

© 2007 г. А. В. Прасолов, д-р физ.-мат. наук,
Н. В. Хованов, д-р физ.-мат. наук
(Санкт-Петербургский государственный университет).

О ПРОГНОЗИРОВАНИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СТАТИСТИЧЕСКИХ И ЭКСПЕРТНЫХ МЕТОДОВ ¹

В статье рассматривается комбинация различных методов для прогнозирования значений социально-экономического показателя. Одни методы оценивают значение показателя в будущем с помощью эконометрического анализа, основываясь на его динамике в прошлом. При этом вводится новое понятие оптимального начального вектора прогноза. Другие методы опираются на предсказания экспертов, чьи заключения аккумулируют нечисловую, неполную и неточную информацию. Окончательную оценку доставляет комбинация эконометрического и экспертного прогнозов с весовыми коэффициентами, выбор которых производится исследователем с учетом объема и качества используемой экспертной и статистической информации.

1. Введение

В настоящее время органы государственной и региональной власти проводят определенную работу по систематизации социально-экономических показателей с целью более точного контроля развития и эффективности управления. Широкое внедрение в практику национальных проектов, бюджетных целевых программ и других экономических рычагов воздействия на социально-экономическое состояние страны требует адекватных алгоритмов прогнозирования динамики, которые базируются на мониторинге большого числа показателей, как на федеральном, так и на региональном уровнях.

Использование только количественных методов прогнозирования встречается с рядом ограничений, связанных с их ориентацией на числовые статистические данные, полученные за прошедший промежуток времени, что не позволяет учесть возможные будущие изменения в характере наблюдаемого процесса. К тому же обычно присутствует дефицит числовой информации о статистических параметрах наблюдаемых временных рядов, имеющих, как правило, небольшую длину и являющихся нестационарными. С другой стороны, применение только экспертных методов оценивания и прогнозирования ([1], [2], [3], [4]), хотя, в принципе, и позволяет учесть будущие качественные изменения структуры наблюдаемых временных рядов, но обладает рядом недостатков, связанных, в основном, с трудностью оценки значимости соответствующей экспертной информации, не подкрепленной достоверными числовыми данными.

Настоящая работа посвящена попытке объединить оба подхода, совместить экспертные оценки с процедурами составления количественного прогноза. Ниже дается алгоритм получения прогнозируемого социально-экономического показателя как линейной комбинации регрессионного прогноза и экспертных заключений. В работе

¹

¹Работа подвержена Российским фондом фундаментальных исследований (проект 06-06-80271)

приведены новые результаты, развивающие регрессионный метод, а именно, дается определение оптимального начального вектора прогноза и выводится явное выражение этого вектора для авторегрессии любого порядка. Результат сформулирован для скалярного временного ряда, указан путь его обобщения на векторные объекты. Реальный числовой пример демонстрирует весь алгоритм предлагаемого смешанного прогноза.

2. Формальная постановка задачи

Пусть имеется временной ряд значений социально-экономического показателя $x(k)$, $k = \overline{1, N}$ k - дискретное время. Значения показателя при $k \leq N$ (N - текущий момент времени) известны с некоторыми ошибками. Необходимо оценить значение $x(N + N_1)$, т.е. оценить значение показателя в будущем через N_1 временных интервалов. К оценке привлекаются несколько экспертов, которые, используя свой опыт и прогностические способности, могут дать заключение о вероятностях того, в какой интервал (из системы непересекающихся последовательно идущих интервалов) попадает значение $x(N + N_1)$ изучаемого показателя в момент времени $k = N + N_1$. Обозначим $q_j(x)$, $j = \overline{1, m}$, соответствующую кусочно-постоянную плотность распределения вероятности случайных значений прогнозируемого показателя, указываемой j -м экспертом, а аналогичную плотность, получаемую на основе анализа только статистических данных, обозначим $q_0(x)$. Объединяя полученные плотности линейной сверткой, получим смесь плотностей ("смешанную плотность"):

$$(1) \quad Q(x) = \sum_{j=0}^m \bar{w}_j q_j(x),$$

где \bar{w}_j ($\bar{w}_j \geq 0$, $\bar{w}_0 + \bar{w}_1 + \dots + \bar{w}_m = 1$) - оценки весовых коэффициентов, полученные по нечисловой, неточной и неполной экспертной информации, а $q_j(x)$ - аналогичные экспертные оценки кусочно-постоянных плотностей, $j = \overline{1, m}$. Рассмотрим последовательно этапы построения смешанного прогноза: получение экспертных оценок кусочно-постоянных плотностей $q_j(x)$, $j = \overline{1, m}$, распределения прогнозируемого показателя на момент времени $k = N + N_1$; построение плотности $q_0(x)$ распределения этого показателя на основе количественной модели; получение экспертных оценок весовых коэффициентов, \bar{w}_j , $j = \overline{0, 1, m}$, определяющих значимость (важность, "весомость" и т.д.) отдельных компонент смешанного прогноза.

2.1. Экспертное прогнозирование временного ряда по нечисловой информации

Обычно в качестве экспертов выступают специалисты высокой квалификации, обладающие достаточной информацией и незаинтересованные в искажении прогноза. Поэтому ошибки, которые они могут допускать, в большей степени проистекают из сложности самой проблемы прогнозирования. Разобьем интервал $[a, b]$ всех возможных числовых значений изучаемого показателя в будущий момент времени $k = N + N_1$ при помощи последовательности точек $a = d_0 < d_1 < \dots < d_r = b$ на r непересекающихся интервалов вида $A_i = \langle d_{i-1}, d_i \rangle$, $i = \overline{1, r}$, где $\langle d_{i-1}, d_i \rangle = [d_{i-1}, d_i)$ при $i = \overline{1, r-1}$ и $\langle d_{r-1}, d_r \rangle = [d_{r-1}, d_r]$. Эксперт должен оценить неизвестные вероятности

$p_i = P(A_i)$ ($p_i \geq 0, p_1 + \dots + p_r = 1$) событий $A_i, i = \overline{1, r}$, состоящих в попадании значения изучаемого показателя в будущий момент времени $k = N + N_1$ в соответствующие интервалы $A_i = \langle d_{i-1}, d_i \rangle$ и образующих полную группу попарно несовместных событий: $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$ (\emptyset - невозможное событие); $A_1 \cup \dots \cup A_r = \Omega$ (Ω - достоверное событие).

Пусть у исследователя имеется m различных источников экспертной информации о вероятностях альтернатив. Относительно информации $I_j, j = \overline{1, m}$, получаемой из j -го источника, предполагается, что она может быть двух типов - ординальная (нечисловая) информация OI_j , выражаемая неравенствами $p_i > p_j$ и равенствами $p_u = p_v$, и интервальная (неточная) информация II_j , состоящая в указании диапазонов $[p_i^-, p_i^+], 0 \leq p_i^- \leq p_i^+ \leq 1, i = \overline{1, r}$, возможного варьирования вероятностей p_1, \dots, p_r альтернатив A_1, \dots, A_r . Иными словами, нечисловая и неточная объединенная информация $I_j = OI_j \cup II_j$, получаемая из j -го источника, задается системой I_j равенств и неравенств для вероятностей p_1, \dots, p_r альтернатив A_1, \dots, A_r . При этом, поскольку возможно, что этой информации недостаточно для однозначного определения вероятностей p_1, \dots, p_r , постольку можно говорить, что информация I_j неполна. Таким образом, можно считать, что из j -го источника поступает нечисловая, неточная и неполная информация (ННН-информация) $I_j, j = \overline{1, m}$, о вероятностях p_1, \dots, p_r альтернатив A_1, \dots, A_r .

Учет информации I_j позволяет выделить из множества $P(r)$ всех возможных векторов $p = (p_1, \dots, p_r)$ вероятностей альтернатив A_1, \dots, A_r множество $P(r; I_j)$ всех допустимых (с точки зрения j -го источника информации) векторов вероятностей. Таким образом, ННН-информация I_j , получаемая из j -го источника, определяет вектор вероятностей $p = (p_1, \dots, p_r)$ с точностью до множества $P(r; I_j)$. Моделируя неопределенность выбора вектора вероятностей $p = (p_1, \dots, p_r)$ из множества $P(r; I_j)$ при помощи рандомизации этого выбора, получаем случайный вектор $\tilde{p}(I_j) = (\tilde{p}_1(I_j), \dots, \tilde{p}_r(I_j))$, равномерно распределенный на полиэдре $P(r; I_j)$.

Компонента $\tilde{p}_i(I_j)$ случайного вектора $\tilde{p}(I_j)$ есть рандомизированная оценка вероятности альтернативы A_i , соответствующая ННН-информации I_j , полученной из j -го источника. Для случайных величин $\tilde{p}_i(I_j), i = \overline{1, r}, j = \overline{1, m}$, можно найти математические ожидания $\bar{p}_i(I_j) = M\tilde{p}_i(I_j)$ и стандартные отклонения (стандарты) $sp_i(I_j) = \sqrt{D\tilde{p}_i(I_j)}$. Полученное математическое ожидание $\bar{p}_i(I_j)$ рандомизированной вероятности $\tilde{p}_i(I_j)$ является искомой оценкой вероятности P_i альтернативы A_i , построенной на основе экспертной информации I_j . Точность полученной оценки $\bar{p}_i(I_j)$ описывается стандартным отклонением $sp_i(I_j)$.

На практике искомые величины $\bar{p}_i(I_j), sp_i(I_j)$ вычисляются с учетом конечной точности экспертного оценивания вероятностей, что позволяет рассматривать только дискретные значения вероятностей, отсчитываемых с конечным шагом $h = \frac{1}{n}$, где n - некоторое натуральное число. Иными словами, предполагается, что вероятность p_i события $A_i, i = \overline{1, r}$, принимает значения из множества $\{0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{(n-1)}{n}, 1\}$. Такая дискретизация значений вероятностей дает конечное множество $P(r, n) = \left\{ p^{(\theta)} = (p_1^{(\theta)}, \dots, p_r^{(\theta)}), \theta = 1, \dots, N(r, n) \right\}$ всех возможных векторов вероятностей $p = (p_1, \dots, p_n)$, состоящее из элементов $N(r, n) = \frac{(n+r-1)!}{n!(m-1)!}$. Конечным будет и множество $P(r, n; I_j) = \left\{ p^{(t)} = (p_1^{(t)}, \dots, p_r^{(t)}), t = 1, \dots, N(r, n) \right\}$ всех допустимых (с точки зрения имеющейся у j -го эксперта информации I_j) векторов вероятностей. Причем,

очевидно, выполняется неравенство $N(r, n; I_j) \leq N(r, n)$.

Конечность множеств $P(r, n; I_j)$, $j = \overline{1, m}$, позволяет вычислить искомые оценки $\bar{p}_i(I_j)$, $sp_i(I_j)$ по формулам

$$(2) \quad \bar{p}_i(I_j) = \frac{1}{N(r, n; I_j)} \sum_{t=1}^{N(r, n; I_j)} p_i^{(t)}, \quad sp_i(I_j) = \sqrt{\frac{1}{N(r, n; I_j)} \sum_{t=1}^{N(r, n; I_j)} [p_i^{(t)} - \bar{p}_i(I_j)]^2}.$$

Полученные оценки $\bar{p}_i(I_j)$ вероятностей p_i , $i = \overline{1, r}$, используются далее для построения кусочно-постоянной плотности $q_j(x) = q(x, I_j)$, $j = \overline{1, m}$, распределения прогнозируемого показателя на момент времени $k = N + N_1$, отражающей ННН-информацию I_j , получаемую от j -го эксперта. Кусочно-постоянная плотность $q_j(x)$ строится следующим образом: функция $q_j(x)$ принимает постоянное значение $q_j(x) = \bar{p}_i(I_j)/[d(i) - d(i - 1)]$, когда аргумент x принимает значения из интервала $\langle d_{i-1}, d_i \rangle$; $q_j(x) = 0$ вне интервала $[d_0, d_r] = [a, b]$. Здесь положительный параметр $\bar{p}_i(I_j)$ есть экспертная оценка вероятности того, что значение исследуемого показателя попадет в интервал $\langle d_{i-1}, d_i \rangle$.

Таким образом, мы получаем m кусочно-постоянных плотностей $q_j(x) = q(x; I_j)$, $j = \overline{1, m}$, описывающих, по мнению соответствующих экспертов, распределения вероятностей случайного значения исследуемого показателя на момент времени $k = N + N_1$. Построение по эмпирической числовой информации I_0 аналогичной прогнозной плотности $q_0(x)$ описывается в следующем подразделе.

2.2. Применение статистического анализа

Так как в распоряжении аналитика имеется динамика рассматриваемого показателя в прошлом, то есть имеется возможность оценить плотность распределения прогнозируемого значения какими-либо количественными методами, например, регрессии или авторегрессии. Оба указанных метода обладают своими достоинствами и недостатками. В данной работе мы предлагаем комбинацию этих методов, используемую как новый инструмент прогнозирования.

Итак, пусть имеется скалярный временной ряд $x(k)$, $k = \overline{1, N}$, и требуется оценить значение $x(N + N_1)$, т.е. выполнить прогнозирование на N_1 периодов времени. Согласно сформулированному выше плану, нам необходимо оценить плотность распределения случайной величины $x(N + N_1)$.

Регрессионная модель ряда основывается на выборе детерминированного тренда $u(k)$ из некоторого заданного класса функций так, чтобы в соотношении

$$(3) \quad x(k) = u(k) + \varepsilon_k,$$

случайный процесс ε_k был стационарным, т.е. функция распределения ε_k не зависела бы от времени k . При этом качество модели оценивается близостью к нулевому значению математического ожидания и дисперсии случайных ошибок ε_k ([5], [6]). В данном подходе самым существенным является выбор класса функций для тренда. В практических приложениях полная проверка свойства стационарности случайного процесса ε_k редко осуществима.

Авторегрессии возникают из предположения, что последующие члены временного ряда являются функциями предшествующих значений. Полагая эти зависимости линейными, получаем авторегрессионную модель:

$$(4) \quad x(k) = \sum_{l=1}^L \alpha_l x(k-l) + \gamma + \delta_k.$$

Относительно случайного процесса δ_k также предполагается стационарность. Коэффициенты $\alpha_l, \gamma, \quad l = \overline{1, L}$ найдем методом наименьших квадратов:

$$(5) \quad S(\alpha_1, \dots, \alpha_L, \gamma) = \sum_{k=L+1}^N \left[x(k) - \sum_{l=1}^L \alpha_l x(k-l) - \gamma \right]^2 \longrightarrow_{\alpha_l, \gamma} \min.$$

Теорема Гаусса-Маркова утверждает, что, если математическое ожидание δ_k равно нулю, то найденные коэффициенты модели (4) являются наилучшими линейными несмещенными оценками соответствующих истинных коэффициентов (4). Если случайные величины δ_k нормально распределены, то получаем максимальное правдоподобие модели.

Проверить выполнимость всех этих статистических гипотез, как и в случае регрессии (3), практически невозможно. Но даже если бы это удалось, для модели (4) характерна еще одна проблема: получая из предшествующих значений последующие мы вынуждены расширять область возможных значений прогноза по мере возрастания его длительности. Модель (3) лишена этого недостатка. Поэтому мы объединим модели регрессии и авторегрессии следующим образом.

Сначала найдем с помощью процедуры (5) оптимальные коэффициенты регрессии (4) $\alpha_l, \gamma, \quad l = \overline{1, L}$, а затем в качестве класса регрессионных функций $\{u(k)\}$ выберем частные решения разностного уравнений (4), в котором положим $\delta_k = 0, \quad k = \overline{1, N-L}$. В силу линейности (4) каждое частное решение является линейной функцией начальных значений, поэтому легко найти оптимальные начальные значения, доставляющие наименьшую величину сумме квадратов отклонений реальных данных от рассматриваемого решения ([7], [8]). Это выполняется при фиксированных N и L . Если же предполагается оптимизировать процедуру моделирования по порядку авторегрессии и в процессе решения задачи изменять L , то рекомендуется минимизировать среднюю сумму квадратов.

Формально предлагаемый алгоритм построения модели прогноза удобнее представить в векторном виде. Для этого исследуемый скалярный временной ряд $\{x(k)\}, \quad k = \overline{1, N}$, заменим векторным временным рядом $\{Y(k)\}, \quad k = \overline{L, N}$: $Y^T(k) = \{x(k), x(k-1), \dots, x(k-L+1)\}$. Далее, вычислим коэффициенты скалярной авторегрессии $\alpha_l, \gamma, \quad l = \overline{1, L}$, и введем в рассмотрение теперь уже фиксированные матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{L-1} & \alpha_L \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда векторным аналогом модели (4) при нулевых ошибках $\delta_k = 0$ будет линейная разностная система

$$(6) \quad Y(k+1) = AY(k) + \Gamma, \quad k = \overline{L, N}.$$

Частное решение этой системы с произвольным начальным вектором $Z^T = \{z_1, \dots, z_L\}$ будет линейной функцией относительно Z :

$$Y(k) = A^{k-L}Z + \sum_{i=0}^{k-L-1} A^i \Gamma, \quad k = \overline{L, N}.$$

Здесь матрица A и вектор Γ известны, т.к. вычислены по алгоритму (5). Таким образом, последняя формула определяет L - параметрическое семейство N - последовательностей, каждая из которых может быть выбрана в качестве оптимальной регрессионной функции модели (3): $u(1) = z_L$, $u(2) = z_{L-1}, \dots$, $u(L) = z_1$, $u(L+1) = \sum_{l=1}^L \alpha_l u(L+1-l) + \gamma, \dots, u(k) = \sum_{l=1}^L \alpha_l u(k-l) + \gamma, \dots$.

Оптимизация регрессионной модели для исходного временного ряда $\{x(k)\}$, $k = \overline{1, N}$ проводится методом наименьших квадратов в предположении стационарности ошибок ε_k для функции

$$r(z_1, \dots, z_L) = \sum_{k=1}^N [x(k) - u(k)]^2.$$

Определение 1. Будем называть вектор $Z^T = \{z_1, \dots, z_L\}$ оптимальным начальным вектором авторегрессии, если он доставляет минимальное значение функции $r(z_1, \dots, z_L)$.

Переход к векторной модели (6) позволяет найти этот вектор в явной форме.

Теорема 1. Оптимальный начальный вектор авторегрессии (6) вычисляется по формуле:

$$Z = \left[\sum_{k=L}^{N-1} (A^T)^{k-L+1} (A)^{k-L+1} \right]^{-1} \sum_{k=L}^{N-1} (A^T)^{k-L+1} \left[Y(k+1) - \sum_{i=0}^{k-L} A^i \Gamma \right].$$

Доказательство приведено в приложении.

Фактически мы ищем то решение системы (6), которое наилучшим образом (в смысле суммы квадратов отклонений) приближает векторы $\{Y(k)\}$, $k = \overline{L, N}$, и которое мы считаем трендом временного ряда. Заметим, что любая точка векторного тренда определена однозначно оптимальным начальным вектором и, наоборот, любая точка тренда однозначно определяет начальный вектор. Это следствие невырожденности матрицы A и формулы общего решения линейной разностной системы. В частности, это относится и к вектору $Y(N)$, который является моделью последних L реальных наблюдений $\{x(k)\}$, $k = \overline{1, N}$. Таким образом, мы подошли к тому, что может быть поставлен вопрос, из какого вектора Z^* начинать прогноз? Мы предлагаем использовать для этой цели модельный вектор $Y(N)$, лежащий на оптимальном тренде, т.е. $Z^* = Y(N)$.

$$Y(k) = A^{k-N} \left[Z^* - \left(\sum_{i=0}^{N-k-1} A^i \right) \Gamma \right], \quad k = N-1, \dots, L.$$

Определение 2. Будем называть вектор Z^* оптимальным начальным вектором прогноза, если он доставляет наименьшее значение функционалу

$$(7) \quad R(Z) = \sum_{k=L}^{N-1} \left[Y(k) - A^{k-N} \left(Z - \left(\sum_{i=0}^{N-1-k} A^i \right) \Gamma \right) \right]^2.$$

Здесь рассматриваются отклонения модели от реальных данных в процессе формирования модельных векторов справа налево, т.е. от больших номеров к меньшим. При фиксированных A, Γ, N, L процедура поиска оптимального Z и оптимального Z^* приводит к одному и тому же результату, т.к. это начальные и конечные значения одного тренда. Однако при больших величинах N существенную роль играют погрешности вычисления степеней матрицы A . Если есть собственные числа A близкие к нулю, то усложняется вычисление степеней обратной матрицы к A .

Конструктивное решение этой проблемы мы видим в использовании следующего алгоритма.

Если бы реальные данные совпадали с модельными, то имели бы место равенства

$$Y(k) = A^{k-N} \left[Z^* - \left(\sum_{i=0}^{N-k-1} A^i \right) \Gamma \right], \quad k = N-1, \dots, L.$$

Или, вводя новый индекс $m = N - k$, получим

$$A^m Y(N - m) = Z^* - \left(\sum_{i=0}^{m-1} A^i \right) \Gamma, \quad m = \overline{1, N-L}.$$

Равенство в последнем выражении имеет место только, если фактические данные совпадают с модельными. Заменяем функционал в определении 2 на другой, который представляет собой сумму квадратов отклонений правой и левой частей в последнем выражении:

$$R_1(Z) = \sum_{k=1}^{N-L} \left[A^k Y(N - k) - Z + \left(\sum_{i=0}^{k-1} A^i \right) \Gamma \right]^2.$$

Минимальная точка этого функционала Z^{**} будет совпадать с Z^* , когда фактические данные удовлетворяют линейной модели (4) (или (6)). Однако это скорее исключительный случай. Поэтому назовем Z^{**} квази-оптимальным начальным вектором прогноза.

Теорема 2. Квази-оптимальный начальный вектор прогноза вычисляется по формуле:

$$(8) \quad Z^{**} = \frac{1}{N-L} \sum_{k=1}^{N-L} \left[A^k Y(N - k) + \left(\sum_{i=0}^{k-1} A^i \right) \Gamma \right].$$

Доказательство очевидно.

Замечание 1. Отметим, что последнее выражение может быть вычислено при любых коэффициентах α_l, γ , $l = \overline{1, L}$, и чем меньше по модулю собственные числа

матрицы, тем меньше слагаемых играют существенную роль в сумме: влияние давних значений временного ряда меньше, чем ближайших к текущему значению. Так если наибольшее собственное число матрицы по модулю близко к 0,8, то можно ограничиться двадцатью слагаемыми в сумме, так как иначе добавленные слагаемые не превосходят одного процента от нормы вектора Y , а если - близко к 0,5, то - только шестью слагаемыми.

Окончательно прогнозируемая последовательность $x(k)$, $k > N$, вычисляется с начальными данными

$$Z^* = \begin{pmatrix} z^*(N) \\ z^*(N-1) \\ \dots \\ z^*(N-L+1) \end{pmatrix},$$

т. е.

$$x(N+1) = \sum_{l=1}^L \alpha_l z^*(N-l+1) + \gamma,$$

$$x(N+2) = \alpha_1 x(N+1) + \sum_{l=1}^{L-1} \alpha_l z^*(N-l+1) + \gamma,$$

и т. д.

Выполняя указанную процедуру нужное число раз получим прогнозируемую величину $x(N+N_1)$. Решение уравнения (4), соответствующее полученным оптимальным значениям, будем считать трендом. Разброс значений временного ряда $x(k)$, $k = \overline{1, N}$, относительно тренда рассматриваем как реализации случайной величины, которая отождествляется с ошибкой моделирования. Обычным для таких построений путем вычислим гистограмму отклонений ряда от тренда. Тогда появляется возможность определить вероятности нахождения прогноза в том или ином интервале вокруг тренда, а это, в свою очередь, приведет нас к искомой плотности $q_0(x)$.

Более сложным алгоритмом прогнозирования социально-экономического показателя является установление зависимости динамики последнего с динамикой некоторых других показателей из заданного множества. Задача выделения группы наиболее влияющих показателей из списка всех доступных наблюдению составляет отдельную проблему и здесь не рассматривается. Однако предлагаемый в данной работе алгоритм может быть легко обобщен на случай векторного временного ряда, к которому сводится задача взаимодействия нескольких показателей. Для этого выполняется замена скалярных величин на векторные (или матричные): вместо $x(k)$ рассматриваем $X(k) = \{x_i(k)\}$, $i = \overline{1, n}$, вместо α_l появятся квадратные матрицы размерности $n \times n$, а искомый вектор Z^* будет иметь размерность nL . Матрица приобретет блочную структуру, в которой каждый блок имеет размерность $n \times n$, а вся матрица - размерность $nL \times nL$. В остальном алгоритм прогнозирования останется тем же. Прогноз векторного временного ряда выполняется с оптимальными начальными значениями. Из него выделяется исследуемая компонента и объявляется трендом прогноза. Подчеркнем еще раз преимущество предлагаемого приема составления прогноза: случайный разброс значений вокруг тренда один и тот же до текущего момента времени и после.

2.3. Определение значимости отдельных компонент смешанного прогноза

Два предыдущих подраздела содержат алгоритмы получения прогнозных плотностей $q_j(x) = q(x; I_j)$, $j = \overline{0, 1, m}$, распределения вероятностей случайного значения исследуемого показателя на момент времени $k = N + N_1$. Эти плотности объединяются в сводную прогнозную плотность $Q(x)$ формулой (1), предполагающей знание оценок \bar{w}_i ($\bar{w}_i \geq 0$, $\bar{w}_0 + \bar{w}_1 + \dots + \bar{w}_m = 1$) весовых коэффициентов, определяющих значимость отдельных компонент смешанного прогноза $Q(x)$.

Пусть исследователь располагает некоторой информацией J относительно сравнительной значимости прогнозов, получаемых из $m + 1$ источника (m экспертных источников I_1, \dots, I_m и один источник I_0 статистических числовых данных). Нечисловая, неточная и неполная информация J содержит ординальную (нечисловую) информацию, выражаемую неравенствами $w_i > w_j$ и равенствами $w_u = w_v$, и интервальную (неточную) информацию, состоящую в указании диапазонов $[w_j^-, w_j^+]$, $0 \leq w_j^- \leq w_j^+ \leq 1$, $j = \overline{0, 1, m}$, возможного варьирования весовых коэффициентов w_0, w_1, \dots, w_m . Иными словами, ННН-информация о сравнительной важности отдельных прогнозных плотностей $q_j(x) = q(x; I_j)$, $j = \overline{0, 1, m}$, для определения смешанной прогнозных плотностей $Q(x)$ задается системой J равенств и неравенств для весовых коэффициентов w_0, w_1, \dots, w_m .

Учет информации J позволяет выделить из множества $W(m)$ всех возможных векторов $w = (w_0, w_1, \dots, w_m)$ весовых коэффициентов множество $W(m; J)$ всех допустимых (с точки зрения информации J) векторов весовых коэффициентов. Таким образом, ННН-информация J определяет вектор $w = (w_0, w_1, \dots, w_m)$ с точностью до множества $W(m; J)$. Моделируя неопределенность выбора вектора весовых коэффициентов из множества $W(m; J)$ при помощи рандомизации этого выбора, получаем случайный вектор $\tilde{w}(J) = (\tilde{w}_0(J), \tilde{w}_1(J), \dots, \tilde{w}_m(J))$, равномерно распределенный на полиэдре $W(m; J)$.

Компонента $\tilde{w}_j(J)$ случайного вектора $\tilde{w}(J)$ есть рандомизированная оценка значимости j -го источника информации о плотности распределения случайного значений исследуемого показателя в момент времени $k = N + N_1$. Для случайных величин $\tilde{w}_j(J)$, можно найти математические ожидания $\bar{w}_j(J) = E\tilde{w}_j(J)$ и стандартные отклонения (стандарты) $sw_j(J) = \sqrt{D\tilde{w}_j(J)}$, $j = \overline{0, 1, m}$. Полученное математическое ожидание $\bar{w}_j(J)$ случайной величины $\tilde{w}_j(J)$ является искомой оценкой весового коэффициента w_j , построенной на основе экспертной информации J . Точность полученной оценки $\bar{w}_j(J)$ описывается стандартным отклонением $sw_j(J)$.

Искомые величины $\bar{w}_j(J)$, $sw_j(J)$ вычисляются с учетом конечной точности экспертного оценивания весовых коэффициентов, что позволяет учитывать только дискретные значения этих коэффициентов, отсчитываемых с некоторым конечным шагом. Такая дискретизация значений весовых коэффициентов позволяет использовать для вычисления величин $\bar{w}_j(J)$, $sw_j(J)$ простые формулы, аналогичные формулам, приведенным в подразделе 2.1 для получения математических ожиданий и стандартных отклонений рандомизированных вероятностей. Алгоритмы и программное обеспечение, разработанные в этом направлении, испытаны на многочисленных реальных задачах, где приходилось сравнивать сложные объекты, основываясь на неточной, неполной и нечеткой информации (см., например, [2], [3], [4]).

3. Численный иллюстративный пример

В этом разделе описанный выше метод иллюстрируется на примере данных о продажах на внутреннем американском рынке легковых автомобилей американского производства. Эти данные, полученные с Интернет-сайта Бюро Экономического Анализа (<http://www.bea.gov/>), находятся в открытом доступе, измеряются десятки лет и, кроме того, в этом экономическом секторе не происходит ничего революционного, чтобы делало бы временной ряд существенно нестационарным.

График 1. Объемы продаж легковых автомобилей на внутреннем американском рынке в тыс. шт., ежемесячно.

Из графика видно наличие сезонных одногодичных колебаний, а также колебаний с большим периодом, которые в нашем эксперименте не включаются в модель. Мы специально выберем из данных такой интервал, на котором есть заметное изменение тренда. Пусть, например, это будет часть временного ряда с 1988 года по 1992, когда имеется тенденция к общему снижению продаж, а вслед за этим - тенденция к росту.

Составим модель авторегрессии [9]. Реальные данные изображены на графике ниже сплошной черной линией, а оптимальный тренд - розовой, пунктирной. В качестве тренда взято решение системы (6) в прямую сторону и системы (7) - в обратную. Оптимальные начальные данные для прогноза (и, следовательно, для всего тренда) определены по формуле (8).

График 2. Прогноз объема продаж на основе авторегрессии 12-го порядка с января 1992 года.

На графике текущее значение времени обозначено вертикальной линией: все, что слева от линии - это временной ряд, а справа - данные для сравнения с прогнозом. Порядок авторегрессии был выбран равным 12. Это число соответствует сезонным колебаниям продаж с периодом один год. Кроме того, некоторую оптимальность порядка авторегрессии выявляли с помощью вычислительных экспериментов.

Коэффициенты Z^* используемые в формулах (4) - (7), приведены в следующей таблице.

Таблица 1. Коэффициенты авторегрессии 12-го порядка в соответствии с формулой (4)

α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7
0,249	0,137	-0,026	-0,076	0,129	0,027	-0,122
α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	γ	
-0,031	0,208	0,076	-0,041	0,628	-99,2	

Для вычисления гистограммы отклонений от тренда используем интервал времени с июня 1988 по декабрь 1991 года:

График 3. Отклонения реальных данных от оптимального тренда

Сама гистограмма имеет вид (одно деление оси гистограммы соответствует 50 единиц продаж):

График 4. Гистограмма погрешности модели.

Таким образом, мы имеем возможность дать вероятностную оценку прогнозируемого значения продаж через два года: в декабре 1993. Значение продаж, согласно тренду, будет 323 тыс. автомашин. С определенной вероятностью объем продаж может принять другие значения:

Таблица 2. Плотность распределения вероятности прогнозируемого значения на основе авторегрессии

Интервал числового значения	Вероятность в процентах
[123;223]	2
[223;273]	14
[273;323]	44
[323;373]	23
[373;423]	10
[423;473]	7

К оценке двухлетнего прогноза привлекают двух экспертов: один использует данные двух последних лет и вычисляет линейный тренд с помощью программы Microsoft Excel:

График 5. Прогноз с помощью линейного тренда с января 1992 года

Данный эксперт дает оценку продаж в декабре 1993 года 441 тысячу проданных машин и плотность вероятности ошибок согласно следующей таблице.

Таблица 3. Плотность распределения вероятности прогнозируемого значения на основе линейного тренда

Интервал числового значения	Вероятность в процентах
[291;341]	5
[341;391]	17
[391;441]	22
[441;491]	27
[491;541]	26
[541;591]	3

Третий вариант прогноза составляется полностью на экспертной основе: например, эксперты получают информацию из надежных источников о мерах Правительства США по поддержке национального производителя автомобилей, и они считают, что ближайшие два года продажи будут расти. Эксперту предлагается ответить на вопрос, с какой вероятностью продажи через два года будут исчисляться в одном из трех интервалов? Соответствующее событие обозначим A_i , а их вероятности $P(A_i)$:

Таблица 4. Плотность распределения вероятности прогнозируемого значения на основе заключения эксперта

i	1	2	3
A_i	[450;550)	[550;650)	[650;750]
$P(A_i)$	0,1914	0,6172	0,1914

Вероятности вычислены с применением процедуры рандомизации неопределенности, о которой говорилось в предыдущем параграфе. При этом использовалась ординальная информация эксперта о соотношениях шансов событий:

$$P(A_1) < P(A_2); \quad P(A_3) < P(A_2).$$

Тогда ожидаемый (средний) объем продаж на конец 1993 г.:

$$X = P(A_1) * 500 + P(A_2) * 600 + P(A_3) * 700 = \\ 0,1914 * 500 + 0,6172 * 600 + 0,1914 * 700 = 600.$$

Выполним окончательную процедуру вычисления общей плотности распределения. Для этого нам понадобится мнение некоторого эксперта о степени достоверности всех трех прогнозов. Пусть, например, мнение эксперта выражается в следующей ординальной информации

$$w(Prognosis_1) < w(Prognosis_2); \quad w(Prognosis_2) < w(Prognosis_3)$$

С помощью алгоритма, описанного в предыдущем параграфе, на основании этой информации формируются функции распределения трех случайных величин: весовых коэффициентов общей плотности распределения (1). Визуализация взаимного расположения коэффициентов представлена на диаграмме, из которой можно получить представление о среднем значении весового коэффициента, его разбросе, а также информацию о попарном доминировании одного веса над другим.

График 6. Визуализация полученных весовых коэффициентов и их статистических характеристик.

Взвешенный прогноз объема продаж:

$$X_{weighted} = w_1 * 323 + w_2 * 441 + w + 3 * 600 = \\ 0,1061 * 323 + 0,2778 * 441 + 0,6161 * 600 = 526,44.$$

Итог по всем трем прогнозам - 526,44, что гораздо ближе к реальным данным (538,4), чем предлагалось всеми прогнозами.

4. Заключение

Предлагается новый, конструктивный, доведенный до алгоритмов и программ, подход, совмещающий количественный анализ временных рядов и мнения экспертов о возможном изменении тенденций. Такое совмещение существенно расширяет применимость статистических методов, поскольку для последних является весьма ограничительным требование стационарности процессов, а социально-экономическая динамика часто ему не удовлетворяет. С другой стороны, субъективизм и ограниченные возможности анализа каждого отдельного эксперта уравниваются некоторым "консерватизмом" количественных методов, которые делают выводы из прошлого опыта. Алгоритмы предлагаемого подхода позволяют использовать "обучающую" информацию, чтобы задавать весовые коэффициенты, отражающие важность каждого прогноза, наиболее точно.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. (См. также в [7].) Если обратная матрица в формуле теоремы существует, то доказательство сводится к обычному вычислению производных квадратичного функционала по элементам вектора Z и приравняванию их к нулю. Для обращения указанной матрицы необходимо и достаточно условия $\alpha_L \neq 0$, которое обязательно выполняется, т.к. мы рассматриваем авторегрессию порядка L , и можем уменьшить порядок, если это условие не выполнено. Равносильность же с обратимостью доказывается следующей цепочкой равенств и неравенств:

$$\det A = \alpha_L \neq 0, \\ \det \left[\sum_{k=L}^{N-1} (A^T)^{k-L+1} (A)^{k-L+1} \right] = \det \left[\sum_{k=L}^{N-1} (A^T A)^{k-L+1} \right] \neq 0,$$

а также тем, что сумма определено положительных матриц является определено положительной.

Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Евстратчик С.В.* Прогнозирование временного ряда (на примере фондового индекса) // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Серия 5. 2002. Вып. 4. С. 162-168.

2. Колесников Г.И., Корникова Н.В., Федотов Ю.В., Хованов Н.В. Оценка вероятностей альтернатив развития фондового рынка в условиях дефицита числовой информации // Вестник Санкт-Петербургского университета. 2005. Сер. 10. Вып.2. С. 151-160.
3. Хованов Н.В. Анализ и синтез показателей при информационном дефиците. СПб., СПбГУ, 1996.
4. Хованов Н.В. Математические модели риска и неопределенности. СПб., СПбГУ, 1998.
5. Кобозева Е.Г., Федоренко Ф.С., Хованов Н.В. Оценка спектральной плотности сглаженного временного ряда в задачах выявления периодических составляющих экономических процессов // Материалы международной научной конференции "Экономическая наука: проблемы теории и методологии". Санкт-Петербург, 16-18 мая 2002 г. Секции 5-10. СПб., ОЦЭИМ, 2002. С. 125-127.
6. Гренджер К., Хатанака М. Спектральный анализ временных рядов в экономике. М.: Статистика, 1972.
7. Прасолов А.В. Математические модели динамики в экономике. СПб: СПбГУЭФ, 2000
8. Prasolov A. V., Wei K. C. On Forecast of Exchange Rate of a Foreign Currency.// Proc. IEEE International Conference on Control Applications and IEEE International Symposium on Computer-Aided Control Systems Design. September 25-27, 2000, Anchorage Hilton, Anchorage, Alaska, USA
9. Prasolov A.V. Dynamic Competitive Analysis in Automotive Industry // Proc. International Conference On Stability and Control Processes, St. Petersburg , 2005.