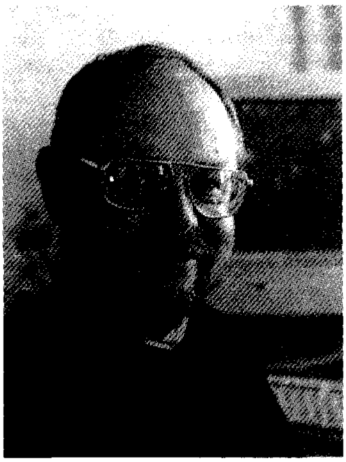

А. В. ПРАСОЛОВ

Александр Витальевич ПРАСОЛОВ — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой моделирования экономических систем факультета прикладной математики — процессов управления СПбГУ.

В 1971 г. закончил факультет ПМ-ПУ ЛГУ. С 1974 г. работает на том же факультете.

Автор трех монографий, более 60 научных трудов, нескольких учебных пособий.

Области научных интересов: теория моделирования, теория систем с последействием, экономическая динамика.

◇ ◇ ◇

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ФИРМ КАК ИНСТРУМЕНТ КОРПОРАТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В корпоративных отношениях экономических агентов явно выделяются взаимодействие и конкуренция. Другие формы отношений, такие, как, например, кооперирование, здесь не рассматриваются. В простейшем случае взаимодействуют два экономических агента. Это могут быть страны, отрасли, регионы или предприятия. Математические модели динамики двух агентов в идеале служат определению долгосрочных стратегий.

Данная работа* содержит описание, анализ и способы применения одной замечательной модели, именуемой в современной литературе как модель Лотки-Вольтерра.[1] Чаще всего ее используют для описания процессов в биологии,[2] медицине и экологии.[3] В последние сорок лет ею заинтересовались экономисты.[4] Ниже она развивается и дополняется новыми результатами и приложениями.

• Описание модели

Считается, что первая формализация динамики биологических популяций восходит к Мальтусу, предположившему, что скорость изменения числа особей N в популяции пропорциональна объему популяции

$$dN(t) = \varepsilon N(t)dt.$$

* Работа поддержана грантом ГОО-3.2-201 Конкурсного центра по фундаментальным исследованиям в области гуманитарных наук Министерства образования РФ.

Естественно, это уравнение приводит к экспоненциальному росту объема популяции, чего в природе не наблюдается (в течение продолжительного времени). Следующая модель исключила бесконечный рост и приняла во внимание эффект насыщения. Она появилась в 1838 г. в работе Ферхюльста под названием «логистическая модель» для описания динамики биологических популяций

$$dN(t) = [\varepsilon_0 - \gamma N(t)]N(t)dt.$$

Здесь коэффициент прироста ε заменен линейной функцией от объема популяции, что интерпретируется следующим образом: если жизненные ресурсы популяции ограничены, т. е. пища, жизненное пространство, энергетические источники и т. д., то объем популяции должен с течением времени стабилизироваться, а не расти бесконечно. В последнем уравнении такой уровень объема популяции равен ε_0/γ.

В наиболее общей форме (без последействия) логистическая модель рассматривалась А. Н. Колмогоровым[5] для сообщества из n видов

$$\dot N_i(t) = N_i(t) f_i\left[N_1(t), \ldots, N_n(t)\right], \quad i = 1, \ldots, n.$$

Функции f_i удовлетворяют некоторым специальным свойствам, допускающим простую биологическую интерпретацию. На этом обобщении мы не будем останавливаться, так как слишком большой произвол в выборе указанных функций препятствует созданию конструктивных методов идентификации модели.

Сам В. Вольтерра использовал линейные функции

$$\dot N_i(t) = N_i(t)\left[\varepsilon_i - \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik} N_k(t)\right], \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Он исследовал случаи $n = 2, 3$, а также сделал несколько обобщений на систему с произвольным n.

Особую ценность работе В. Вольтерра придает то, что он, специалист в области интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, ввел в рассмотрение последействие, т. е. он предположил, что взаимодействие видов на общих ресурсах изменяет коэффициенты прироста через некоторое время. Так, в задаче «хищник-жертва» предполагается, что объем популяции «жертв», являясь пищей для «хищников», определяет объем популяции последних через вегетативный период. В результате некоторых логических шагов В. Вольтерра получает систему с распределенным запаздыванием

$$\begin{cases} \dot N_1(t) = \left[\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(t) - \int\limits_0^{+\infty} F_1(s) N_2(t-s)ds\right] N_1(t), \\ \dot N_2(t) = \left[-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1(t) = \int\limits_0^{+\infty} F_2(s) N_1(t-s)ds\right] N_2(t). \end{cases}$$

Здесь N_1, N_2 — объемы популяций «жертвы» и «хищника» соответственно, а F_1, F_2 — функции, характеризующие распределение «хищников» и «жертв» по возрастам. Если считать, что запаздывание сосредоточенное и единственное, то без ограничений на коэффициенты модель Лотки-Вольтерра с последействием имеет вид

$$\dot N_i(t) = N_i(t)\left[\varepsilon_i - \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik} N_k(t-\tau)\right] \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Именно этой системе дифференциальных уравнений с последействием далее будет уделено наибольшее внимание.

- **Экономические интерпретации**

В этом разделе мы обсудим математическую формализацию динамики взаимодействия нескольких фирм, отраслей или государств. Начнем с самого простого: пусть имеются две конкурирующие в одной экономической нише фирмы, т. е. с общими ресурсами, потребителями и одинаковыми товарами или услугами. Предположим, что при изменении объема товара на рынке (т. е. рассматриваемые фирмы не являются монополистами) цена не меняется и что товар незамещаем. Примерами таких конкурирующих фирм могут быть две транспортные компании по перевозке грузов или людей в данном городе. Они могут менять организацию труда, технологию обслуживания, вводить скидки, тратиться на рекламу, покупать более совершенные транспортные средства, сокращать стоимость ремонта и хранения, выбирать новые оптимальные маршруты, чтобы победить конкурентов. Можно рассматривать их взаимодействие на фоне существующего, мощного и не подверженного частым изменениям городского транспортного хозяйства, т. е. предположить, что потребитель откажется от услуг рассматриваемых компаний, когда городской транспорт станет предпочтительней по цене или по качеству.

Другие примеры — это производство хлебобулочных изделий, услуги по ремонту квартир или автомобилей, туристический бизнес и т. д.

Ясно, что такие конкурентные модели могут иметь большие размерности по числу фирм, но эту сложность преодолевают, объединяя фирмы с близкими технологиями производства товаров (или услуг) простым суммированием объемов товара на рынке.

Более сложным примером экономического взаимодействия является система мирового рынка. Так как мировые ресурсы труда, капитала, энергоносителей, земли и т. д. ограничены, то рассматриваемая динамическая модель конкуренции между странами может оказаться вполне адекватной. Конечно, невозможно составить систему по всем государствам и по всем товарам, но представляется разумным ограничиться объединениями стран с примерно равными ВВП: США + Канада + Мексика, Европа, Япония + Ю. Корея + Тайвань, Россия + Бразилия + Арабские страны и т. д. Или иначе: Северная Америка, Южная Америка, Европа, Азия, Африка.

Для такой модели экономическая интерпретация потребует существенно более сложных предположений: многие компании, являясь международными по производству и сбыту, трудно относить к какой-либо стране или континенту. Так, Форд имеет отделения в Европе, Южной Америке и Азии. Японские и южнокорейские фирмы бытовой электроники создают свои отделения в Америке и Европе. Немецкие химические предприятия имеют филиалы в Южной Америке и Азии. Перемешивание капитала и производства затрудняет создание понятной и абсолютно «чистой» в смысле логики модели. Однако опора на такие интегральные показатели, как ВВП и индекс жизни, могла бы дать достаточно адекватную модель.

Заметим, что субъекты в экономике не всегда только борются за общие ресурсы или потребителей. В каждом государстве существуют отрасли, взаимодействие которых является более сложным. Рассмотрим, например, сельское хозяйство, промышленность, добывающий сектор экономики и бюджетные средства государства. Они одновременно и конкурируют, и развивают друг друга. Так как в мире нет совершенно изолированных стран, то могут существовать государства с одним доминирующим сектором из вышеназванных. Скажем условно, что Бирма, Таиланд и Никарагуа — сельскохозяйственные страны, Кувейт и Венесуэла — добывающие, Англия и Япония — промышленные, Германия, Швеция и Люксембург — бюджетные. Тем не менее в большинстве стран функционируют все из названных экономических секторов, и они, естественно, взаимодействуют. Правительства и парламенты стараются управлять указанным взаимодействием, например, вводя специальные экспортно-импортные налоги или поддерживая сельское хозяйство специальными закупочными ценами. Моделирование описанной ситуации очень похоже на взаимодействие хищника и жертвы на биологической сцене. Поэтому естественно попытаться использовать модели логистического типа. В данной работе рассматривается только конкурентное взаимное влияние.

Многие экономисты пытались создать математические модели циклов деловой активности. Некоторые из циклов имеют свои названия: длинные и короткие Кондратьевские волны, сезонные циклы и т. д. Про другие говорят: «...имеется явно выраженная тенденция к периодическим колебаниям.» Однако это явление, колебательность, до сих пор остается неформализованным и не имеющим признанной математической модели. Отдельные попытки (как, например, модель Гудвина) следует считать неудачными.[6] Типичное объяснение колебаний, основанное на внедрениях новых технологий, нам не кажется убедительным, хотя бы потому, что в широком спектре наук и с учетом случайности появления содержательного открытия или изобретения вряд ли может появиться периодичность или даже общая закономерность, кроме нарастающего суммирования всех достижений. Попытки автора составить модель на основе уравнений Лотки-Вольтерра также остались за пределами данной статьи.

• Конкуренция предприятий на общем рынке

Сначала рассмотрим динамическую модель одного предприятия. Пусть некоторая фирма, обладая основными фондами $K(t)$, привлекая рабочую силу $L(t)$, используя природные ресурсы (сырье, вода, энергия, земля и т. д.) $R(t)$ получает объем товара $x(t)$. Для задач со сложной структурой использования природных ресурсов можно условно считать, что $R(t)$ — это оборотный капитал. Аналогично, $K(t)$ — основной капитал. Объем товара $x(t)$ выражен в текущих ценах. Чтобы упростить рассмотрение экономических предположений на первом этапе, фиксируем текущие цены. Это значит, что рассматриваемая фирма своим объемом товара не влияет на рыночную равновесную цену, т. е. не является монополистом. Обозначая производственную функцию фирмы φ, получим первое математическое выражение: $x(t) = \varphi(K(t), L(t), R(t))$. Мы не будем рассматривать подробно особенности производственных функций, скажем лишь, что φ и все ее первые производные являются строго положительными (дифференцируемость может быть и кусочной). Здесь и далее t обозначает непрерывное или дискретное время. Если время непрерывно, то скорость изменения любой переменной обозначаем $\dot{x}$ или dx/dt; если же время понимается как дискретное, то скорость изменения любой переменной по времени записываем как первую разность: Δx.

Чтобы расширить производство, руководство фирмы должно увеличить основные фонды и использовать больше трудовых и природных ресурсов. Примем как простейший вариант исследования, что основные фонды на свое поддержание требуют амортизационных отчислений, пропорциональных объему основных фондов, а на развитие — инвестиций, $I(t)$. Далее, пусть используемые ресурсы пропорциональны основным фондам, включенным в производство: $L(t) = lK(t)$, $R(t) = rK(t)$. И фирма не тратит прибыль ни на что другое, кроме развития (налоговую составляющую примем пропорциональной выходу и включенной в производственную функцию): $I(t) = x - lK - rK$. Добавляя к этим предположениям требование линейности функции φ, получим уравнение изменения основных фондов

$$\dot{K}(t) = [-\beta + \varphi_K + (\varphi_L - 1)l + (\varphi_R - 1)r]\,K(t),$$

где β — коэффициент износа основных фондов, $\varphi_K = \partial\varphi/\partial K$, $\varphi_L = \partial\varphi/\partial L$, $\varphi_R = \partial\varphi/\partial R$. Последнее уравнение дает экспоненциальный рост основных фондов, если $\varepsilon = -\beta + \varphi_K + (\varphi_L - 1)l + (\varphi_R - 1)r > 0$. Соответственно и выход продукции будет расти или убывать экспоненциально

$$x(t) = x(0)\exp(\varepsilon t).$$

Таким образом, модель

$$\dot{x}(t) = \varepsilon x(t),$$

с постоянным коэффициентом роста ε, характеризует динамику одного предприятия при отсутствии каких-либо экономических ограничений. Но ограничения всегда существуют:

— рост производства приводит к насыщению рынка и снижению спроса;

— со временем происходит моральное старение товара или услуги;

— расширение производства требует привлечения рабочей силы, но если рынок труда ограничен, то расширение достигает верхнего предела;

— природные ресурсы всегда ограничены либо по объему, либо по цене, когда спрос на ресурсы растет (это же касается и труда).

Чтобы перейти к модели Лотки-Вольтерра, достаточно в последнем уравнении коэффициент ε представить как убывающую линейную функцию растущего значения $x(t)$ (линейную — поскольку это простейшая убывающая функция): $\varepsilon = \hat{\varepsilon} - \gamma x(t)$, с постоянными $\hat{\varepsilon}$, γ. Поскольку логика этих действий понятна, проделаем это сразу в двухмерном случае.

Итак, первая фирма имеет производственную функцию $x = \varphi(K_x, L_x, R_x)$, а вторая — $y = \psi(K_y, L_y, R_y)$, где φ и ψ — однородные линейные функции. Предположим, что каждая фирма тратит прибыли только на инвестиции, а затраты на трудовые ресурсы и оборотный капитал пропорциональны соответствующим привлекаемым основным фондам. Коэффициенты пропорциональности вследствие предположения об ограниченности ресурсов (на общем рынке труда и сырья) будем считать линейными убывающими функциями K_x, K_y. Тогда изменения основных фондов обеих фирм складываются из износа и инвестиций

$$\begin{cases} \dot{K}_x(t) = -\beta_x K_x + \varphi(K_x, L_x, R_x) - L_x - R_x, \\ \dot{K}_y(t) = -\beta_y K_y + \psi(K_y, L_y, R_y) - L_y - R_y. \end{cases}$$

Подставляя линейные выражения в качестве коэффициентов для труда и сырья

$$L_x = (l_{0x} - l_{1x}K_x - l_{2x}K_y)K_x, \ldots, R_y = (r_{0y} - r_{1y}K_x - r_{2y}K_y)K_y,$$

получим систему относительно K_x, K_y:

$$\begin{cases} \dot{K}_x(t) = [-\beta_x + \varphi_K + (\varphi_L - 1)l_{0x} + (\varphi_R - 1)r_{0x} - \\ \qquad - (\varphi_L l_{1x} + \varphi_R r_{1x})K_x - (\varphi_L l_{2x} + \varphi_R r_{2x})K_y]\,K_x, \\ \dot{K}_y(t) = [-\beta_y + \psi_K + (\psi_L - 1)l_{0y} + (\psi_R - 1)r_{0y} - \\ \qquad - (\psi_L l_{1y} + \psi_R r_{1y})K_x - (\psi_L l_{2y} + \psi_R r_{2y})K_y]\,K_y. \end{cases} \tag{3}$$

Чтобы увидеть систему (1), переобозначим коэффициенты

$$\varepsilon_1 = -\beta_x + \varphi_k + (\varphi_L - 1)L_{0x} + (\varphi_R - 1)r_{0x},$$
$$\gamma_{11} = \varphi_L l_{1x} + \varphi_R r_{1x}, \quad \gamma_{12} = \varphi_L L_{2x} + \varphi_R r_{2x},$$
$$\varepsilon_2 = -\beta_y + \psi_K + (\psi_L - 1)l_{0y} + (\psi_R - 1)r_{0y},$$
$$\gamma_{21} = \psi_L l_{1y} + \psi_R r_{1y}, \quad \gamma_{22} = \psi_L l_{2y} + \psi_R r_{2y}.$$

Экономический смысл коэффициентов β понятен. Остановимся на интерпретации остальных параметров. Величины φ_K, φ_L, φ_R, ψ_L, ψ_K, ψ_R характеризуют производственные функции обеих фирм, следовательно, мы можем считать их заданными. По предположению о производственных функциях эти величины положительны. Коэффициенты ε и γ должны быть идентифицированы по информации об объемах основных фондов K_x, K_y. Остались только коэффициенты l и r. Но их 12 на 6 приведенных выше уравнений. Поэтому при идентификации им должно быть уделено внимание специально.

Ограниченность общих ресурсов приводит к тому, что с ростом основных фондов K_x, K_y коэффициенты возобновления капитала становятся равными нулю, а затем становятся отрицательными, т. е. фонды начинают убывать. Область в плоскости переменных K_x, K_y, когда основные фонды еще не выбывают из производства, аналитически выражается неравенствами

$$l_{0x} - l_{1x}K_x - l_{2x}K_y > 0, \quad r_{0x} - r_{1x}K_x - r_{2x}K_y > 0,$$
$$l_{0y} - l_{1y}K_x - l_{2y}K_y > 0, \quad r_{0y} - r_{1y}K_x - r_{2y}K_y > 0,$$

При достаточно малых K_x, K_y эти неравенства выполняются, увеличение какого-нибудь из них приводит к уменьшению коэффициента пропорциональности между стоимостью ресурсов и привлекаемых основных фондов на единицу продукции. Так, например, если первое из указанных выше неравенств перестает выполняться при некоторых значениях K_x, K_y, то это значит, что первая из фирм получает продукцию вообще без привлечения рабочей силы, что исключается. Более подробно такие особенности модели необходимо обсуждать в каждом конкретном случае.

• Конкурентная деятельность без запаздывания

Рассмотрим случай деятельности двух фирм, конкурирующих за общие ресурсы. Как следует из вышеизложенного, динамика их деятельности без запаздывания ($\tau = 0$) описывается уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t)\left[\varepsilon_1 - \gamma_{11}x_1(t) - \gamma_{12}x_2(t)\right], \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t)\left[\varepsilon_2 - \gamma_{21}x_1(t) - \gamma_{22}x_2(t)\right], \end{cases} \tag{4}$$

где шесть коэффициентов ε, γ обязательно положительны. Заменой масштаба измерения величин

$$y_1 = \frac{\gamma_{11}}{\varepsilon_1}x_1, \quad y_2 = \frac{\gamma_{12}}{\varepsilon_1}x_2,$$

приводим систему к виду, содержащему только два параметра, существенно влияющих на поведение решений

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= \varepsilon_1 y_1(t)\left[1 - y_1(t) - y_2(t)\right], \\ \dot{y}_2(t) &= \varepsilon_2 y_2(t)\left[1 - \alpha y_1(t) - \beta y_2(t)\right]. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь параметры α, β положительны и выражаются через исходные коэффициенты по формулам

$$\alpha = \frac{\gamma_{21}\varepsilon_1}{\gamma_{11}\varepsilon_2}, \quad \beta = \frac{\gamma_{22}\varepsilon_1}{\gamma_{12}\varepsilon_2}.$$

Непосредственное вычисление нетривиального положения равновесия системы (5) дает результат

$$y_1^* = \frac{\beta - 1}{\beta - \alpha}, \quad y_2^* = \frac{1-\alpha}{\beta - \alpha}.$$

На следующем рисунке (рис. 1) эта точка получена в пересечении прямых линий, уравнения которых могут быть взяты в квадратных скобках системы (5):

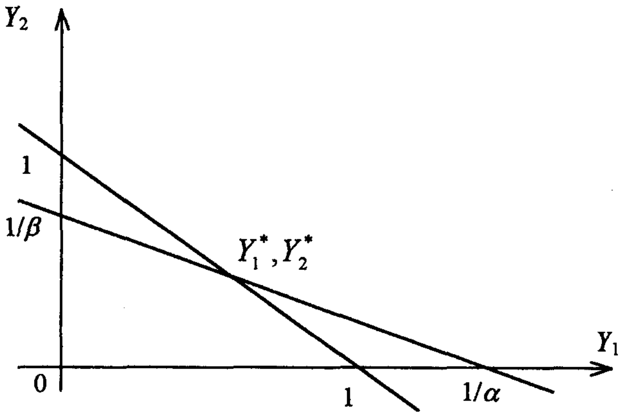

Рис. 1. Нетривиальное положение равновесия системы (5).

Из последних вычислений следует:

Вывод 1. Нетривиальная положительная стационарная точка системы (5) существует и единственна, если

$$\alpha < 1, \quad \beta > 1, \tag{6}$$

или

$$\alpha > 1, \quad \beta < 1. \tag{7}$$

Если $\alpha = \beta = 1$, то стационарные решения (y_1^*, y_2^*) составляют прямую линию с уравнением $y_1^* + y_2^* = 1$; и условие $\alpha = \beta \neq 1$ приводит к отсутствию нетривиальных стационарных точек вообще.

Обсуждаемое положение равновесия (y_1^*, y_2^*) может быть притягивающим (асимптотически устойчивым) или отталкивающим (неустойчивым). Для определения свойства устойчивости используем функцию Ляпунова

$$V(y_1\, y_2) = \frac{1}{\varepsilon_1}\left(y_1 - y_1^* - y_1^* \ln\frac{y_1}{y_1^*}\right) + \frac{1}{\varepsilon_2}\left(y_2 - y_2^* - y_2^* \ln\frac{y_2}{y_2^*}\right). \tag{8}$$

Так как мы рассматриваем только положительные y_1, y_2, то V определена, непрерывна, $V(y_1^*, y_2^*) = 0$. При всех остальных положительных y_1, y_2 функция V строго положительна. Значит, она является определенно положительной для равновесия (y_1^*, y_2^*). Поскольку функции такого типа используются аналитиками редко, покажем на рисунке примерный график в одномерном случае (рис. 2).

В двумерном пространстве изобразим поверхности уровня функции (рис. 3).

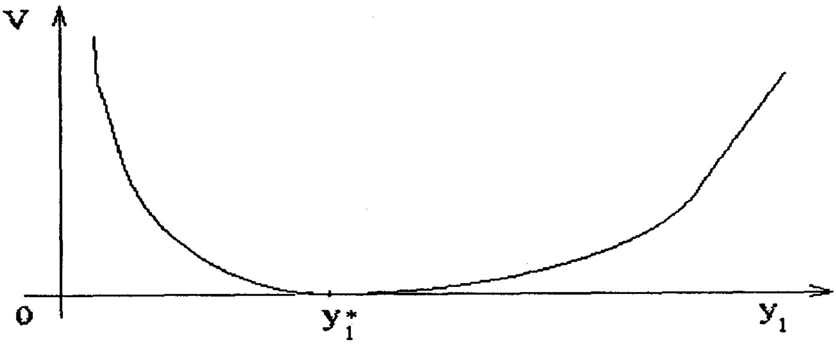

Рис. 2. Примерное изображение функции Ляпунова (8) в одномерном случае.

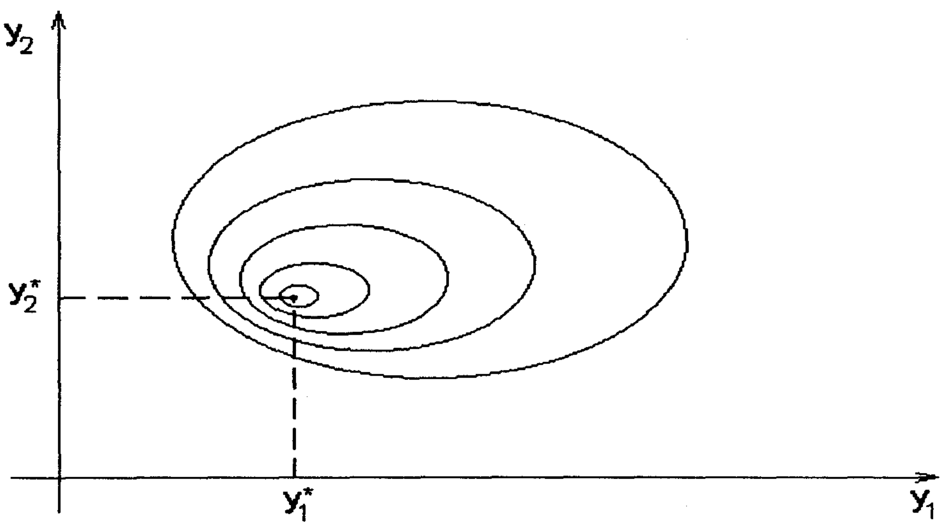

Рис. 3. Примерное изображение поверхностей уровня функции Ляпунова (8) в двумерном случае.

Производная функции (8) по времени в силу системы (5) имеет вид

$$\dot{V}\Big|_{(5)} = -(y_1 - y_1^*)^2 - (1+\alpha)(y_1 - y_1^*)(y_2 - y_2^*) - \beta(y_2 - y_2^*)^2.$$

Она определенно отрицательна, когда $4\beta > (1+\alpha)^2$. Последнее неравенство выполняется, когда верно (6), и не выполняется при (7). Таким образом справедлив следующий вывод.

Вывод 2. Если верно условие (6), то для любых положительных начальных данных решение с течением времени асимптотически стремится к (y_1^*, y_2^*). Если же имеет место (7), то положение равновесия неустойчиво (точнее говоря — особая точка типа «седло»). В этом случае на плоскости переменных y_1, y_2 притягивающими будут точки координатных осей $(0, 1/\beta)$, $(1{,}0)$.

Последнее утверждение вывода легко установить, выписав систему в отклонениях относительно указанных точек. Линейные части этих систем имеют вид

$$\begin{cases} \dot{y}_1' \approx \varepsilon_1(1 - 1/\beta)y_1', \\ \dot{y}_2' \approx \varepsilon_2 1/\beta(-\alpha y_1' - \beta y_2'); \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{y}_1' \approx -\varepsilon_1(y_1' + y_2'), \\ \dot{y}_2' \approx \varepsilon_2(1-\alpha)y_2', \end{cases}$$

где штрих показывает отклонение переменной от соответствующего равновесного значения. Как известно, через точку в этом случае проходит сепаратриса, делящая положительный квадрант плоскости на две части: в одной собраны все траектории, стремящиеся к одной координатной оси, а в другой — к другой. Движение по самой сепаратрисе осуществляется к точке (y_1^*, y_2^*). Таким образом:

Вывод 3. Траектория системы (5) с любыми неотрицательными начальными данными и любыми коэффициентами с течением времени асимптотически приблизится либо к нетривиальному положению равновесия, либо к одной из равновесных точек на координатных осях.

На следующих графиках изображено поле направлений в случае устойчивости и неустойчивости нетривиального положения равновесия системы (5) (рис. 4, рис. 5).

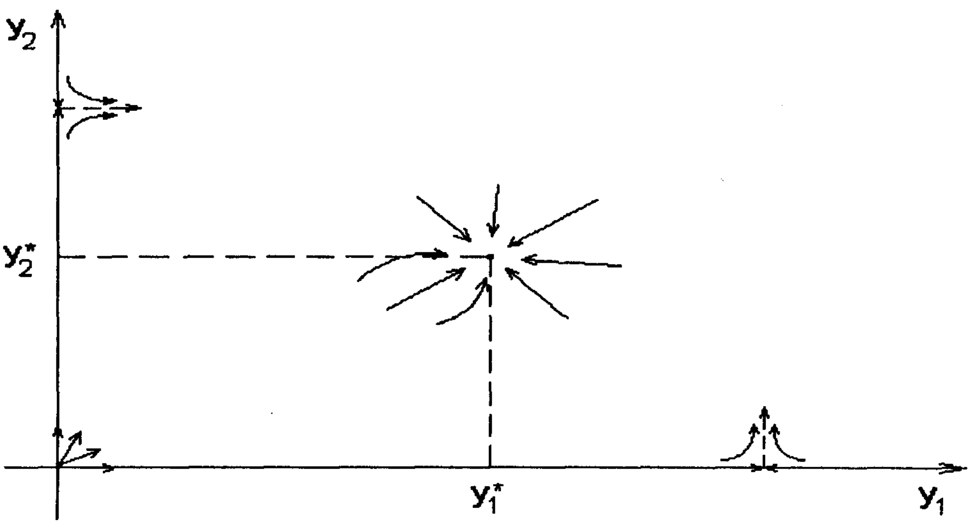

Рис. 4. Нетривиальное положение равновесия является притягивающей точкой.

Экономическая интерпретация. При конкуренции двух экономических агентов за общие ресурсы с течением времени возможны следующие результаты:

- при $\gamma_{12}/\gamma_{22} < \varepsilon_1/\varepsilon_2 < \gamma_{11}/\gamma_{21}$ объемы производства обеих фирм стремятся к величинам $\frac{\gamma_{22}\varepsilon_1-\gamma_{12}\varepsilon_2}{\gamma_{22}\gamma_{11}-\gamma_{12}\gamma_{21}}$ и $\frac{\gamma_{11}\varepsilon_2-\gamma_{21}\varepsilon_1}{\gamma_{22}\gamma_{11}-\gamma_{12}\gamma_{21}}$ соответственно. Их начальное состояние не играет никакой роли, объемы производства могут сокращаться или возрастать, изменяется также их суммарный объем.
- При $\gamma_{11}/\gamma_{21} < \varepsilon_1/\varepsilon_2 < \gamma_{12}/\gamma_{22}$ одна из фирм (за исключением крайне редкого случая сепаратрисы) с течением времени прекратит производство, другая же либо сократит, либо увеличит выпуск в соответствии с наличным ресурсом. Окончательный выпуск для первой фирмы численно равен $\varepsilon_1/\gamma_{11}$, а для второй — $\varepsilon_2/\gamma_{22}$. Этот случай открывает возможность для руководителей фирм управлять процессом конкуренции. Если изменить начальное состояние производства так, чтобы оказаться в предпочтительной части плоскости, то появится шанс выжить. Достичь этого можно, например, взяв большой кредит и резко расширив производство. Однако расширение не должно превосходить равновесного значения.

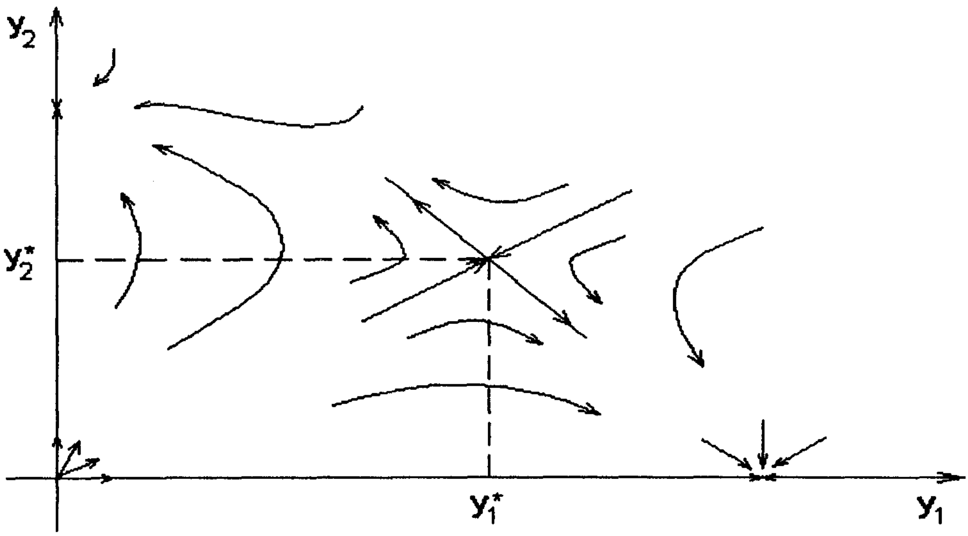

Рис. 5. Нетривиальное положение равновесия является неустойчивым, типа «седло».

◇ При иных соотношениях коэффициентов модели следует отказаться от ее использования, так как система не будет иметь положительного равновесия.

Из асимптотической устойчивости положения равновесия следует ограниченность и продолжимость на бесконечный интервал времени решений системы (4). В случае неустойчивости такой вывод не очевиден. Поэтому рассмотрим систему в интегральной форме. Из положительности ε, γ, x_i следует неравенство:

$$x_i(s) = x_i(0) \exp \int_0^s \left[\varepsilon_i - \sum_{k=1}^{2} \gamma_{ik} x_k(t) \right] dt < x_i(0) e^{\varepsilon_i s}, \quad i = 1, 2,$$

а это влечет продолжимость решений. Но можно показать и ограниченность всех решений при всех положительных коэффициентах и начальных данных (отсюда будет следовать и продолжимость).

Предположим, что какая-либо переменная $x_i(s)$ от положительного начального значения неограниченно возрастает. Тогда найдутся два достаточно близких момента времени $\hat{s} < \tilde{s}$, что $x_i(\hat{s}) < x_i(\tilde{s})$ и

$$\varepsilon_i - \gamma_{ii} x_i(\hat{s}) - \sum_{k=1,\, k \neq i}^{2} \gamma_{ik} x_k(\hat{s}) < 0, \quad \varepsilon_i - \gamma_{ii} x_i(\tilde{s}) - \sum_{k=1,\, k \neq i}^{2} \gamma_{ik} x_k(\tilde{s}) < 0,$$

и, следовательно, учитывая гладкость решений, получим противоречие: с одной стороны монотонное возрастание, т. е. $\dot{x}_i(\hat{s}) > 0$, с другой — правые части системы (4) при этих значениях переменных отрицательны.

Следует отметить, что за пределами положительного ортанта пространства переменных система (4) имеет непродолжимые решения, уходящие на бесконечность при конечных значениях времени. В этом контексте очень важным является анализ правых частей при различных обобщениях систем Лотки-Вольтерра. Так, например, обобщенная логистическая модель А. Н. Колмогорова для всех вариантов f_i требует проверки продолжимости.

В случае неустойчивости нетривиального положения равновесия (и в то же время ограниченности решений в положительном ортанте) интересно было бы исследовать вопрос о колебательности решений. В плоском случае сепаратриса неустойчивого равновесного состояния проходит через начало координат и делит положительный квадрант на две части, в каждой из которых есть притягивающие точки на координатных осях и, следовательно, колебательности нет. В пространстве размерности более двух такого сказать нельзя.

• Конкурентная деятельность с временным лагом

Вернемся к уравнениям (5), предполагая, что запаздывание τ строго положительно:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= \varepsilon_1 y_1(t)\left[1 - y_1(t-\tau) - y_2(t-\tau)\right], \\ \dot{y}_2(t) &= \varepsilon_2 y_2(t)\left[1 - \alpha y_1(t-\tau) - \beta y_2(t-\tau)\right]. \end{aligned} \qquad (9)$$

И нетривиальное положение равновесия также останется прежним (y_1^*, y_2^*). При малом положительном запаздывании все выводы о качественном поведении решений системы (9) продолжают иметь место, но с увеличением запаздывания картина меняется: неустойчивые стационарные точки сохраняют неустойчивость, а устойчивые — теряют ее. В последнем случае вокруг нетривиального равновесного центра (y_1^*, y_2^*) возникает притягивающий предельный цикл (или иначе — стабильное колебание). Примерное поведение траекторий изображено на рисунке (рис. 6).

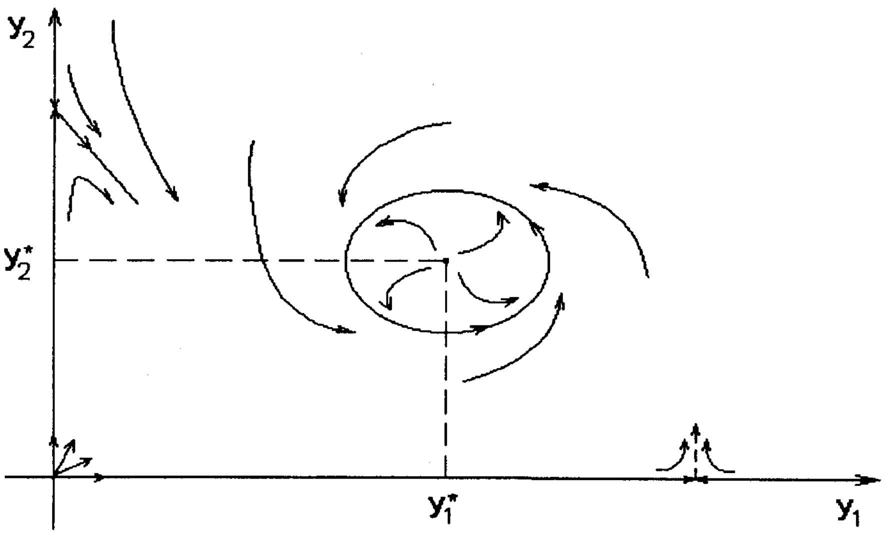

Рис. 6. Возникновение притягивающего предельного цикла при возрастании запаздывания.

Обсудим эти изменения свойств траекторий с увеличением запаздывания более подробно.

Утверждение. Если выполнено условие (6), то для любого фиксированного запаздывания τ существует область в положительном квадранте фазовой плоскости, содержащая треугольники ABE и DEF и четырехугольник $CBED$ (см. рис. 7), и такая, что все траектории изнутри этой области в ней и остаются, и любая траектория снаружи ее входит внутрь.

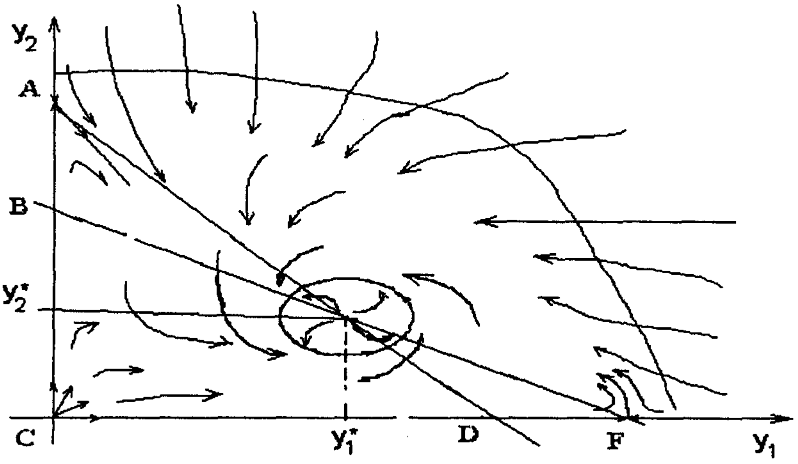

Рис. 7. Примерный портрет фазовой плоскости (y_1, y_2) для системы (9) при условии (6).

Для доказательства заметим, что из (9) следуют неравенства:

— если точка $(y_1(t-\tau), y_2(t-\tau)) \in \Delta ABE$, то $\dot{y}_1(t) > 0$, $\dot{y}_2(t) < 0$;

— если точка $(y_1(t-\tau), y_2(t-\tau)) \in \Delta DEF$, то $\dot{y}_1(t) < 0$, $\dot{y}_2(t) > 0$;

— если точка $(y_1(t-\tau), y_2(t-\tau)) \in BEDC$, то $\dot{y}_1(t) > 0$, $\dot{y}_2(t) > 0$;

— если же точка $(y_1(t-\tau), y_2(t-\tau))$ не принадлежит указанным областям, то обе производные отрицательны.

Будем рассматривать только непрерывную часть траектории. Пусть в начальный момент времени t^* первая переменная имеет любое, сколь угодно большое значение, а запаздывающая точка, определяющая знак производной, расположена сколь угодно близко к началу координат (точка C), что соответствует наибольшему значению производной. Тогда за время τ переменная $y_1(t^*)$ возрастет не более чем в $e^{\varepsilon_1 \tau}$ раз, а запаздывающая точка $(y_1(t^*-\tau), y_2(t^*-\tau))$ перейдет непременно в $(y_1(t^*), y_2(t^*))$, в силу непрерывности траектории. И так как последняя по предположению имеет большое значение первой переменной, то и производная первой переменной станет отрицательной. Знак указанной производной сохранится до тех пор, пока запаздывающая точка не вернется к началу координат. Вторая переменная имеет аналогичное поведение и поэтому все удаленные точки движутся к началу системы координат, а затем на некоторое расстояние отходят в сторону. Если считать вторую переменную y_2 близкой нулю (это равносильно рассмотрению траектории, проходящей почти по оси абсцисс), то первое уравнение системы (9) заменим на $\dot{y}_1(t) = \varepsilon_1 y_1(t)[1 - y_1(t-\tau)]$. И аналогично, полагая малой первую переменную, получим приближенное второе уравнение из системы (9): $\dot{y}_2 = \varepsilon_2 y_2(t)[1 - \beta y_2(t-\tau)]$. В [8] подробно исследовано поведение решений таких уравнений и показано, что упомянутая в утверждении область лежит внутри прямоугольника $\left\{0 < y_1 < e^{\varepsilon_i \tau},\ 0 < y_2 < \frac{1}{\beta} e^{\varepsilon_2 \tau}\right\}$.

Появление временного лага способно изменить всю качественную картину траекторий на фазовой плоскости: так с возрастанием запаздывания притягивающие точки становятся отталкивающими. Сформулируем все возможные ситуации в одном утверждении.

Утверждение. Положение равновесия (1,0) системы (9) будет асимптотически устойчиво, если $\alpha > 1$, $\varepsilon_1 \tau < \pi/2$; и неустойчиво, если либо $\alpha < 1$, либо $\alpha > 1$, $\varepsilon_1 \tau > \pi/2$.

Положение равновесия $(0, 1/\beta)$ будет асимптотически устойчиво, если $\beta < 1$, $\varepsilon_2\tau < \pi/2$; и неустойчиво, если либо $\beta > 1$, либо $\beta < 1$, $\varepsilon_2\tau > \pi/2$.

Положение равновесия $(y_1^* \, y_2^*)$ будет асимптотически устойчиво, если $\alpha < 1$, $\beta > 1$, $-z_1\tau < \pi/2$; и неустойчиво, если либо $\alpha > 1$, либо $\beta < 1$, либо $\alpha < 1$, $\beta > 1$, $-z_1 > \pi/2$. Здесь

$$z_1 = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{(y_1^*\varepsilon_1 - y_2^*\varepsilon_2\beta)^2 + 4\alpha y_1^*\varepsilon_1 y_2^*\varepsilon_2} - y_1^*\varepsilon_1 - y_2^*\varepsilon_2\beta\right) < 0.$$

Покажем, как получаются последние выводы. Для каждой стационарной точки составляется система уравнений в отклонениях и рассматривается ее линейная часть. Например, первая стационарная точка порождает линейное приближение системы в отклонениях вида

$$\dot{y}_1' = -\varepsilon_1(y_{1\tau}' + y_{2\tau}'); \qquad \dot{y}_2' = \varepsilon_2(1-\alpha)y_2'.$$

Очевидно, что второе уравнение дает затухающие до нуля решения при $\alpha > 1$, а первое уравнение в этом случае становится неоднородным линейным с экспоненциально затухающей неоднородностью. Его однородная часть будет асимптотически устойчивой, если запаздывание не очень велико, а именно, если $\varepsilon_1\tau < \pi/2$.[7] Таким образом, устанавливается вывод утверждения.

Несколько более сложно решается вопрос с нетривиальной стационарной точкой (y_1^*, y_2^*). В этом случае система в отклонениях (ее линейная часть) имеет вид

$$\dot{y}_1' = -\varepsilon_1 y_1^*(y_{1\tau}' + y_{2\tau}'); \qquad \dot{y}_2' = \varepsilon_2 y_2^*(\alpha y_{1\tau}' + \beta y_{2\tau}').$$

Ее характеристический квазиполином определяется следующим равенством

$$\det\left[\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + e^{-\lambda\tau}\begin{pmatrix}\varepsilon_1 y_1^* & \varepsilon_1 y_2^*\\ \alpha\varepsilon_2 y_1^* & \beta\varepsilon_2 y_2^*\end{pmatrix}\right] = 0.$$

С помощью замены переменных $z = \lambda e^{\lambda\tau}$ последнее уравнение превращается в квадратное

$$z^2 + (y_1^*\varepsilon_1 + y_2^*\varepsilon_2\beta)z + y_1^*\varepsilon_1 y_2^*\varepsilon_2(\beta - \alpha) = 0.$$

Если $\alpha < 1$, $\beta > 1$, оно имеет всегда два вещественных, отрицательных корня:

$$z_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\mp\sqrt{(y_1^*\varepsilon_1 - y_2^*\varepsilon_2\beta)^2 + 4\alpha y_1^*\varepsilon_1 y_2^*\varepsilon_2} - y_1^*\varepsilon_1 - y_2^*\varepsilon_2\beta\right).$$

Таким образом, приведенное выше утверждение полностью описывает асимптотическое поведение траекторий во всей положительной четверти фазовой плоскости.

В работе[8] автором доказано существование периодических решений вокруг нетривиального положения равновесия, когда временные лаги достаточно велики.

Рассмотрим две экономические модели для того, чтобы представлять себе значения параметров, входящих в модель. Мы будем строить систему (9) для двух фирм. Сначала предположим, что производственные фирмы работают на общем рынке и используют одни и те же источники производственных факторов: имеются в виду трудовые, сырьевые и капитальные ресурсы. Это могут быть домостроительные комбинаты, предприятия легкой промышленности и т. п.

Напомним, что речь идет о системе уравнений

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t)\left[\varepsilon_1 - \gamma_{11}x_1(t-\tau) - \gamma_{12}x_2(t-\tau)\right],$$
$$\dot{x}_2(t) = x_2(t)\left[\varepsilon_2 - \gamma_{21}x_1(t-\tau) - \gamma_{22}x_2(t-\tau)\right].$$

Оценим параметры модели, которые отвечают за собственные возможности предприятий, без учета конкурирующей фирмы. Пусть технологические и управленческие возможности первого предприятия таковы, что оно способно удвоить выпуск продукции за 5 лет. Тогда из первого уравнения модели получим при малых значениях x_1

$$x_1(5) = x_1(0)e^{\varepsilon_1 5}.$$

Отсюда имеем приближенное равенство $\varepsilon_1 \approx 0,14$. Аналогично предположим, что второе предприятие при малых собственных объемах выпуска способно утроить за 5 лет объем производства. Тогда из второго уравнения модели получим $\varepsilon_2 \approx 0,22$.

Каждый из управляющих может оценить оптимальный размер предприятия, пользуясь известным критерием через цены на факторы производства и вид производственной функции.[9] Пусть из этих оценок следует, что без учета конкуренции первое предприятие способно выпускать 20 единиц продукции, а второе — 10. Но мы знаем, что при отсутствии конкуренции предельный объем выпуска на первом предприятии будет равен $\varepsilon_1/\gamma_{11}$, а на втором — $\varepsilon_2/\gamma_{22}$. Тогда вычисляются соответствующие γ: $\gamma_{11} = 0,007$; $\gamma_{22} = 0,022$. Самое трудное оценить взаимное влияние двух фирм, т. е. γ_{12}, γ_{21}. Либо следует предположить, что управляющие фирм имеют возможность договориться об объемах поставок товара на общий рынок, либо делаются регулярные маркетинговые исследования, из которых можно судить о равновесии в конкурентных отношениях. Предположим, что равновесие достигается при $x_1^* = 15$; $x_2^* = 8$; тогда вычисляем оставшиеся параметры: $\gamma_{12} = 0,0044$; $\gamma_{21} = 0,003$.

Итак, модель взаимодействия двух производственных фирм построена. Чтобы применить полученные выше выводы, нам необходимо знать α, β, z_1. Согласно приведенным выше формулам $\alpha = 0,27$; $\beta = 3,18$ и $z_1 = -0,19$. Таким образом, нетривиальное положение равновесия на рынке двух производственных фирм (15,8) будет асимптотически устойчивым, т. е. какими бы ни были начальные условия с течением времени, оба производства достигнут равновесной точки, при этом они могут не волноваться относительно временных лагов в их технологических процессах или в финансовых стратегиях, так как устойчивость стационарной точки будет гарантирована до запаздывания, равного 8 годам. Никаких колебательных процессов в динамике наблюдаться не должно.

Следующий пример конкурентной борьбы на общем рынке ресурсов относится к торговле. Давайте рассмотрим взаимное влияние мелкой, уличной торговли (первая фирма) и торговли, располагающей стационарными помещениями, складами, демонстрационными залами и т. д. (вторая фирма). Так как каждая из фирм не способна закрыть весь рынок: уличная ближе к покупателю и мобильней, но не может охватить всех товаров и предоставить удобные и современные способы торговли, примем условно, что уличная торговля в принципе может удовлетворить только 30 % рынка, а стационарная — 80 % (далее в этих единицах и будем измерять деятельность торговли). Кроме того, положим, что первая фирма может увеличить свои торговые точки в десять раз за один год, если стационарная торговля вдруг перестанет существовать. Для последней возможно лишь удвоение за год, поскольку строительство, аренда, регистрация, подготовка продавцов, оптовые закупки — все требует времени. Таким образом, как и в первом примере получим для коэффициентов модели значения: $\varepsilon_1 \approx 2,3$; $\varepsilon_2 \approx 0,69$; $\gamma_{11} = 0,077$; $\gamma_{22} = 0,0086$. В результате различных видов конкурентной борьбы (рекламы, демпинговых цен, влияния на городские власти и т. п.) сформировалось равновесие: $x_1^* = 25\,\%$; $x_2^* = 75\,\%$, из которого можно получить недостающие параметры: $\gamma_{12} = 0,005$; $\gamma_{21} = 0,0018$. Модель готова — можно ознакомиться, что будет из нее следовать. Так как $\alpha = 0,078$; $\beta = 5,73$; и $z_1 = -1,94$, то стационарная точка (25 %, 75 %) будет асимптотически устойчивой только в том случае, если реакция рынка на действие каждой фирмы будет происходить без большого запаздывания, а именно, временной лаг не должен превышать 0,81 года. В противном случае вокруг стационарной точки начнутся колебания: то уличная торговля захватит больше 25 % рынка, то стационарная торговля выйдет за свои 75 %. Чем больше запаздывание, тем больше период колебаний и их амплитуда. Когда запаздывание чуть превысит критическую величину 0,81, период колебаний будет несколько больше трех лет (четыре временных лага). Если воспользоваться компьютером, то можно увидеть следующую картину.

При временном лаге 0,82 (т. е. чуть больше критического) уличная торговля начинает испытывать колебания с амплитудой 7 % от всего рынка, т. е. примерно 25 % от своего объема. С увеличением лага амплитуда быстро растет и при $\tau = 0,9$ в течение каждых четырех лет уличная торговля изменяется от нуля до 45 % всего рынка. Но колебания охватывают и стационарную торговлю: так, при запаздывании 0,82 амплитуда составляет 2 % всего рынка или 3,2 % от своего стационарного объема. Такие явления становятся заметными на сборе налогов и на городском бюджете. С ростом запаздывания амплитуда колебаний и период растут почти экспоненциально. Следует отметить, что на продолжительность временного лага оказывают влияние сроки кредитов в банковской системе, политическое устройство городских властных структур, удаленность от мировых и отечественных торговых потоков и т. д.

• Заключение

В статье рассмотрена модель Лотки-Вольтерра в рамках корпоративного взаимодействия с временным лагом. Выделен класс экономических задач, динамика в которых может быть описана такой моделью. В данный круг проблем попадают все виды взаимодействия предприятий на общем экономическом поле: в производстве и распределении товаров, причем как в конкурентной борьбе, так и в случае зависимости одного предприятия от функционирования другого. Аналогично обстоят дела с взаимодействием отраслей, регионов и стран. Поэтому рассматриваемая модель может оказаться полезной при анализе динамики внешней торговли или цикличности экономического развития стран.

Использование нелинейных уравнений открывает путь для формирования в пространстве переменных нескольких областей притяжения (или отталкивания), а введение запаздывания является не только естественным в экономических задачах, но и существенно обогащает динамические свойства модели, делает предметом исследования как простейшие периодические колебания, так и почти периодические, и реккурентные движения. В статье дано подробное изучение таких динамических свойств в двумерном случае.

Внедрение в экономическую практику описанных выше моделей помогло бы сделать более точным прогноз, разобраться в причинах тех или иных явлений, а также предпринять соответствующие управленческие шаги для изменения ситуации.

ЛИТЕРАТУРА

[1] **Вольтерра, Вито. Математическая теория борьбы за существование. — М.: Наука, 1976. — 288 с.**

[2] **Свирежев Ю. М., Логофет Д. О. Устойчивость биологических сообществ. — М.: Наука, 1978. — 352 с.**

[3] **Петросян Л. А., Захаров В. В. Математические модели в экологии. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1997. — 253 с.**

[4] **Ланге О.: 1) Теория воспроизводства и накопления. — М., 1963; 2) Введение в экономическую кибернетику. — М., 1968; Милованов В. П. Об одном подходе к моделированию механизмов ценообразования // Экономика и математические методы, 1994, т. 30. Вып. 1. — С. 137–147.**

[5] **Колмогоров А. Н. Качественное изучение математических моделей динамики популяций. Сб. Проблемы кибернетики. Вып. 25. — М.: Наука, 1972. — С. 100–106.**

[6] **Прасолов А. В. Математические модели динамики в экономике. — СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2000. — 248 с.**

[7] **Там же.**

[8] **Прасолов А. В. О построении периодических решений для системы второго порядка с последействием. Минск. Дифференциальные уравнения, 2000, № 4. — С. 470–474.**

[9] **Иванилов Ю. П., Лотов А. В. Математические модели в экономике. М.: Наука, 1979. — 303 с.**