bar{s}}, \quad p_2 = -\frac{s_1}{\bar{s}},$$
$$q_1 = -\frac{1}{6}s_1s_2(1 + p_1) + \frac{1}{4}\frac{r_0'}{r_0}\frac{s_1s_2}{\bar{s}}(\bar{s}s_1 + s_2^2) + \dots \tag{7}$$
$$q_2 = -\frac{1}{6}s_1s_2(1 + p_2) + \frac{1}{4}\frac{r_0'}{r_0}\frac{s_1s_2}{\bar{s}}(\bar{s}s_2 + s_2^1) + \dots$$

Разложение $\mathbf{r}$ в ряд имеет вид (5), (6), (7). Подставим теперь исходное выражение (1) в уравнение (5)
$$P_1\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_0 + P_2\mathbf{d}_2 = P_1\mathbf{r}_\odot^{(1)} - \mathbf{r}_\odot^{(0)} + P_2\mathbf{r}_\odot^{(2)} \equiv \mathbf{b}. \tag{8}$$

Относительно d_1, d_0, d_2 имеем систему линейных алгебраических уравнений (из (2) с направляющими косинусами d):

$$\left\{\begin{array}{lcl} P_1\lambda_1 d_1 - \lambda_0 d_0 + P_2\lambda_2 d_2 &=& b_1, \\ P_1\mu_1 d_1 - \mu_0 d_0 + P_2\mu_2 d_2 &=& b_2, \\ P_1\nu_1 d_1 - \nu_0 d_0 + P_2\nu_2 d_2 &=& b_3. \end{array}\right. \tag{9}$$

Поскольку d_0 играет ведущую роль, оно вычисляется первым. Считаем неизвестными $P_1 d_1, P_2 d_2$. По формулам Крамера:

$$d_0 = \frac{D_0}{D}, \quad D = \begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 \\ \nu_0 & \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix}, \quad D_0 = \begin{vmatrix} -b_1 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ -b_2 & \mu_1 & \mu_2 \\ -b_3 & \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Подставим компоненты $\mathbf{b}$ в определитель D_0, развернем его и представим в виде (из (1), (8), (10)):

$$D_0 = U_0 - P_1 U_1 - P_2 U_2, \quad U_\ell = \begin{vmatrix} X_\ell & \lambda_1 & \lambda_2 \\ Y_\ell & \mu_1 & \mu_2 \\ Z_\ell & \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix}, \tag{11}$$

где (разложение по первому столбцу)

$$U_\ell = \hat\lambda X_\ell + \widehat{\mu} Y_\ell + \widehat{\nu} Z_\ell,$$

$$\widehat{\lambda} = \mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1, \quad \widehat{\mu} = \nu_1\lambda_2 - \nu_2\lambda_1, \quad \widehat{\nu} = \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1.$$

При этом

$$D = \lambda_0\widehat{\lambda} + \mu_0\widehat{\mu} + \nu_0\widehat{\nu}. \tag{12}$$

Подставляем выражения (6) для P_i в (10) и (11), получим уравнение

$$d_0 = P - Q u_0, \quad u_0 = r_0^{-3}, \tag{13}$$

$$P = \frac{U_0 - p_1 U_1 - p_2 U_2}{D}, \quad Q = \frac{q_1 U_1 + q_2 U_2}{D}.$$

Свободный член P выражается через величины, известные из наблюдений, но в коэффициент Q входят неизвестные $r_0, r_0', r_0'', \ldots$ (см.(7)). В первом приближении, пренебрегая членами второго порядка, q_1, q_2, можно также считать известными. Тогда в (13) остается два неизвестных: d_0, u_0.

Чтобы получить второе уравнение, возведем исходное выражение (1) с $\ell = 0$ в квадрат:

$$r_0^2 = r_\odot^2 - 2\mathbf{r}_\odot^{(0)} \cdot \mathbf{d}_0 + d_0^2. \tag{14}$$

Скалярное произведение

$$\mathbf{r}_\odot^{(0)} \cdot \mathbf{d}_0 = d_0\lambda_0 X_0 + d_0\mu_0 Y_0 + d_0\nu_0 Z_0,$$

поэтому уравнение (6) можно записать так:

$$d_0^2 - 2\left(\lambda_0 X_0 + \mu_0 Y_0 + \nu_0 Z_0\right) d_0 = r_0^2 - r_\odot^2.$$

Эту систему двух уравнений для двух неизвестных получил Лагранж в 1778 г. Имеются вспомогательные таблицы для ее решения.

Найдя d_0 и r_0, по формулам (6) можем вычислить P_1 и P_2, а затем, выбрав два из уравнений системы (9), вычислить d_1 и d_2. Таким образом мы нашли геоцентрические расстояния **в первом приближении**. Первая часть задачи решена. В результате мы знаем для трех моментов времени векторы $\mathbf{d}_\ell$ (2), а, следовательно, и три гелиоцентрических вектора $\mathbf{r}_\ell$ (1) (в экваториальной системе координат). Осталось найти элементы орбиты.

3.3 Нахождение элементов орбиты методом Гаусса

Для решения такой задачи нам достаточно знать два гелиоцентрических вектора $\mathbf{r}_i$ с компонентами в экваториальной системе координат. Обратимся сначала к связи между истинной θ и эксцентрической аномалии E [2], [8].

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta},$$
$$v_r = v_0 e \sin\theta.$$

$$\begin{cases} r\sin\theta &= a\sqrt{1-e^2}\sin E = b\sin E, \\ r\cos\theta &= a\cos E - a\,e, \\ r &= a(1 - e\cos E). \end{cases}$$

Отсюда, вычитая и прибавляя из третьего поочередно второе уравнение, получаем систему

$$\begin{cases} r(1-\cos\theta) &= a(1+e)(1-\cos E), \\ r(1+\cos\theta) &= a(1-e)(1+\cos E) \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \sqrt{r_\ell}\sin\dfrac{\theta_\ell}{2} &= \sqrt{a(1+e)}\sin\dfrac{E_\ell}{2} \\ \\ \sqrt{r_\ell}\cos\dfrac{\theta_\ell}{2} &= \sqrt{a(1-e)}\cos\dfrac{E_\ell}{2} \end{cases}, \qquad \ell = 1, 2. \tag{15}$$

Достаточно двух моментов времени $\ell = 1, 2$. Перемножим равенства попарно, затем почленно сложим и вычтем результаты.

$$\begin{cases} \sqrt{r_1 r_2}\sin\dfrac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1) &= a\sqrt{1-e^2}\sin\dfrac{1}{2}(E_2 - E_1), \\ \\ \sqrt{r_1 r_2}\cos\dfrac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1) &= a\cos\dfrac{1}{2}(E_2 - E_1) - ae\cos\dfrac{1}{2}(E_1 + E_2). \end{cases}$$

Введем новые величины

$$\varphi \equiv \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1), \quad \psi \equiv \frac{1}{2}(E_2 - E_1), \quad \cos\chi \equiv e\cos\frac{1}{2}(E_1 + E_2),$$

полагая что $0 < \chi < \pi$, и перепишем полученные соотношения:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \sqrt{r_1 r_2}\sin\varphi & = & a\sqrt{1-e^2}\sin\psi, \\ \sqrt{r_1 r_2}\cos\varphi & = & a(\cos\psi - \cos\chi). \end{array}\right. \tag{16}$$

Учитывая, что $r = a(1 - e\cos E)$, образуем сумму

$$r_1 + r_2 = a[2 - e(\cos E_1 + \cos E_2)] = 2a(1 - \cos\psi\cos\chi).$$

Подставим сюда $\cos\chi$, выраженный из второго равенства (16):

$$r_1 + r_2 = 2a(1 - \cos^2\psi) + 2\sqrt{r_1 r_2}\cos\varphi\cos\psi = 2a\sin^2\psi + \gamma\cos\psi, \tag{17}$$

$$\gamma = 2\sqrt{r_1 r_2}\cos\varphi.$$

Уравнение Кеплера [2] для двух моментов t_1, t_2 дает

$$E_\ell - e\sin E_\ell = \varkappa(t_\ell - \tau), \quad \varkappa = k\, a^{-3/2},$$

откуда с учетом обозначения для $\bar{s}$

$$\bar{s} = s_2 - s_1 = k(t_2 - t_1),$$

получаем

$$\bar{s}a^{-3/2} = 2\psi - e(\sin E_2 - \sin E_1) = 2\psi - 2\sin\psi\cos\chi.$$

Сюда также подставим $\cos\chi$, выраженный из второго равенства (16):

$$\bar{s}a^{-3/2} = 2\psi - \sin 2\psi + \gamma a^{-1}\sin\psi. \tag{18}$$

Мы вывели два уравнения (17), (18) с двумя неизвестными: a и ψ.

Заменим a на новое вспомогательное неизвестное q, которое имеет смысл отношения площади сектора орбиты, заключенного между векторами $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$, к площади треугольника, образованного этими векторами и хордой:

$$q = \frac{k\sqrt{p}(t_2 - t_1)}{r_1 r_2 \sin 2\varphi} = \frac{\bar{s}\sqrt{p}}{\gamma\sqrt{r_1 r_2}\sin\varphi} = \frac{\bar{s}\sqrt{p}}{\gamma a\sqrt{1-e^2}\sin\psi} = \frac{\bar{s}}{\gamma\sqrt{a}\sin\psi}.$$

Замена $a^{-1} = \bar{s}^{-2}\gamma^2 q^2 \sin^2\psi$ дает

$$r_1+r_2 = 2\bar{s}^2\gamma^{-2}q^{-2}+\gamma\cos\psi, \quad \bar{s}^{-2}\gamma^3 q^3\sin^3\psi = 2\psi-\sin 2\psi+\bar{s}^{\,-2}\gamma^3 q^2\sin^3\psi,$$

или

$$\frac{r_1+r_2}{2\gamma} = \bar{s}^2\gamma^{-3}q^{-2}+\frac{1}{2}\left(1-\sin^2\frac{\psi}{2}\right), \quad \frac{\gamma^3(q^3-q^2)}{\bar{s}^2} = \frac{2\psi-\sin 2\psi}{\sin^3\psi}.$$

Введя обозначения

$$c \equiv \bar{s}^2\gamma^{-3}, \quad g \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{r_1+r_2}{\gamma}-1\right), \quad f(\sigma) = \frac{2\psi-\sin 2\psi}{\sin^3\psi}, \quad \sigma = \sin^2\frac{\psi}{2},$$

окончательно получаем уравнения Гаусса:

$$\begin{cases} q^3-q^2 & = & cf(\sigma), \\ \sigma & = & cq^{-2}-g, \end{cases}$$

содержащие неизвестные q,σ. Найдя q вычисляем p.

3.4 Определение элементов по двум гелиоцентрическим положениям и параметру

Прежде всего, заметим, что знание параметра определяет величину интеграла площадей:

$$I = \sqrt{\mu p} = k\sqrt{p}.$$

Направление же вектора $\mathbf{I}$ совпадает с направлением $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$. Интеграл площадей определяет положение плоскости орбиты и элементы i, Ω в гелиоцентрической экваториальной системе координат.

По найденным q, ψ вычисляем большую полуось:

$$a = \frac{\bar{s}^2}{\gamma^2 q^2 \sin^2 \psi}.$$

Найдем θ_1, θ_2. Зная, что

$$r_\ell = \frac{p}{1 + e\cos\theta_\ell},$$

получим

$$e\cos\theta_1 = \frac{p}{r_1} - 1,$$

$$e\cos\theta_2 = e\cos(\theta_1 + 2\varphi) = e\cos\theta_1 \cos 2\varphi - e\sin\theta_1 \sin 2\varphi = \frac{p}{r_2} - 1,$$

тогда

$$e\sin\theta_1 = \left(\frac{p}{r_1} - 1\right)\mathrm{ctg}2\varphi - \left(\frac{p}{r_2} - 1\right)\mathrm{cosec}2\varphi.$$

Выписанные уравнения определяют e, θ_1, $\theta_2 = \theta_1 + 2\varphi$. По формулам (15) легко вычисляются E_1, E_2.

Для нахождения ω рассмотрим выражения координат в гелиоцентрической системе $x'y'z'$, у которой ось x' направлена в восходящий узел орбиты, z' — по нормали к плоскости орбиты, ось y' дополняет систему до правой (см. подробнее [5]). Имеем

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & r\cos(\omega + \theta), \\ y' & = & r\sin(\omega + \theta), \\ z' & = & 0. \end{array} \right.$$

С другой стороны, эти координаты выражаются через экваториальные обращением уравнения:

$$(x, y, z)^T = P\,Q(\xi, \eta, \zeta)^T = P\,Q\,(x', y', z')^T,$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = Q^T\,P^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\Omega + y\sin\Omega \\ -x\cos i\sin\Omega + y\cos i\cos\Omega + z\sin i \\ x\sin i\sin\Omega - y\sin i\cos\Omega + z\cos i \end{pmatrix}$$

Исключая из двух последних строчек по очереди z и пару (x, y), получаем

$$r\sin(\omega+\theta)\cos i = -x\sin\Omega + y\cos\Omega, \quad r\sin(\omega+\theta)\sin i = z.$$

Вместе с первой строкой записываем систему выражений

$$\begin{cases} r_\ell\cos(\omega+\theta_\ell) & = & x_\ell\cos\Omega + y_\ell\sin\Omega, \\ r_\ell\sin(\omega+\theta) & = & (-x_\ell\sin\Omega + y_\ell\cos\Omega)\sec i = z_\ell\,\mathrm{cosec}\, i, \end{cases}$$

из которых определяется ω.

В итоге, поставленные задачи решены.

Следует еще раз отметить, что рассмотренные методы используются лишь для предварительного определения орбит. В дальнейшем их элементы уточняются методами дифференциального улучшения орбит по большему числу наблюдений.

Для многих тел Солнечной системы, в том числе для больших планет, Луны и некоторых спутников планет, имеются уже длительные ряды наблюдений. Для вычисления по этим наблюдениям окончательной орбиты (или, как говорят, для разработки теории движения небесного тела) применяются аналитические и численные методы небесной механики.

Задача улучшения (уточнения) предварительной орбиты при помощи дополнительных наблюдений решается путём последовательных приближений. Чем больше интервал времени, охватываемый наблюдениями, тем надежнее определяются элементы улучшенной орбиты. В реальном случае, когда действуют не только силы тяготения, но и другие (возмущающие) силы, движение небесного тела не соответствует законам Кеплера. Однако отклонение движения от невозмущённого невелико и поэтому его описывают формулами невозмущённого движения, но при этом предполагают, что элементы орбиты не сохраняют постоянные значения, а изменяются с течением времени. Таким образом реальная орбита рассматривается как огибающая семейства непрерывно изменяющихся кеплеровых орбит; при этом в каждый момент времени положение и скорость небесного тела на реальной орбите совпадают со значениями положения и скорости, которые небесное тело имело бы, двигаясь по кеплеровой орбите с элементами, вычисленными именно для этого момента. Орбита, определённая таким методом для заданного момента времени t, называется оскулирующей орбитой, а момент t — эпохой оскуляции. Оскулирующая орбита непрерывно изменяет своё положение в пространстве и форму.

Метод определения первоначальной параболической орбиты был разработан Г. Ольберсом (1797), а эллиптической - К. Гауссом (1809). Методам улучшения орбит и определения окончательных орбит были посвящены многочисленные работы в 19-20 вв. Элементы орбит планет, малых планет, комет регулярно публикуются в астрономических ежегодниках и других изданиях.

Перейти к оглавлению на странице: 3

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белецкий В.В.* Очерки о движении космических тел. Изд. 3-е, испр. и доп. — М.: Издательство ЛКИ, 2009.
2. *Кутузов С.А.* Математическое описание астрономических систем: Учеб. пособие. — СПб: Изд-во СПбГУ, 2004.
3. *Кутузов С.А., Марданова М.А., Осипков Л.П., Старков В.Н.* Проблемы математического моделирования космических систем: Учеб. пособие. СПб.: «СОЛО», 2009.
4. *Мюррей К., Дермотт С.* Динамика Солнечной системы. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.
5. *Распопова Н.В., Давыденко А.А.* Задачи движения тел в космических системах. Часть 1: Учеб. пособие. — СПб: СОЛО, 2015.
6. *Резонансы в небесной механике* Сб.работ. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006..
7. *Солнечная система.* Ред.-сост. В.Г. Сурдин. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009 (Астрономия и Астрофизика).
8. *Холшевников К.В., Титов В.Б.* Задача двух тел: Учеб. пособие. — СПб, 2007.