Кусочно-постоянные управления, оптимальные по "расходу",

в линейных системах в некритических случаях.

Рассматриваются линейные системы с постоянными коэффициентами, имеющие различные наборы собственных значений. Для каждого из этих наборов предлагается свой алгоритм нахождения оптимального управления.

1 Постановка задачи управления по расходу топлива.

Рассмотрим механическую систему, описываемую матричным уравнением

$$d\,x/d\,t = Ax + U\,(t) \tag{1}$$

относительно вектор-функции $x\,(t) = (x_1, ..., x_n) \in R^n$ аргумента t при начальном условии

$$x\,(0) = x_0, \tag{2}$$

где $x_0 = (x_{10}, ..., x_{n0}) \in R^n$, $U\,(t) = (u_1, ..., u_n) \in R^n$, A – постоянная матрица размерности $(n \times n)$.

Компоненты u_i управления $U\,(t)$ предполагаются кусочно-постоянными функциями времени с конечным числом точек переключения, последняя из которых обозначается символом T. При таком управлении решение задачи (1) будет суммой нескольких слагаемых, отвечающим тем или иным собственным значениям матрицы A. Слагаемое, отвечающее собственному значению λ, будем называть частотной компонентой решения, отвечающей этому λ.

В качестве оптимизируемого функционала рассматривается величина:

$$J = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{0}^{T} |u_k\,(\theta)\,|\, d\theta, \tag{3}$$

которая является функционалом типа “расход топлива”. Допустимым считается управление U, которое в момент T обращает в нуль одну или несколько избранных частотных компонент решения. Обозначая сумму избранных компонент символом $\tilde{x}\,(t)$, запишем это условие:

$$\tilde{x}\,(T) = 0\ . \tag{4}$$

Далее о выполнении условия (4) мы будем говорить также как о гашении избранных частотных компонент решения или, просто как о гашении избранных частот.

Постановка задачи следующая: при заданном числе импульсов допустимого управления найти точки переключения этого управления (включая и точку T), удовлетворяющие необходимым условиям экстремума функционала расхода (3).

Допустимые управления мы рассматриваем далее в следующем представлении:

$$u_k\left(t\right) = h_k \sum_{i=1}^{2r_k} \left(-1\right)^{i+1} H\left(t - t_i^k\right) + \tilde{h}_k \sum_{i=1}^{2q_k} \left(-1\right)^{i} H\left(t - \tilde{t}_i^k\right) . \tag{5}$$

Здесь управление разбито на положительные и отрицательные ступени (r_k – число положительных, q_k – число отрицательных ступеней компоненты u_k). Величины $t_i^k,\ \tilde{t}_i^k \in [0, T]$ – моменты времени, соответствующие переключениям этих ступеней. Коэффициенты $h_k, \tilde{h}_k$ постоянны, а $H\left(t\right)$ – функция Хевисайда:

$$H\left(t - t_i^k\right) = \begin{cases} 1,\ t - t_i^k \geq 0\ , \\ 0,\ t - t_i^k < 0\ . \end{cases}$$

Для решения поставленной задачи разработано несколько алгоритмов, которые, в зависимости от собственных значений матрицы A, позволяют находить оптимальное по расходу топлива управление $U\left(t\right)$ либо в явной форме, либо с помощью численных методов.

Если матрица A имеет несколько различных пар чисто мнимых или комплексных собственных значений, то соответствующие этим парам частоты можно гасить либо последовательно, либо вместе, используя для этого различные алгоритмы.

2 Гашение колебаний одной частоты.

Алгоритмы гашения различны в зависимости от типа собственных значений матрицы A, соответствующих составляющей $\tilde{x}\left(t\right)$, которую мы собираемся гасить. Рассмотрим последовательно все случаи.

2.1 Случай чисто мнимых собственных значений.

В задаче (1), (2) предположим, что среди собственных чисел матрицы A есть пара чисто мнимых значений $\kappa = \pm i\mu$. Этой паре соответствует колебание частоты μ. Для оптимального по "расходу"гашения этой частоты предлагается алгоритм, позволяющий найти управление $U\left(t\right)$ в явном виде. Этот алгоритм состоит из нескольких нижеследующих шагов.

Шаг 1. Разделим задачу (1), (2) на две задачи Коши с тем, чтобы далее ограничиться рассмотрением только одной из них. Для этого в задаче (1), (2) произведем линейную замену:

$$x = B\xi, \tag{6}$$

где B – неособая матрица; $\xi = (y, z) = (y_1, y_2, z_1, ..., z_{n-2}) = (\xi_1, ..., \xi_n)$.

Постоянную комплексную матрицу B можно подобрать так, чтобы

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix}, \text{где} \quad Y = \begin{pmatrix} i\mu & 0 \\ 0 & -i\mu \end{pmatrix},$$

а Z – некоторая $(n-2) \times (n-2)$ матрица. Тогда уравнение (1) и условия (2) перейдут в следующие:

$$\dot{y} = Y\,y + v, \quad y\,(0) = y_0, \tag{7}$$

$$\dot{z} = Z\,z + w, \quad z\,(0) = z_0, \tag{8}$$

в которых

$$y_0 = Dx_0 = (y_{10}, y_{20})\,, \quad z_0 = D_z x_0 = (z_{10}, ..., z_{n-2,0})\,,$$

$$v = DU = (v_1, v_2)\,, \quad w = D_z U = (w_1, ..., w_{n-2})\,, \quad (v, w) = B^{-1}U,$$

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & \dots & d_{2n} \end{pmatrix}, \quad D_z = \begin{pmatrix} d_{31} & \dots & d_{3n} \\ \cdots & & \\ d_{n1} & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Далее ограничимся рассмотрением только задачи (7).

Шаг 2. Выпишем решение задачи (7) с учетом структуры управления (5) :

$$y_1 = \cos\mu t \left\{ y_{10} - \frac{i}{\mu}\sum_{k=1}^{n} d_{1k}\left(F_C^k - i\,F_S^k\right)\right\} +$$

$$+\sin\mu t\;\left\{ i\,y_{10} + \frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{n} d_{1k}\left(F_C^k - i\,F_S^k\right)\right\} + \frac{i}{\mu}\sum_{k=1}^{n} d_{1k}u_k,$$

$$y_2 = \cos\mu t\;\left\{ y_{20} + \frac{i}{\mu}\sum_{k=1}^{n} d_{2k}\left(F_C^k + i\,F_S^k\right)\right\} + \tag{9}$$

$$+\sin\mu t\;\left\{ -i\,y_{20} + \frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{n} d_{2k}\left(F_C^k + i\,F_S^k\right)\right\} - \frac{i}{\mu}\sum_{k=1}^{n} d_{2k}u_k,$$

где

$$
\begin{aligned}
F_C^k &= h_k \sum_{i=1}^{2r_k} (-1)^{i+1} H\left(t - t_i^k\right) \cos \mu t_i^k + \tilde{h}_k \sum_{i=1}^{2q_k} (-1)^i H\left(t - \tilde{t}_i^k\right) \cos \mu \tilde{t}_i^k, \\
F_S^k &= h_k \sum_{i=1}^{2r_k} (-1)^{i+1} H\left(t - t_i^k\right) \sin \mu t_i^k + \tilde{h}_k \sum_{i=1}^{2q_k} (-1)^i H\left(t - \tilde{t}_i^k\right) \sin \mu \tilde{t}_i^k.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Шаг 3. Запишем граничные условия (4) и функционал (3) явно через точки переключения.

Для гашения колебания частоты μ (т.е. для $\tilde{x}(T) = 0$) следует потребовать, чтобы все выражения в фигурных скобках в формулах (9) были равны нулю после того, как отработают все двигатели (для $t > t_{2r_k}^k$, $t > \tilde{t}_{2q_k}^k$):

$$
\begin{aligned}
y_{10} - \tfrac{i}{\mu} \sum_{k=1}^{n} d_{1k} \left(F_C^k - i\, F_S^k\right) = 0\,, \\
y_{20} + \tfrac{i}{\mu} \sum_{k=1}^{n} d_{2k} \left(F_C^k + i\, F_S^k\right) = 0\,.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Разделим начальные данные $y_{10},\ y_{20}$ и коэффициенты матрицы D на вещественные и мнимые части:

$$
\begin{aligned}
y_{10} &= y'_{10} + i\, y^*_{10}, \quad & y_{20} &= y'_{20} + i\, y^*_{20}, \\
d_{1k} &= d'_{1k} + i\, d^*_{1k}, \quad & d_{2k} &= d'_{2k} + i\, d^*_{2k}.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Из условий (11) после подстановки в них формул (12) вытекают граничные условия

$$
K_1 = y'_{10} + \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^{n} \left[d^*_{1k} F_C^k - d'_{1k} F_S^k\right] = 0,
$$

$$
K_2 = y^*_{10} - \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^{n} \left[d^*_{1k} F_C^k + d'_{1k} F_S^k\right] = 0. \tag{13}
$$

Исходя из формул (13), можно заключить, что для дальнейших вычислений достаточно знать первую строку матрицы D.

С учетом структуры управления (5) запишем функционал (3):

$$
J = \sum_{k=1}^{n} \left(h_k \sum_{i=1}^{2r_k} (-1)^i\, t_i^k + \tilde{h}_k \sum_{i=1}^{2q_k} (-1)^i\, \tilde{t}_i^k \right). \tag{14}
$$

Будем решать задачу минимизации функционала J при выполнении граничных условий (13).

Шаг 4. Введем множители Лагранжа $\lambda_1,\ \lambda_2$ и перейдем к задаче на безусловный минимум относительно следующего функционала:

$$R = J + \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2. \tag{15}$$

Функционал R оказывается функцией числовых параметров – множителей Лагранжа и t_i^k, $\tilde{t}_i^{k}$ – точек переключения управления, поэтому можно выписать необходимые условия оптимальности управления

$$\frac{\partial R}{\partial t_i^k} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial \tilde{t}_i^k} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial \lambda_1} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial \lambda_2} = 0. \tag{16}$$

Из первого и второго равенств (16) получим:

$$\cos \mu t_i^k \left(\lambda_1 d'_{1k} + \lambda_2 d^*_{1k}\right) + \sin \mu t_i^k \left(\lambda_1 d^*_{1k} - \lambda_2 d'_{1k}\right) = -1,$$

$$\cos \mu \tilde{t}_i^k \left(\lambda_1 d'_{1k} + \lambda_2 d^*_{1k}\right) + \sin \mu \tilde{t}_i^k \left(\lambda_1 d^*_{1k} - \lambda_2 d'_{1k}\right) = 1, \tag{17}$$

Из (17) следует, что

$$t_i^k = \tilde{t}_i^k \pm \frac{\pi}{\mu} \pm \frac{2\pi l}{\mu}, \quad t_i^k = t_{i+2}^k \pm \frac{2\pi}{\mu} \pm \frac{2\pi l}{\mu}, \quad l \in Z. \tag{18}$$

Следовательно, зная одну из точек переключения для k-го управления, можно найти все остальные точки переключения для этой компоненты управления по формулам (18). Учитывая (18), перепишем граничные условия (13) (т.е. последние два равенства (16)) следующим образом:

$$K_1 = y'_{10} + \mu^{-1} \sum_{k=1}^{n} \left(h_k r_k + \tilde{h}_k q_k\right) \left[d^*_{1k} \left(\cos \mu t_1^k - \cos \mu t_2^k\right) - \right.$$

$$\left. -d'_{1k} \left(\sin \mu t_1^k - \sin \mu t_2^k\right)\right] = 0\,, \tag{19}$$

$$K_2 = y^*_{10} - \mu^{-1} \sum_{k=1}^{n} \left(h_k r_k + \tilde{h}_k q_k\right) \left[d'_{1k} \left(\cos \mu t_1^k - \cos \mu t_2^k\right) + \right.$$

$$\left. +d^*_{1k} \left(\sin \mu t_1^k - \sin \mu t_2^k\right)\right] = 0\,.$$

Здесь t_1^k – момент первого включения компоненты управления для k-й координаты; t_2^k – момент первого выключения.

Пусть $2\Delta_k$ – ширина ступени управления u_k, t_k – ее средний момент

$$t_1^k = t_k - \Delta_k, \quad \tau_1^k = t_k + \Delta_k. \tag{20}$$

Тогда из (14) и (19) получаем функционал и граничные условия

$$M = 2\sum_{k=1}^{n}\left(h_k r_k + \tilde{h}_k q_k\right)\,\Delta_k, \tag{21}$$

$$\begin{aligned} L_1 &= y'_{10} + \tfrac{2}{\mu}\sum_{k=1}^{n}\left(h_k r_k + \tilde{h}_k q_k\right)\,[d'_{1k}\cos\mu t_k + d^*_{1k}\sin\mu t_k]\sin\mu\Delta_k = 0\,, \\ L_2 &= y^*_{10} + \tfrac{2}{\mu}\sum_{k=1}^{n}\left(h_k r_k + \tilde{h}_k q_k\right)\,[d^*_{1k}\cos\mu t_k - d'_{1k}\sin\mu t_k]\sin\mu\Delta_k = 0\,. \end{aligned} \tag{22}$$

Величины M, L_1, L_2 – функции числовых параметров t_k и Δ_k, поэтому исходная задача оптимизации свелась к задаче безусловной минимизации функции $S = M + \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2$ по всем переменным $t_k,\ \Delta_k,\ \lambda_1,\ \lambda_2$.

Выпишем производные S по t_k и Δ_k и приравняем их нулю:

$$[(\lambda_1 d'_{1k} + \lambda_2 d^*_{1k})\cos\mu t_k + (\lambda_1 d^*_{1k} - \lambda_2 d'_{1k})\sin\mu t_k]\cos\mu\Delta_k = -1,$$

$$[(\lambda_1 d'_{1k} + \lambda_2 d^*_{1k})\sin\mu t_k - (\lambda_1 d^*_{1k} - \lambda_2 d'_{1k})\cos\mu t_k]\sin\mu\Delta_k = 0. \tag{23}$$

Таким образом, величины $t_k,\ \Delta_k,\ \lambda_1,\ \lambda_2$ должны быть найдены из уравнений (22), (23).

Шаг 5. Представим $\cos\mu t_k$, $\sin\mu t_k$, $\cos\mu\Delta_k$, $\sin\mu\Delta_k$ как функции от $\lambda_1,\ \lambda_2$. Для этого перепишем уравнения (23) в виде:

$$[a_k\cos\mu t_k + b_k\sin\mu t_k]\cos\mu\Delta_k = -1,$$

$$[a_k\sin\mu t_k - b_k\cos\mu t_k]\sin\mu\Delta_k = 0, \tag{24}$$

где

$$a_k = \lambda_1 d'_{1k} + \lambda_2 d^*_{1k}, \quad b_k = \lambda_1 d^*_{1k} - \lambda_2 d'_{1k}. \tag{25}$$

Возможны два варианта решения системы (24):

I. Пусть $\sin\mu\Delta_k = 0$, тогда $\cos\mu\Delta_k = \pm 1$. Тогда формулы для определения $\sin\mu t_k$ и $\cos\mu t_k$ следующие:

$$\sin\mu t_k = \frac{\mp b_k \mp a_k\sqrt{a_k^2 + b_k^2 - 1}}{a_k^2 + b_k^2}, \quad \cos\mu t_k = \frac{\mp a_k \mp b_k\sqrt{a_k^2 + b_k^2 - 1}}{a_k^2 + b_k^2}. \tag{26}$$

II. Пусть $\sin\mu\Delta_k \neq 0$, тогда $\cos\mu\Delta_k = \alpha_k \neq 0$, а $\sin\mu t_k$ и $\cos\mu t_k$ представляются следующими формулами:

$$\sin\mu t_k = \frac{-b_k}{\alpha_k\left(a_k^2+b_k^2\right)}, \quad \cos\mu t_k = \frac{-a_k}{\alpha_k\left(a_k^2+b_k^2\right)}, \tag{27}$$

где

$$\sin\mu\Delta_k = \pm\sqrt{\frac{a_k^2+b_k^2-1}{a_k^2+b_k^2}}, \quad \cos\mu\Delta_k = \alpha_k = \pm\sqrt{\frac{1}{a_k^2+b_k^2}}. \tag{28}$$

<u>Шаг 6.</u> При подстановке формул (25)-(28) в граничные условия (22) мы находим соотношения для λ_1 и λ_2:

$$\lambda_2 = \frac{y_{10}^*}{y_{10}'}\lambda_1. \tag{29}$$

Из второго уравнения (24) определим величину t_k:

$$t_k = \mu^{-1} arctg\frac{b_k}{a_k} + \pi m_k, \quad m_k \in \mathrm{Z}.$$

Тогда

$$\sin\mu t_k = \frac{\operatorname{tg}\mu t_k}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\mu t_k}}, \qquad \cos\mu t_k = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\mu t_k}}.$$

Знак перед корнем определяется выбором момента начала управления, если m_k – четное, то $\sin\mu t_k > 0$, иначе $\sin\mu t_k < 0$.

Принимая во внимание (29) и (25), получаем

$$\operatorname{tg}\mu t_k = \frac{y_{10}' d_{1k}^* - y_{10}^* d_{1k}'}{y_{10}' d_{1k}' + y_{10}^* d_{1k}^*},$$

$$\sin\mu t_k = -\frac{y_{10}' d_{1k}^* - y_{10}^* d_{1k}'}{\sigma_k^{m_k}\sqrt{\left({y_{10}'}^2 + y_{10}^{*2}\right)\left({d_{1k}'}^2 + d_{1k}^{*2}\right)}}, \tag{30}$$

$$\cos\mu t_k = -\frac{y_{10}' d_{1k}' + y_{10}^* d_{1k}^*}{\sigma_k^{m_k}\sqrt{\left({y_{10}'}^2 + y_{10}^{*2}\right)\left({d_{1k}'}^2 + d_{1k}^{*2}\right)}}, \tag{31}$$

где $\sigma_k^{m_k} = (-1)^{m_k} sign(y_{10}' d_{1k}^* - y_{10}^* d_{1k}')$, $m_k = 0, 1, \ldots$.

Из первого уравнения (24)

$$\cos\mu\Delta_k = \frac{-1}{a_k\cos\mu t_k + b_k\sin\mu t_k}.$$

Согласно (28) $2\mu\Delta_k < \pi$, следовательно $\cos\mu\Delta_k > 0$, $\sin\mu\Delta_k > 0$. С учетом (30), (31), запишем

$$\cos\mu\,\Delta_k = -\frac{\sigma_k^{m_k} y'_{10}}{|\lambda_1|\sqrt{\left({y'_{10}}^2 + y_{10}^{*2}\right)\,\left({d'_{1k}}^2 + d_{1k}^{*2}\right)}}. \tag{32}$$

$$\sin\mu\,\Delta_k = \frac{\sqrt{\lambda_1^2\left({y'_{10}}^2 + y_{10}^{*2}\right)\,\left({d'_{1k}}^2 + d_{1k}^{*2}\right) - {y'_{10}}^2}}{|\lambda_1|\sqrt{\left({y'_{10}}^2 + y_{10}^{*2}\right)\,\left({d'_{1k}}^2 + d_{1k}^{*2}\right)}}. \tag{33}$$

Подставляя (30) – (33) в граничные условия (22), получаем уравнение для нахождения λ_1:

$$-|y_{10}|^2\mu\lambda_1 = 2\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^{m_k}(h_k r_k + \widetilde{h}_k q_k)\sqrt{\lambda_1^2\Big({y'_{10}}^2 + y_{10}^{*2}\Big)\,\Big({d'_{1k}}^2 + d_{1k}^{*2}\Big) - (y'_{10})^2} \tag{34}$$

Таким образом, управление колебательным движением системы n–го порядка с помощью ступенчатой управляющей функции представляет собой периодический процесс, где для каждой из составляющих управления u_k через половину периода колебаний рассматриваемой частоты чередуются положительные и отрицательные ступени, длительность которых определяется формулой (33), а моменты включений управления – формулами (20) и (30). Количество этих ступеней зависит от времени, отведенного для решения задачи гашения. При увеличении времени гашения t возрастает число ступеней управления, уменьшается ширина ступени ($\Delta_k \to 0$), что влечет за собой уменьшение функционала M, т.е. теоретически оптимальным по расходу топлива без ограничения времени оказывается импульсный режим. Реальный режим будет тем ближе к идеальному теоретическому, чем меньше величина ступени управления $2\Delta_k$.